Université d'Évry-Val-d'Essonne — Mathématiques 3
L2 économie-gestion — Année 2017-2018

Devoir Surveillé – 6 décembre 2017 – Corrigé

Questions de cours

1. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux : $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
2. λ est une valeur de propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
3. Un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ est un vecteur non nul tel que $AX = \lambda X$.
4. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux : $\mathrm{Sp}A = \{a_{i,i}\}_{i=1}^{n}$.
5. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs de propres de A, ou encore il existe $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exercice 1

1. On obtient la raison (arithmétique) de (u_n) : $r = \frac{u_{10}-u_2}{10-2} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$.
Et $u_0 = u_2 - 2r = 2$. Finalement : $u_n = u_0 + n\,r = 2 - \frac{n}{2}$.
2. On obtient la raison (géométrique) de (u_n) : $r = \left(\frac{u_4}{u_1}\right)^{\frac{1}{4-1}} = \left(-\frac{81}{3}\right)^{1/3} = -27^{1/3} = -3$.
Et $u_0 = \frac{u_1}{r} = \frac{1}{5}$. Finalement : $u_n = u_0\, r^n = \frac{1}{5}(-3)^n$.

Exercice 2

1. On résout en α, $v_{n+1} = 3v_n = 3(u_n - \alpha) = u_{n+1} - \alpha = 3u_n - 1 - \alpha$.
Soit $-3\alpha = -1 - \alpha$ et $\alpha = 1/2$.
2. Comme $v_0 = u_0 - \alpha = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = v_0\, 3^n = \frac{3}{2}\, 3^n$.
3. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \alpha = \frac{3}{2}\, 3^n + \frac{1}{2}$.

Exercice 3

1. En utilisant la somme partielle d'une série géométrique : $S = \frac{M}{\tau}\left((1+\tau)^n - 1\right)$.
2. On rappelle comment la valeur acquise intervient dans le calcul d'amortissement d'un prêt. Notons u_n le capital restant dû au mois n : $u_0 = X$ et $u_{n+1} = (1+\tau)u_n - M$ avec $M = 1000$€.
On somme les égalités
$$(1+\tau)^{n-i}u_i = (1+\tau)^{n-i-1}u_{i-1} - (1+\tau)^{n-i}M \quad \text{pour} \quad i \in [\![1, n]\!],$$
pour obtenir deux séries télescopiques. On obtient :
$$u_n = (1+\tau)^n X - M\sum_{i=0}^{n-1}(1+\tau)^i = (1+\tau)^n X - \frac{M}{\tau}\left((1+\tau)^n - 1\right).$$
Ainsi, en considérant que le prêt est amorti en 240 mensualités, X est solution de $u_{240} = 0$, qu'on peut encore écrire $(1+\tau)^n X = S$. On obtient :
$$X = \frac{M}{\tau}\left(1 - (1+\tau)^{-240}\right) = \frac{10^3}{2.5\,10^{-3}}(1 - 0.5492 + \varepsilon) = 4 \times (0.4508 + \varepsilon) \times 10^5 = 180320 + 4\varepsilon\, 10^5$$
où $|\varepsilon| < 10^{-4}$. Ainsi $X \simeq 180320$ € à 40 € près.
3. Le coût du crédit s'élève donc à $240M - X = 240000 - 180320 = 59680$ €.

Exercice 4 1. On vérifie $f(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) = f(x_1, y_1) + \lambda f(x_2, y_2)$.

2. $M = Mat(f, \underline{can}, \underline{can}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. N'importe quelle matrice 2×2 extraite de M admet un déterminant non nul, d'où $\text{rg}f \geqslant 2$ et majorée par le nombre de colonnes, d'où $\text{rg}f = 2$. A l'aide du théorème du rang, on obtient $\dim(\text{Ker } f) = 0$ et $\text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. On en déduit que f est injective.

4. En résolvant $AX = {}^t(a, b, c)$, on obtient, avec la dernière ligne, la contrainte $b + 7a + a = c$ soit $8a + b - c = 0$. Im f est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension $\text{rg}f = 2$, donc un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

5. Par définition, la famille des images par f des vecteurs e_1, e_2 de la base canonique de l'espace de départ est par définition génératrice de Im f. Ces deux vecteurs forment donc une base de ce s.e.v. de dimension 2.

6. On remarque immédiatement que $v_3 \notin \text{Im } f$ puisque ses coordonnées ne vérifie pas la condition obtenue au 4. Ainsi v_3 complète la base (v_1, v_2) de Im f en une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi $\text{Vect}\{v_3\} \bigoplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$. On peut aussi calculer le déterminant de la matrice $(v_1\, v_2\, v_3)$.

7. Le déterminant de la matrice formée par les vecteurs e'_1 et e'_2 vaut 2. Ils constituent donc une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

8. $e'_1 = e_1 - e_2$ et $e'_2 = e_1 + e_2$. Ainsi, par linéarité, $f(e'_1) = f(e_1) - f(e_2) = v_1 - v_2$ et $f(e'_2) = f(e_1) + f(e_2) = v_1 + v_2$.

9. En utilisant la construction de la matrice représentative de f et les résultats de la question précédente : $Mat(f, \underline{e'}, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 1. e'_1 et e'_2 ne sont pas colinéaires. La famille $(e'_1\, e'_2)$ est donc libre et formée de deux vecteurs, et est donc une base de $\mathbb{R}^2$. Le calcul direct montre $Ae'_1 = e'_1$ et $Ae'_2 = \frac{1}{3}e'_2$. Ainsi :

$$B = Mat(f, (e'_1\, e'_2), (e'_1\, e'_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2. $\det P = -4 \neq 0$ et P est donc inversible. On obtient $P^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Par le calcul direct :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = B \end{array}$$

Par récurrence : $B = P^{-1}AP$ d'après ce qui précède. En supposant $B^n = P^{-1}A^nP$, on obtient $B^{n+1} = B^nB = P^{-1}A^nPP^{-1}AP = P^{-1}A^nAP = P^{-1}A^{n+1}P$ ce qui achève la démonstration par récurrence.
Comme $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$, on en déduit $A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{3}{2}3^{-n} & 1 - 3^{-n} \\ -\frac{15}{4} + \frac{15}{4}3^{-n} & -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}3^{-n} \end{pmatrix}$

4. Pour tout n, $u_{n+1} = Au_n$. Par récurrence évidente, on a $u_n = A^nu_0$.

5. On en déduit :

$$\begin{cases} x_n = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}3^{-n}\right)x_0 + \left(1 - 3^{-n}\right)y_0 \\ y_n = \left(-\frac{15}{4} + \frac{15}{4}3^{-n}\right)x_0 + \left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{2}3^{-n}\right)y_0 \end{cases}$$