

Feuille 2 de travaux dirigés

Probabilité conditionnelle, Indépendance

Exercice 1. Soit E et F deux événements d'un univers Ω , tels que $\mathbb{P}(F) \notin \{0, 1\}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\bar{E}|F) = 1 - \mathbb{P}(E|F)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(E|\bar{F})$. A-t-on $\mathbb{P}(E|\bar{F}) = 1 - \mathbb{P}(E|F)$?
3. Montrer que $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E|\bar{F})\mathbb{P}(\bar{F})$.

Exercice 2. On joue à Pile ou Face en lançant 3 fois une pièce de monnaie non tronquée avec la règle de jeu suivante: on gagne 1€ si Pile apparaît et on perd 1€ sinon. Soit les événements

E : “gagner 1€ à l’issue des trois lancers”

F : “avoir un seul Pile aux deux premiers lancers”

G : “avoir Face au premier lancer”

1. Déterminer l'ensemble Ω des résultats possibles à l’issue des 3 lancers.
2. Déterminer $\mathbb{P}(E|F)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(E|G)$.
4. Expliquer, en dehors des calculs, pourquoi $\mathbb{P}(E|G) \leq \mathbb{P}(E|F)$.

Exercice 3. Un étudiant passe un concours composé de 4 épreuves écrites de niveaux de difficulté équivalents. Pour réussir le concours il doit valider toutes les 4 épreuves, le résultat d’une épreuve étant affiché avant l’entame d’une nouvelle épreuve. Montrer que la probabilité de réussir le concours sachant qu’il a validé les deux premières épreuves est inférieure à la probabilité de réussir le concours sachant qu’il a validé les trois premières épreuves.

Exercice 4. Une urne contient 6 boules blanches, 4 boules rouges et 5 boules jaunes. On tire successivement et sans remise 3 boules de l’urne. Quelle est la probabilité d’avoir successivement (si les événements élémentaires sont équiprobables: les boules sont juste de couleurs différentes mais elles sont identiques)

1. une boule rouge, une boule jaune, une boule blanche,
2. une boule blanche, une boule jaune, une boule blanche,
3. une boule rouge, une boule rouge, une boule jaune.

Exercice 5. Un examen systématique de dépistage est institué pour détecter une maladie M . On sait que le risque d’avoir cette maladie est de 0.01. L’examen donne des “faux positifs” avec probabilité 0.02 et des “faux négatifs” avec une probabilité de 0.001.

1. Déterminer la probabilité que le test se révèle positif sur un individu tiré au hasard.
2. Un individu subit un examen qui se révèle positif. Quelle est la probabilité qu’il soit malade?

Exercice 6. Dans un petit pays d'un million d'habitants, on a vacciné 100000 personnes contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, 50000 personnes sont malades. On constate que seul une personne vaccinée sur 100 tombe malade.

1. Quelle est la probabilité pour une personne non vaccinée de tomber malade.
2. Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 7. Alcotest : Un laboratoire a mis au point un alcootest et décide d'en vérifier la crédibilité. Les résultats obtenus sont les suivants:

- 2% des personnes contrôlées par la police sont effectivement en état d'ébriété.
- 95 fois sur 100 l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne était réellement en état d'ébriété.
- 5 fois sur 100, l'alcootest s'est révélé positif, alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. Quelle est la probabilité que l'alcootest donne une indication correcte?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootest est positif?

Exercice 8. On souhaite prendre en location un F3 dans l'Essonne. Supposons que le site PAP publie régulièrement des offres de locations de F3 situés dans des quartiers qu'on peut regrouper en trois catégories: quartier sympa, quartier moyen, quartier à éviter.

On sait que

- la probabilité qu'une annonce de location de F3 dépasse 4 semaines sachant qu'elle se situe dans un quartier sympa est de 0.04,
- les probabilités qu'une annonce de location de F3 dépasse 4 semaines sachant qu'elle se situe dans des quartiers moyens et à éviter sont respectivement de 0.2 et 0.5,
- 1/8 des annonces de F3 dépassant les 4 semaines se situe dans les quartiers sympas, 3/8 d'entre elles se situent en quartiers moyens et la moitié d'entre elles se situe en quartiers à éviter.

En surfant sur le site PAP, on tombe sur une annonce qui a dépassé 4 semaines. Quelle est la probabilité que le F3 se situe

1. dans un quartier sympa? dans un quartier moyen? dans un quartier à éviter?

Exercice 9. Une personne se trouve devant une porte fermée à clef. Elle dispose d'un trousseau de n clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte. Elle essaie les clefs au hasard l'une après l'autre. Quelle est la probabilité p_k qu'elle ouvre la porte au k -ième essai, ($k \in \{1, \dots, n\}$)?

Exercice 10. On lance deux fois un dé équilibré. Soit F l'événement qu'on obtient 2 au premier lancer, E l'événement que la somme des nombres obtenus aux deux lancers fait 8 et soit G l'événement que la somme des nombres obtenus aux deux lancers fait 6.

- a) Les événements E et F sont-ils indépendants?
- b) Les événements G et F sont-ils indépendants?

Exercice 11. On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée et on note la face qui apparaît. On suppose que les événements élémentaires de $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ sont équiprobables. Soit E l'événement qu'on obtient Face au premier lancer, G l'événement qu'on obtient Face au second lancer et H l'événement "avoir deux Face".

1. Montrer que les événements E et G sont indépendants.
2. Les événements E et H sont-ils indépendants?