Longitudinal data analysis : examen théorique

On considère la loi de Weibull $\mathcal{W}(\lambda, \alpha)$, de fonction de survie

$$t \mapsto \bar{F}_0(t) = \exp(-\lambda t^\alpha) \text{ pour } t \geq 0.$$

On définit également μ_0 et σ via les équations $\lambda = \exp(-\mu_0/\sigma)$ et $\sigma = \alpha^{-1}$et la v.a. W de fonction de répartition H_0

$$H_0(w) = 1 - \exp(-\exp(w)) \text{ pour } w \in \mathbb{R}.$$

1. Si T suit une loi de $\mathcal{W}(\lambda, \alpha)$, quelle est la fonction de répartition de la v.a. $Y = \log(T)$?
2. Montrer que $\mu_0 + \sigma W$ a la même loi que $Y = \log(T)$.
3. On introduit des covariables en considérant maintenant que $\mu_0 = \mu + X\beta$ où $\mu \in \mathbb{R}$, $X, \beta \in \mathbb{R}^p$, μ_0 est appelé l'intercept et σ l'échelle (scale). On a alors
$$\log(T) = Y = \mu + X\beta + \sigma W.$$
Calculer la fonction de survie $\bar{F}_X$ de T dans ce modèle. Montrer qu'on peut écrire
$$\bar{F}_X(t) = \bar{F}_0(t \exp(-X\beta)).$$
4. Calculer la fonction de risque (hazard rate) de T dans ce modèle. L'hypothèse des risques proportionnels est-elle vérifiée ?
5. Calculer la médiane de $\bar{F}_X$ en fonction de celle de $\bar{F}_0$.
6. On considère n voitures sur lesquelles on a installé de nouveaux systèmes de climatisation. Pour chaque véhicule, on a enregsitré le type (`car`) et la température moyenne (`temp`) dans la région où circule le véhicule. On a également enregistré le temps (`time` en jours) de panne du système de climatisation (il peut être censuré). Dans le modèle précédent

```
survreg(formula = Surv(time, failure) ~ temp + car, data = data)
                 Value Std. Error     z      p
(Intercept)  1.1884     1.8409  0.65 0.5186
temp         0.1193     0.0461  2.59 0.0096
carsuv      -0.2268     0.0980 -2.31 0.0206
Log(scale)   0.0638     0.0354  1.80 0.0713
```

Quelle est l'influence du type de voiture sur la médiane de la durée de vie du système de climatisation (toutes choses égales par ailleurs) ? On a $\exp(-0.2268) = 0.796$, $\exp(-0.2268)/\exp(0.0638) = 0.754$, $\exp(0.2268) = 1.255$ et $\exp(0.2268)/\exp(0.0638) = 1.176$

7. La conclusion de la question précédente est-elle compatible avec l'estimation dans le modèle de Cox ?

```
            coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)
temp    -0.11272   0.89340  0.04355 -2.589  0.00964 **
carsuv   0.21986   1.24591  0.09299  2.364  0.01806 *
```