ENSIIE
FIPA

2017-2018
Probabilités

Feuille 3 de travaux dirigés

Exercice 1. Dans un aéroport, le nombre d'avions X qui se préparent à atterrir au cours d'une minute satisfait

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-1}\frac{1^k}{k!}, \quad \text{pour } \ k \in \mathbb{N}.$$

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre 1.

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Si la capacité d'accueil de l'aéroport est de 2 avions par minutes, quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'attente pendant une minute donnée ?
3. Même question si l'aéroport peut accueillir trois avions à la minute?

Exercice 2. On dispose d'un dé non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère le jeu aléatoire suivant. On lance trois fois le dé: à chaque lancer, on gagne 5€ si la face 6 apparaît, sinon (si une autre face apparaît), on perd 1€. Soit X la quantité représentant notre richesse à l'issu des trois lancers.

1. Quelle est l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X et représentez-la graphiquement.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 1/4 & \text{si } x \in [3, 5[\\ 5/8 & \text{si } x \in [5, 10[\\ 1 & \text{si } x \geq 10. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 4. Sur certaines destinations et aux heures prisées, les compagnies aériennes observent des taux de défection importants (en particulier parce que les billets standards sont remboursés en cas de défection). Dans l'espoir d'assurer la rentabilité du vol, ces compagnies pratiquent donc la surréservation : elles vendent plus de places que n'en contiennent les avions. On suppose que sur un vol donné V, chaque passager potentiel se préesente effectivement à l'embarquement avec une probabilité $p = 0.75$ et que les comportements des passagers sont indépendants les uns des autres. La compagnie a vendu $n = 282$ billets alors que l'avion contient $N = 280$ places.

1. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de passagers se présentant effectivement à l'embarquement. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas assez de places dans l'avion pour accueillir tous les passagers ?

Exercice 5. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$ telle que

$$p(i) = \mathbb{P}(X = i) = c\frac{\lambda^i}{i!}, \ i = 0, 1, 2, \dots$$

1. Déterminer la constante c.
2. Calculer $\mathbb{P}(X=0)$ et $\mathbb{P}(X \geq 2)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 6. On lance une pièce de monnaie tronquée dont la probabilité d'apparition de Pile est p. Soit X la variable aléatoire représentant le premier instant où Pile apparaît.

1. Montrer que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \dots\}$ et que sa loi de probabilité est donnée par
$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \dots ; \ p \in]0, 1[.$$
2. Qu'attendons-nous sur l'espérance de X lorsque p est proche de 0 et lorsque p est proche de 1. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer Var(X).

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{-2, -1, 1, 2\}$ avec

$$\mathbb{P}(X=-2) = ? \quad \mathbb{P}(X=-1) = 1/4 \quad \mathbb{P}(X=1) = 1/4 \quad \mathbb{P}(X=2) = ?$$

1. Déterminer les valeurs manquantes pour que $\mathbb{E}(X) > 0$.
2. Calculer l'espérance de X pour les valeurs choisies.
3. Déterminer la variance de X.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$ et on suppose que $\lambda = np$ est une constante (indépendante de n).

1. Montrer que pour tout $k = 0, \dots, n$,
$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}.$$
2. Calculer la limite des quantités:
$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$
lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que lorsque n est grand
$$\mathbb{P}(X=k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$
4. On s'intéresse à la loi du nombre de fautes (d'orthographe, de grammaire, ...) par page d'un grand journal. On suppose que la probabilité p de rencontrer une faute sur une page est très petite et que la loi du nombre X de fautes par page est une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$ où n représente le nombre de mots d'une page. Déterminer $\mathbb{P}(X=0), \mathbb{P}(X=1), \mathbb{P}(X \geq 3)$ lorsque $\lambda = 0.02$.