Exercice 1

1) $\mathbb{P}\left(\frac{\lambda}{\alpha}X \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{\alpha x}{\lambda}\right)$

en dérivant, on obtient la densité de la v.a $\frac{\lambda}{\alpha}X$.

donnée par $\frac{\alpha}{\lambda} f_{(1,\alpha)}\left(\frac{\alpha x}{\lambda}\right) = \frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\left(\frac{\alpha x}{\lambda}\right)^3}}\exp\left(-\frac{\alpha\left(\frac{\alpha x}{\lambda}-1\right)^2}{2x\frac{\alpha}{\lambda}}\right)$

$= \sqrt{\frac{\alpha^2}{\lambda^2}\frac{\alpha\lambda^3}{\alpha^3}\frac{1}{2\pi x^3}}\exp\left(-\alpha\frac{\frac{\alpha^2}{\lambda^2}\left(x-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2}{\frac{\alpha}{\lambda}2x}\right)$

$= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{\lambda\left(x-\lambda/\alpha\right)^2}{2x\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2}\right)$ on reconnait la densité de la loi $\Gamma\left(\frac{\lambda}{\alpha},\lambda\right)$

Par ailleurs, la densité de la loi $IG\left(\lambda,\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ est donnée par :

$$\sqrt{\frac{\lambda/\alpha}{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{\lambda/\alpha\left(x-\lambda\right)^2}{2\lambda^2 x}\right) = \sqrt{\frac{\lambda/\alpha}{2\pi x^3}}\exp\left(-\frac{(x-\lambda)^2}{2\alpha\lambda x}\right)$$

Pour simuler suivant la loi $IG(\mu,\gamma)$ pour $\mu,\gamma>0$.

On pose $\lambda=\mu$ et $\frac{\lambda}{\alpha}=\gamma \Leftrightarrow \lambda=\mu$ et $\alpha=\frac{\lambda}{\gamma}$, on simule ensuite suivant la loi $IG\left(\frac{\lambda}{\gamma},1\right)$ puis on multiplie les résultats par $\frac{\lambda}{\alpha}=\frac{\mu\gamma}{\lambda}=\gamma$.

Il suffit donc de savoir simuler suivant les lois $IG(\alpha,1)$ pour tout $\alpha>0$.

2) $\alpha\frac{(x-1)^2}{x} = y^2 \Leftrightarrow \alpha x^2 - 2\alpha x + \alpha = xy^2$

$\Leftrightarrow \alpha x^2 - x(2\alpha + y^2) + \alpha = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x\left(\frac{2\alpha+y^2}{\alpha}\right) + 1 = 0 \quad (**)$

En $x=0$ $\quad \alpha>0$
En $x=1$ $\quad -y^2<0$
$\Rightarrow$ 1 racine entre 0 et 1

De plus $x_-(y)\cdot x_+(y) = 1$ voir forme $(**)$

donc la 2de racine est >1.

3) a) Comme U est de loi uniforme sur $[0,1]$, cond. à Y, $\mathbb{P}\left(U \le (1+x_-(Y))^{-1} / Y\right) = \frac{1}{1+x_-(Y)} = p_-(Y)$

on a $p_+(Y) = 1 - p_-(Y) = 1 - \frac{1}{1+x_-(Y)} = \frac{x_-(Y)}{1+x_-(Y)}$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{x_-(Y)}}$$

comme le produit des racines vaut 1 $\frac{1}{x_-(Y)} = x_+(Y)$

$$= \frac{1}{1+x_+(Y)}$$

b) Soit ψ cont. bornée.

$$\mathbb{E}(\psi(X)) = \mathbb{E}\left(\psi(x_-(Y))\, \mathbb{1}\left(U \le \frac{1}{1+x_-(Y)}\right) + \psi(x_+(Y))\, \mathbb{1}\left(U > \frac{1}{1+x_-(Y)}\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\psi(x_-(Y))\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}\left(U \le \frac{1}{1+x_-(Y)}\right)/Y\right) + \psi(x_+(Y))\, \mathbb{E}\left(\mathbb{1}\left(U > \frac{1}{1+x_-(Y)}\right)/Y\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\psi(x_-(Y))\, p_-(Y) + \psi(x_+(Y))\, p_+(Y)\right)$$

c) $\mathbb{E}\left(\psi(x_+(Y))\, p_+(Y)\right) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x_+(y)) \frac{1}{1+x_+(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy$

$$= 2\int_{\mathbb{R}_+} \psi(x_+(y)) \frac{1}{1+x_+(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

On pose $\underbrace{x_+(y)}_{\in [1,+\infty[} = x \Leftrightarrow \alpha \frac{(x-1)^2}{x} = y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{\alpha (x-1)^2}{x}}$ (car $y \in \mathbb{R}_+$),

On a $\left(\sqrt{\frac{\alpha(x-1)^2}{x}}\right)' = \sqrt{\alpha}\, \frac{2(x-1)x - (x-1)^2}{x^2} \Big/ 2\sqrt{\frac{\alpha(x-1)^2}{x}}$

$$= \sqrt{\alpha}\, \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 2x - 1}{x^2} \Big/ 2\sqrt{\frac{\alpha(x-1)^2}{x}}$$

$$= \sqrt{\alpha}\, \frac{(x^2-1)}{2\sqrt{x^3}} \frac{1}{\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x}}} = \sqrt{\alpha}\, \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{2\sqrt{x^3}\, \cancel{|x-1|}}$$ car $x_+ > 1$

donc $\sqrt{\alpha}\, \frac{(x+1)}{2\sqrt{x^3}}\, dx = dy$

Finalement

$$\mathbb{E}\left(\Psi(x_+(Y))\, p_+(Y) \right) = \cancel{2} \int \Psi(x) \frac{1}{\cancel{1+x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha(x-1)^2}{2x}} \frac{\sqrt{\alpha}\,\cancel{x+1}}{\cancel{2}\sqrt{x^3}}\, dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \Psi(x) \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi x^3}}\, e^{-\frac{\alpha(x-1)^2}{2x}}\, dx$$

De la même façon, on obtiendra

$$\mathbb{E}\left(\Psi(x_-(Y))\, p_-(Y) \right) = \int_0^1 \Psi(x) \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi x^3}}\, e^{-\frac{\alpha(x-1)^2}{2x}}\, dx$$

Soit $\mathbb{E}\left(\Psi(X)\right) = \int_0^\infty \Psi(x)\, f_{1,\alpha}(x)\, dx$

X a donc la densité $f_{1,\alpha}$.

Exercice 2

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{s^3} \frac{1}{1+s^2}\, ds$$

1) ~~A~~ une constante près, on pose $f_X(x) = \frac{c}{1+s^2}$.

On pourra alors écrire

$$I = \frac{1}{c} \int_1^\infty \frac{1}{s^3} \frac{c}{1+s^2}\, ds = \frac{1}{c} \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(X)}{X^3} \right)$$

On doit trouver C pour que f_X soit une densité

C'est $C \int \frac{1}{1+x^2} dx = 1 \iff C\left(\text{Arctan}(+\infty) - \text{Arctan}(-\infty)\right) = 1$

$\iff C\pi = 1 \iff C = \frac{1}{\pi}$

2). On peut alors approximer I à partir de réalisations de v.a. i.i.d $X_1, \dots, X_n$ de densité f_X. en posant

$$\hat{I}_1 = \pi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i^3} \mathbb{1}(X_i \in [1, +\infty[).$$

3). On mesure la précision de l'estimation via la variance de $\hat{I}_1$

$$\mathbb{V}(\hat{I}_1) = \pi^2 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}\left(\frac{1}{X_i^3} \mathbb{1}(X_i \in [1, +\infty[)\right)$$

$$= \pi^2 \frac{1}{n} \left\{ \mathbb{E}\left(\frac{1}{X_i^6} \mathbb{1} X_i \in [1, +\infty[\right) - \mathbb{E}^2\left(\frac{1}{X_i^3} \mathbb{1} X_i \in [1, +\infty[\right) \right\}$$

$$= \pi^2 \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\frac{1}{X_i^6} \mathbb{1}(X_i \in [1, +\infty[)\right) - \frac{1}{n} I^2$$

$$= \frac{1}{n} \pi^2 \int_1^\infty \frac{1}{x^6} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$$

4). $I = \int_1^\infty \frac{1}{s^3} \frac{1}{1+s^2} ds$ on pose $u = \frac{1}{s}$ $du = -\frac{1}{s^2} ds$.

$$= \int_0^1 u \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} du = \int_0^1 \frac{u^3}{u^2+1} du$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{U^3}{U^2+1}\right) \quad \text{où } U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$$

5). On choisira donc d'approximer I par.

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{U_i^3}{1+U_i^2} \quad \text{où} \quad U_1, \dots, U_n \text{ sont iid de loi } \mathcal{U}_{[0,1]}.$$

6.) On a $\mathbb{V}(\hat{I}_2) = \frac{1}{n} \mathbb{V}\left(\frac{U_i^3}{1+U_i^2}\right)$

$$= \frac{1}{n}\left\{ \mathbb{E}\left(\left(\frac{U_i^3}{1+U_i^2}\right)^2\right) - \mathbb{E}^2\left(\frac{U_i^3}{1+U_i^2}\right)\right\}$$

$$\mathbb{E}^2\left(\frac{U_i^3}{1+U_i^2}\right) = I^2$$

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{U_i^3}{1+U_i^2}\right)^2\right) = \int_0^1 \frac{u^6}{(1+u^2)^2}\, du$$

Puisque $\int_0^1 \frac{s^6}{(1+s^2)^2}\, ds < \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{s^6(1+s^2)}\, ds$ on en déduit que l'approximation $\hat{I}_2$ est meilleure que l'approx. $\hat{I}_1$.

$X \sim IG(1,\alpha)$ $\qquad f_{(1,\alpha)}(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi x^3}}\, \exp\left(-\frac{\alpha(x-1)^2}{2x^2}\right)$

Densité de $\frac{\lambda}{\alpha} X$:

$$\frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\left(\frac{\alpha x}{\lambda}\right)^3}}\ \exp\left(-\frac{\alpha\left(\frac{\alpha x}{\lambda}-1\right)^2}{2\left(\frac{\alpha x}{\lambda}\right)^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{\alpha^2}\ \alpha\ \lambda^3}{\cancel{\lambda^2}\ \cancel{\alpha^3}}\ \frac{1}{2\pi x^3}}\ \exp\left(-\frac{\alpha\cancel{\frac{\alpha^2}{\lambda^2}}\left(x-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2}{2\cancel{\frac{\alpha^2}{\lambda^2}}\ x^2}\right)$$

$IG\left(\frac{\lambda}{\alpha},\alpha\right)$

$$P\left(\frac{\alpha}{\lambda}X \le x\right) = P\left(X \le \frac{\lambda x}{\alpha}\right)$$

$$\to \frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\left(\frac{\lambda x}{\alpha}\right)^3}}\ \exp\left(-\frac{\alpha\left(\frac{\lambda x}{\alpha}-1\right)^2}{2\frac{\lambda^2}{\alpha^2}x^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\ \frac{\alpha}{\lambda^3}\ \frac{\alpha^3}{2\pi x^3}}$$

$$\frac{\alpha}{\lambda} f_{(1,\alpha)}\left(\frac{x\alpha}{\lambda}\right) = \frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\left(\frac{x\alpha}{\lambda}\right)^3}}\ \exp\left(-\frac{\alpha\left(\frac{x\alpha}{\lambda}-1\right)^2}{2x}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha^2}{\lambda^2}\ \frac{\alpha\ \lambda^3}{\alpha^3}\ \frac{1}{2\pi x^3}}\ \exp\left(-\frac{\alpha}{2x\frac{\alpha}{\lambda}}\frac{\alpha^2}{\lambda^2}\left(x-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\ \exp\left(-\frac{\frac{\alpha^2}{\lambda}}{2x}\left(x-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\ \exp\left(-\frac{\lambda}{2x\left(\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right)}\left(x-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2\right)$$

$\mu = \frac{\lambda}{\alpha}$

$\gamma = \lambda.$

$$\frac{\lambda}{\lambda^2/\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{\lambda}$$