

Intervalle de confiance du percentile

On suppose qu'il existe une transformation h monotone qui rend la loi de $U = h(T)$ symétrique autour de $\eta = h(\theta)$. On définit le quantile d'ordre a de la loi de $U - \eta$

$$q_{U-\eta}(a) = \inf\{x, \mathbb{P}(U - \eta \leq x) \geq a\}.$$

Comme U a une loi symétrique par rapport à η , on a, pour tout $\alpha \in]0, 1[$

$$-q_{U-\eta}(\alpha/2) = q_{U-\eta}(1 - \alpha/2).$$

On peut alors écrire l'intervalle de confiance classique de deux manières

$$\begin{aligned} IC_{\text{classic}}(\alpha) &= [U(\mathcal{X}) - q_{U-\eta}(1 - \alpha/2), U(\mathcal{X}) - q_{U-\eta}(\alpha/2)] \\ &= [U(\mathcal{X}) + q_{U-\eta}(\alpha/2), U(\mathcal{X}) + q_{U-\eta}(1 - \alpha/2)]. \end{aligned}$$

On peut alors définir la première approximation bootstrap de cet intervalle de confiance

$$IC_{\text{boot}}^*(\alpha) = [U(\mathcal{X}^*) + q_{U-\eta}^*(\alpha/2), U(\mathcal{X}^*) + q_{U-\eta}^*(1 - \alpha/2)],$$

où $q_{U-\eta}^*(a)$ est le quantile d'ordre a de la loi de $U(\mathcal{X}^*) - U(\mathcal{X})$, qui est la version bootstrap de $U - \eta$.

On cherche maintenant à trouver une relation entre $q_{U-\eta}^*(a)$ et $q_U^*(a)$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} q_U^*(a) &= \inf\{x, \mathbb{P}^*(U(\mathcal{X}^*) \leq x) \geq a\} \\ &= \inf\{x, \mathbb{P}^*(U(\mathcal{X}^*) - U(\mathcal{X}) \leq x - U(\mathcal{X})) \geq a\} \end{aligned}$$

donc

$$q_U^*(a) = q_{U-\eta}^*(a) + U(\mathcal{X}).$$

On peut donc récrire

$$IC_{\text{boot}}^*(\alpha) = [U(\mathcal{X}^*) + q_{U-\eta}^*(\alpha/2), U(\mathcal{X}^*) + q_{U-\eta}^*(1 - \alpha/2)] = [q_U^*(\alpha/2), q_U^*(1 - \alpha/2)].$$

On va maintenant lier $q_U^*(a)$ et $q_T^*(a)$. On supposera h croissante (autrement on refait le calcul avec $-h$).

$$\begin{aligned}
h(q_T^*(a)) &= h(\inf\{x, \mathbb{P}^*(T(\mathcal{X}^*) \leq x) \geq a\}) \\
&= \inf\{h(x), \mathbb{P}^*(T(\mathcal{X}^*) \leq x) \geq a\} \\
&= \inf\{h(x), \mathbb{P}^*(h(T(\mathcal{X}^*)) \leq h(x) \geq a\} \text{ (par croissance de } h) \\
&= \inf\{y, \mathbb{P}^*(U(\mathcal{X}^*) \leq y) \geq a\} = q_U^*(a).
\end{aligned}$$

Considérons l'évènement $\eta = h(\theta) \in IC_{\text{boot}}^*(\alpha)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\eta &= h(\theta) \in IC_{\text{boot}}^*(\alpha) \\
&\iff q_U^*(\alpha/2) \leq h(\theta) \leq q_U^*(1 - \alpha/2) \\
&\iff h(q_T^*(\alpha/2)) \leq h(\theta) \leq h(q_T^*(1 - \alpha/2)) \\
&\iff q_T^*(\alpha/2) \leq \theta \leq q_T^*(1 - \alpha/2) \text{ (par croissance de } h).
\end{aligned}$$

On obtient alors un intervalle de confiance pour θ de même niveau que $IC_{\text{boot}}^*(\alpha)$

$$[q_T^*(\alpha/2), q_T^*(1 - \alpha/2)].$$

On utilise ensuite la deuxième approximation du bootstrap pour obtenir l'intervalle de confiance du percentile

$$\widehat{IC}_{\text{perc}}^*(\alpha) = [T_{(\lceil B\alpha/2 \rceil)}^*, T_{(\lceil B(1-\alpha/2) \rceil)}^*] = [\hat{\theta}_{(\lceil B\alpha/2 \rceil)}^*, \hat{\theta}_{(\lceil B(1-\alpha/2) \rceil)}^*].$$