Université d'Évry-Val-d'Essonne — Mathématiques 3
L2 économie-gestion — Année 2018-2019

Examen Session 1 – 14 janvier 2019 – Durée : 2h00

Documents et appareils électroniques interdits.

Questions de cours

1. Donner la forme cartésienne du quotient complexe $\frac{a+ib}{c+id}$ où a, b, c, d sont des réels (c ou d non nul).
2. Donner la définition de : $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
3. Donner la définition d'une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Donner la définition d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1 On considère le polynôme $P(x) = x^2 + 2\sqrt{3}x + 4$. On note $z_1 = r_1 \mathrm{e}^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 \mathrm{e}^{i\theta_2}$ les racines complexes de P avec $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\theta_1 \in [0, \pi]$ et $\theta_2 \in [-\pi, 0]$.

1. Donner les formes cartésiennes de z_1 et z_2.
   Représenter les points d'affixe z_1 et z_2 dans un repère plan orthonormé.
2. Donner les formes polaires de z_1 et z_2, et en déduire r_1, r_2, θ_1, θ_2.
   Quelle relation lie r_1 et r_2 ? Quelle relation lie θ_1 et θ_2 ?
3. Exprimer z_1^2 en fonction de z_1 ?
   En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, l'expression de z_1^n en fonction de z_1^{n-1} et z_1^{n-2}.
4. En utilisant la formule de Moivre, trouver $R(n)$ et $\alpha(n)$ fonctions de n tels que
$$z_1^n = R(n)\cos(\alpha(n)) + iR(n)\sin(\alpha(n)).$$
5. En déduire la forme cartésienne de z_2^n en fonction de $R(n)$, $\cos(\alpha(n))$ et $\sin(\alpha(n))$?

Exercice 2 Pour chacun des sous-ensembles suivants, préciser s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel et, dans ce cas, donner <u>sa dimension</u> et <u>une base</u>. Les réponses devront être rigoureusement justifiées.

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x + i\,y = \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right\}.$$

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad |x + i\,y| = 1\right\}.$$

$$C = Vect\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 3 Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+y, x-2y, 2x+y)$.

1. Justifier que f est linéaire en donnant la matrice représentative A de f dans les bases canoniques.
2. Montrer que Im $f = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 5a+b-3c=0\}$.
   Quelle est la structure de cet ensemble ?
3. Quel est le rang de f ? En déduire dim (Ker f) et l'équation de Ker f.
   En déduire si f est injective, surjective ou bijective.
4. Calculer $v_1 = f(1,0)$, et $v_2 = f(0,1)$. Montrer que (v_1, v_2) est une base de Im f.
5. Soient $v_3 = (5,1,-3)$ et $F = Vect\{v_3\}$. Montrer que $F \bigoplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$.
   En déduire une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que les vecteurs $e'_1 = (1,-1)$ et $e'_2 = (1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
7. Donner les expressions de $f(e'_1)$ et de $f(e'_2)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3.
8. Donner la matrice représentative de f dans les bases (e'_1, e'_2) au départ et (v_1, v_2, v_3) à l'arrivée.

Exercice 4 On considère la matrice A et le vecteur u écrit dans la base canonique $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 22 & -16 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & -10 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le produit Au.
2. Que peut-on en déduire concernant l'inversibilité de A ?
   Que peut-on en déduire concernant le spectre de A ?
   Que représente le vecteur u pour A ?
3. Calculer le polynôme caractéristique de A et calculer le spectre de A ?
4. A est-elle diagonalisable ? Quel est le rang de A ?
5. Trouver v non nul appartenant à Ker $(A - I_3)$ et w non nul appartenant à Ker $(A - 2I_3)$.
   Note : pour faciliter les calculs suivants, on choisira v et w à coefficients entiers.
6. Justifier que (u, v, w) est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.
   Ecrire la matrice de passage $P = Pass_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ de la base canonique $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.
7. Calculer l'inverse de P.
8. Que vaut $P^{-1}AP$.