Cours de Probabilité: Variables aléatoires.

Abass SAGNA,
abass.sagna@ensiie.fr

Maître de Conférences à l'ENSIIE,
Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry
Université d'Evry Val-d'Essonne, UMR CNRS 8071

January 15, 2026

Plan

Plan

Pour définir une v.a. discrète, considérons le jeu de Pile ou Face avec une pièce de monnaie non tronquée où on gagne 1€ si Pile apparaît et on perd 1€ sinon. On lance 3 fois la pièce et on note X la quantité représentant notre gain cumulé à l'issue des 3 lancers. Les valeurs de X dépendent du résultat des 3 lancers:

1. elle prend la valeur -3 si le résultat ω des 3 lancers est $\omega = \mathrm{FFF}$,
2. elle prend la valeur -1 si $\omega \in \{\mathrm{FFP}, \mathrm{PFF}, \mathrm{FPF}\}$,
3. elle prend la valeur 1 si $\omega \in \{\mathrm{PPF}, \mathrm{FPP}, \mathrm{PFP}\}$,
4. elle prend la valeur 3 si $\omega = \mathrm{PPP}$.

Le gain cumulé X est donc une fonction de Ω à val. dans $\{-3, -1, 1, 3\}$:

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \{-3, -1, 1, 3\} \\ \omega &\mapsto X(\omega). \end{aligned}$$

Une telle fonction définie sur Ω est appelée une variable aléatoire au sens où ses valeurs prises dépendent du résultat de l'expérience aléatoire considérée.

Définition. Une variable aléatoire (v.a.) est une fonction définie sur l'ensemble Ω. Dans ce cours nous considérons des variables aléatoires réelles, c'est-à-dire, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLE. On lance 2 fois une pièce de monnaie équilibrée et on note la face qui apparaît après chaque lancer. On suppose que les lancers sont indépendants. Rappelons que l'univers $\Omega = \{\mathrm{PP}, \mathrm{PF}, \mathrm{FP}, \mathrm{FF}\}$. Soit la fonction X qui compte le nombre de Pile: on a $X : \Omega \mapsto \{0, 1, 2\}$ avec

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = \mathrm{FF}, \\ 1 & \text{si } \omega \in \{\mathrm{FP}, \mathrm{PF}\}, \\ 2 & \text{si } \omega = \mathrm{PP}. \end{cases}$$

X est une v.a.

Plan

On distingue 2 types de variables aléatoires (v.a.): les v.a. discrètes et les v.a. continues.

Définition On appelle variable aléatoire discrète une v.a. à valeurs dans un ensemble dénombrable $E = \{x_0, x_1, \dots\}$.

Pour une telle v.a. X on peut s'intéresser à déterminer sa *loi de probabilité* qui permet de calculer le degré de vraisemblance associé à chaque valeur x_i prise par X. Si on considère l'exemple introductif, il s'agit de déterminer les quantités $\mathbb{P}(X = x_i)$, pour $x_i \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Définition Soit X une v.a. discrète définie sur Ω et à valeurs dans $E = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. La loi de probablité de X est définie par la fonction: $p : E \mapsto [0, 1]$ telle que

$$p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}\big), \quad i = 0, 1, 2, \dots.$$

On distingue 2 types de variables aléatoires (v.a.): les v.a. discrètes et les v.a. continues.

Définition On appelle variable aléatoire discrète une v.a. à valeurs dans un ensemble dénombrable $E = \{x_0, x_1, \dots\}$.

Pour une telle v.a. X on peut s'intéresser à déterminer sa *loi de probabilité* qui permet de calculer le degré de vraisemblance associé à chaque valeur x_i prise par X. Si on considère l'exemple introductif, il s'agit de déterminer les quantités $\mathbb{P}(X = x_i)$, pour $x_i \in \{-3, -1, 1, 3\}$.

Définition Soit X une v.a. discrète définie sur Ω et à valeurs dans $E = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. La loi de probablité de X est définie par la fonction: $p : E \mapsto [0, 1]$ telle que

$$p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}\big), \quad i = 0, 1, 2, \dots.$$

Exemple. Reprenons l'exemple introductif et calculons la loi de probabilité de X. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=-3) &= \mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega, X(\omega)=-3\}\big) = \mathbb{P}(\{\mathrm{FFF}\}) = 1/8 \\
\mathbb{P}(X=-1) &= \mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega, X(\omega)=-1\}\big) = \mathbb{P}(\{\mathrm{FFP},\mathrm{FPF},\mathrm{PFF}\}) = 3/8 \\
\mathbb{P}(X=+1) &= \mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega, X(\omega)=+1\}\big) = \mathbb{P}(\{\mathrm{PFP},\mathrm{PPF},\mathrm{FPP}\}) = 3/8 \\
\mathbb{P}(X=+3) &= \mathbb{P}\big(\{\omega\in\Omega, X(\omega)=+3\}\big) = \mathbb{P}(\{\mathrm{PPP}\}) = 1/8
\end{aligned}$$

Remarque: $\mathbb{P}(X=-3)+\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=3)=1$. De façon générale: si X est une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_1, \ldots,$ alors la fonction $\mathbb{P}_X : E=\{x_0,x_1,\ldots\} \mapsto [0,1]$, définie par

$$\mathbb{P}_X(\{x_i\}) = p(x_i) = \mathbb{P}(X=x_i)$$

est une probabilité sur E. On a en particulier

$$\mathbb{P}_X(E) = \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}_X(\{x_i\}) = \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=x_i) = 1. \tag{1}$$

Le résultat précédent permet, une fois que la loi de probabilité de X est donnée, de travailler directement avec la probabilité $\mathbb{P}_X$ plutôt qu'avec $\mathbb{P}$.

EXEMPLE. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$ telle que

$$p(i) = \mathbb{P}_X(\{i\}) = \mathbb{P}(X = i) = c\frac{\lambda^i}{i!}, \qquad c > 0,\ i = 0, 1, 2, \dots$$

1. Déterminer la constante de normalisation c pour que $\mathbb{P}_X$ soit une probabilité.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

Réponse. 1. On $1 = \sum_{i=0}^{+\infty} p(i) = c \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = c\, e^{\lambda}$. Donc, $c = e^{-\lambda}$. 2. $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}$ et $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-\lambda}$.

Plan

Fonction de répartition

◇ Soit l'exemple du jeu de Pile-Face où le gain cumulé X est t.q.

$$\mathbb{P}(X=-3)=1/8, \mathbb{P}(X=-1)=3/8, \mathbb{P}(X=+1)=3/8,\ \mathbb{P}(X=+3)=1/8$$

◇ Probabilité de perdre la partie à l'issu des 3 lancers: $\mathbb{P}(X<0)$?

◇ X est négatif si et seulement si $X=-3$ ou $X=-1$:

$$\begin{aligned} \{\omega\in\Omega, X(\omega)\leq 0\} &= \{\omega\in\Omega, X(\omega)=-1 \text{ ou } X(\omega)=-3\} \\ &= \{\omega\in\Omega, X(\omega)=-1\}\cup\{\omega\in\Omega, X(\omega)=-3\}. \end{aligned}$$

◇ Par conséquent, on a

$$\mathbb{P}(X\leq 0)=\mathbb{P}(X=-3)+\mathbb{P}(X=-1)=1/2.$$

◇ En général, on peut calculer proba. que le gain cumulé X ne dépasse pas un montant $x\in\mathbb{R}$: $\mathbb{P}(X\leq x)$.

◇ La fonction $x\mapsto\mathbb{P}(X\leq x)$ donne la répartition de notre richesse à l'issu des 3 lancers et est appelée *fonction de répartition.*

Définition. Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue). Alors, la fonction

$$\begin{array}{rcl} F_X: & \mathbb{R} & \mapsto [0,1] \\ & x & \mapsto F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \end{array}$$

est appelée *fonction de répartition* de X. On la notera parfois F.

REMARQUE. Noter que la fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$. Il ne faut donc pas oublier de la déterminer pour toute valeur x de $\mathbb{R}$.

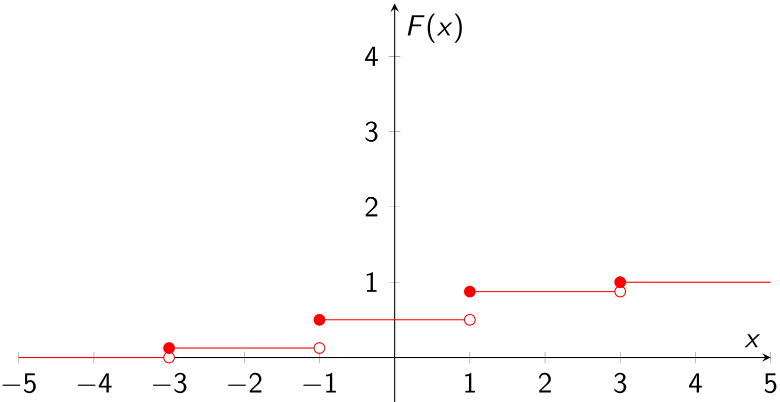
Définition. Lorsque X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_1, x_2, \dots\}$, la fonction de répartition s'écrit

$$F(x) = \sum_{i : x_i \leq x} \mathbb{P}(X = x_i), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Exemple. Reprenons l'exemple introductif où X a pour loi

$$\mathbb{P}(X = -3) = 1/8,\ \mathbb{P}(X = -1) = 3/8,\ \mathbb{P}(X = +1) = 3/8,\ \mathbb{P}(X = +3) = 1/8.$$

1. Déterminons la fonction de répartition F de X.
2. Représenter la fonction $x \mapsto F(x)$.



Proposition

Soit X une v.a. de f.r. F. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. On a

1. $\mathbb{P}(X \leq x) = F(x)$ *et* $\mathbb{P}(X < x) = F(x_-)$.
2. $\mathbb{P}(X \geq x) = 1 - F(x_-)$ *et* $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$.
3. $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x_-)$.
4. $\mathbb{P}(x \leq X \leq y) = \mathbb{P}(X \in [x, y]) = F(y) - F(x_-)$.
5. $\mathbb{P}(x \leq X < y) = \mathbb{P}(X \in [x, y[) = F(y_-) - F(x_-)$.
6. $\mathbb{P}(x < X \leq y) = \mathbb{P}(X \in]x, y]) = F(y) - F(x)$.
7. $\mathbb{P}(x < X < y) = F(y_-) - F(x)$.

Exemple. Soit X une v.a. de fonction de répartition donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1/3 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 1/2 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \in [0, 1])$, $\mathbb{P}(X \in]0, 1])$, et $\mathbb{P}(X \in] - 1, 0[)$.

Réponse.1. La v.a. X est à valeurs aux points de discontinuité de F_X: $X \in E = \{-1, 0, 1\}$. Donc, $\forall x \notin E$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = -1) &= F_X(-1) - F_X(-1_-) = 1/3 - 0 = 1/3 \\
\mathbb{P}(X = 0) &= F_X(0) - F_X(0_-) = 1/2 - 1/3 = 1/6 \\
\mathbb{P}(X = 1) &= F_X(1) - F_X(1_-) = 1 - 1/2 = 1/2.
\end{aligned}$$

2. $\mathbb{P}(X \in [0, 1]) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = F(1) - F(0_-) = 2/3$

Théorème. Soit X une variable aléatoire discrète de f.r. F_X. Alors,

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$0 \leq F_X(x) \leq 1.$$
2. F_X est une fonction croissante.
3. F_X est une fonction continue à droite. C-à-d, $\forall x \in \mathbb{R}$, et pour toute suite (x_n) de nombres décroissante vers x, $\lim_{n \to +\infty} F_X(x_n) = F_X(x)$.
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
5. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Plan

Considérons le problème suivant qui consiste à déterminer le lieu optimal où une compagnie de transport ferrovière doit implanter une gare entre deux villes $\mathbb{V}_1$ et $\mathbb{V}_2$ selon le critère de proximité avec les voyageurs.

- Supposons que la compagnie souhaite implanter une nouvelle gare entre les deux villes $\mathbb{V}_1$ et $\mathbb{V}_2$ dont les nombres de voyageurs potentiels sont de n et m, respectivement.

- Supposons aussi que les voyageurs arrivent à la gare de façon aléatoire et que chaque voyageur i habite un endroit de coordonnée $x_i \in \mathbb{R}^2$ (par rapport à un repére quelconque).

- La compagnie souhaite trouver un lieu (le point $g^\star \in \mathbb{R}^2$) situé entre les deux villes (on suppose qu'elle n'a pas de contrainte sur le choix du lieu) où implanter la gare selon le critère de proximité avec les voyageurs.

- Autrement dit, elle souhaite trouver un point $g^\star$ entre les deux villes, dont la distance moyenne parcourue par l'ensemble des voyageurs au point $g^\star$ est la plus petite.
- Si nous notons $N = n + m$ et si, pour tout $g \in \mathbb{R}^2$, on définit la fonction ψ par

$$\psi(g) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x_i - g|^2, \text{ où } |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \text{ pour } z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$$

le point $g^\star$ doit donc être choisi de sorte que

$$\psi(g^\star) = \min_{g \in \mathbb{R}^2} \psi(g). \tag{3}$$

- En résolvant le problème d'optimisation (ψ est convexe de dérivée $\psi'(g) = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - g)$) du membre de droite de (3) on obtient

$$g^\star = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

• Enfin, si nous considérons une variable aléatoire X à valeurs dans $E = \{x_1, \dots, x_N\}$ de loi de probabilité $p(x_i) = \mathbb{P}_X(\{x_i\}) = \frac{1}{N}$, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on veut écrire que

$$g^\star = \sum_{i=1}^{N} x_i p(x_i) = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{E}(X),$$

où $\mathbb{E}(X)$ correspond à l'espérance mathématique de X.

Définition. Soit X une v.a. discrète à valeurs dans $E = \{x_0, x_1, \dots\}$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i p(x_i).$$

EXEMPLE. Soit l'exemple du jeu de Pile-Face où le gain X est une v.a.

$$\mathbb{P}(X = -3) = 1/8, \ \mathbb{P}(X = -1) = 3/8, \ \mathbb{P}(X = +1) = 3/8, \ \mathbb{P}(X = +3) = 1/8.$$

Le gain espéré à l'issu des 3 lancers est :

$$\mathbb{E}(X) = (-3) \times \mathbb{P}(X = -3) + (-1) \times \mathbb{P}(X = -1) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 3 \times \mathbb{P}(X = 3) = 0.$$

EXEMPLE. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$ telle que $p(i) = \mathbb{P}(X = i) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots$

On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} ip(i) = \sum_{i=0}^{\infty} ie^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}$.

Reprenons l'exemple du jeu de Pile-Face où le gain cumulé X a pour loi

$$\mathbb{P}(X = -3) = 1/8, \ \mathbb{P}(X = -1) = 3/8, \ \mathbb{P}(X = +1) = 3/8, \ \mathbb{P}(X = +3) = 1/8.$$

Comment calculer $\mathbb{E}(X^2)$ (ou $\mathbb{E}(f(X))$) en utilisant la loi de X? Par le Théorème de transfert !

Théorème. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \{x_1, x_2, \dots\}$. Alors, pour tout fonction réelle f on a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{+\infty} f(x_i)\mathbb{P}(X = x_i).$$

EXEMPLE. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots\}$ telle que $p(i) = \mathbb{P}(X = i) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^i}{i!}, \qquad i = 0, 1, 2, \dots$

On a $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$.

Reprenons l'exemple du jeu de Pile-Face où le gain cumulé X a pour loi

$$\mathbb{P}(X = -3) = 1/8, \ \mathbb{P}(X = -1) = 3/8, \ \mathbb{P}(X = +1) = 3/8, \ \mathbb{P}(X = +3) = 1/8.$$

Comment calculer $\mathbb{E}(X^2)$ (ou $\mathbb{E}(f(X))$) en utilisant la loi de X? Par le Théorème de transfert !

Théorème. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \{x_1, x_2, \dots\}$. Alors, pour tout fonction réelle f on a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x) \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{+\infty} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Exemple. Reprenons l'exemple du jeu de Pile-Face où le gain cumulé X a pour loi

$$\mathbb{P}(X=-3)=1/8,\ \mathbb{P}(X=-1)=3/8,\ \mathbb{P}(X=+1)=3/8,\ \mathbb{P}(X=+3)=1/8.$$

On a $\mathbb{E}(X^2)=(-3)^2\times\mathbb{P}(X=-3)+(-1)^2\times\mathbb{P}(X=-1)+1^2\times\mathbb{P}(X=1)+3^2\times\mathbb{P}(X=3)=9/8+3/8+3/8+9/8=3.$

Exemple. Soit $\lambda>0$ et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1,2,\dots\}$ telle que $p(i)=\mathbb{P}(X=i)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^i}{i!},\qquad i=0,1,2,\dots$

Plan

- On veut comparer les performances en Maths de 2 classes de Terminale C_1 et C_2, de n et m élèves, resp. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ les n notes de la classe C_1 et $\{y_1, \ldots, y_m\}$ celle de la classe C_2.
- Soit X et Y 2 v.a. à val. dans $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\{y_1, \ldots, y_m\}$, avec $\mathbb{P}(X = x_i) = 1/n,\ \forall i$ et $\mathbb{P}(Y = y_j) = 1/m,\ \forall j$.
- Une façon de comparer les 2 classes est de comparer leurs moyennes empiriques qui correspondent aux espérances de X et Y. Supposons maintenant que les moyennes des 2 classes sont toutes égales à $\bar{m}_{xy}$.
- La classe la plus performante est celle dont les notes sont réparties de façon plus homogène, c'est-à-dire, dont l'écart entre les notes est plus petit.
- Plusieurs façons de mesurer ces écarts. On utilise la distance quadratique moyenne entre les notes et la moyenne.

Définition

- $$\begin{bmatrix} x_1 - \bar{m}_{xy} \\ x_2 - \bar{m}_{xy} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ x_n - \bar{m}_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} y_1 - \bar{m}_{xy} \\ y_2 - \bar{m}_{xy} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ y_m - \bar{m}_{xy} \end{bmatrix}.$$

- On a donc,

$$e_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{m}_{xy})^2 = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^2\big]$$

$$\text{et} \qquad e_2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{m}_{xy})^2 = \mathbb{E}\big[(Y - \mathbb{E}(Y))^2.\big]$$

- La classe C_1 est plus performante en Maths que la classe C_2 si $e_1 < e_2$. Cet écart (au carré) à la moyenne introduite précédemment correspond à la notion de variance que nous définissons de façon plus générale dans ce qui suit.

Définition. Soit X une v.a. Alors la *variance* de X, notée $\mathrm{Var}(X)$, est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2.$$

On appelle *écart-type* de X et on note σ_X la racine carrée de la variance:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}. \tag{4}$$

EXEMPLE Reprenons l'exemple du jeu de Pile-Face et calculer $\mathrm{Var}(X)$: le gain cumulé X a pour loi

$$\mathbb{P}(X{=}-3){=}1/8,\ \mathbb{P}(X{=}-1){=}3/8,\ \mathbb{P}(X{=}+1){=}3/8,\ \mathbb{P}(X{=}+3){=}1/8.$$

EXEMPLE. Soit $\lambda > 0$ et soit X une v.a. à val. dans $\{0, 1, \dots\}$ tq

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Calculer la variance de X.

Voici quelques propriétés de l'espérance et de la variance.

Proposition

1. *Pour toute v.a. constante X:* $X(\omega) = c, \forall \omega \in \Omega$, *on a* $\mathbb{E}(X) = c$
2. *(Linéarité)* $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
3. *(Positivité) si* $X \leq Y$ *alors* $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
4. *Pour toute v.a.* X *on a* $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ *et* $\mathrm{Var}(c) = 0$ *pour tout réel* c.
5. *Soit* X *une v.a. Alors,* $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$.

REMARQUE. Attention: $\mathrm{Var}(X + Y)$ n'est pas forcément égale à $\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$. Mais ce sera le cas si X et Y sont indépendantes.

Plan

▷ Loi de Bernoulli. Expérience à 2 issues: succès de proba. d'apparition p, échec, de proba. d'apparition $q = 1 - p$. Si $X \sim \mathrm{Bern}(p)$, alors

$$\mathbb{P}(X = 1) = p; \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p,$$

et on a

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathrm{Var}(X) = p(1 - p).$$

Exemple. On csd l'expérience de lancer de dé équilibré. Soit X la v.a. qui vaut 1 lorsque la face 6 apparaît et 0 lorsque la face 6 n'apparaît pas. Déterminer la loi de X.

Réponse. Soit E l'événement que la face 6 apparaît. Il est clair que

$$\mathbb{P}(E) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E^c) = \frac{5}{6}.$$

Donc $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(E) = 1/6$ et $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(E^c) = 5/6$. D'où la v.a. X suit la loi de Bernouilli de paramètre $1/6$.

Lois usuelles: loi binomiale

Loi binomiale. C'est la loi du nombre de succès à l'issue de n épreuves ind. de Bernoulli de paramètre p. Si $X \sim B(n, p)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Une v.a. $X \sim B(n, p)$ peut être représentée par

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

où les X_i, $i = 1, \ldots, n$, sont de v.a. indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre p. Donc,

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Exemple. On lance 10 fois, une pièce de monnaie équilibrée. Soit X la v.a. qui compte de nombre de Pile. Alors $X \sim B(10, 1/2)$.

Lois discrètes

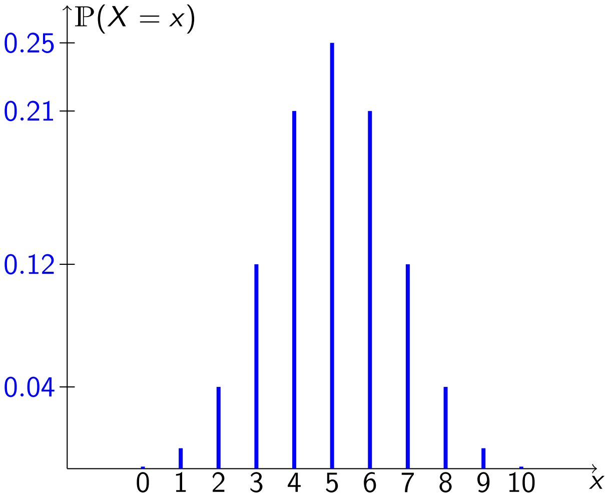


Figure: Loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 1/2$.

Lois discrètes: loi de Poisson

Loi de Poisson. Elle modélise les résultats d'expériences aléatoires dans lesquelles on compte le nombre d'événements qui se produisent pour une unité de temps ou de volume donnée, à un taux moyen fixé. Si λ désigne le nombre moyen d'occurrences par unité de temps ou de volume fixée, X suit une loi de Poisson de paramètre λ si sa loi est déterminée par

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

C'est la proba. qu'il se produise k occurrences pour l'unité de temps ou de volume donnée. On a

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

La loi de Poisson peut être vue comme une approximation de la loi binomiale de paramètres n et p lorsque $p \leq 0.1$ et $n \geq 40$ ou lorsque $np < 5$.

Lois discrètes: loi de Poisson

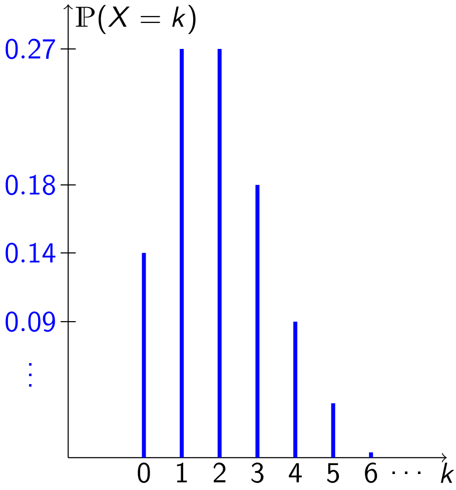


Figure: Loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.

Loi géométrique. On renouvelle une épreuve de $\mathrm{Bern}(p)$, de façon ind., jusqu'à l'obtention du premier succès. La v.a. X donnant le rang du premier succès suit une loi géométrique de paramètre de succès p. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$,

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \dots$$

On a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple. On lance (de façon indépendante) un dé équilibré de façon répétée jusqu'à l'apparition de 6. Soit X la v.a. qui donne le rang du lancer auquel apparaît 6 pour la première fois. Alors

$$X \sim \mathcal{G}(1/6).$$

Lois discrètes: loi géométrique

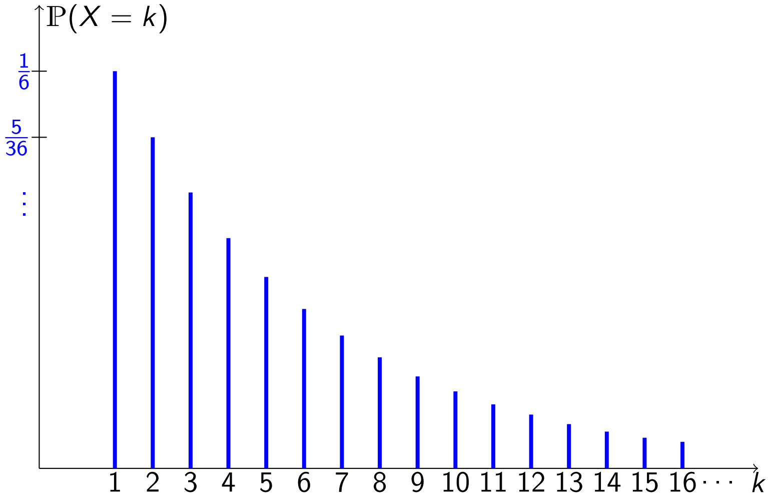


Figure: Loi géometrique de paramètre de succès $p = 1/6$.