Examen – 11 janvier 2018 – Durée : 2h00

Documents et appareils électroniques interdits.

Questions de cours

1. Soit une suite géométrique (u_n) de raison r. Exprimer $\sum_{i=p}^{q} u_i$ en fonction de p, q, u_p et r.
2. Donner la définition d'une famille de vecteurs $(u_i)_{i=1}^{p}$ génératrice d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$.
3. Enoncer le théorème du rang pour une application linéaire $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
4. Donner la définition du polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible. Quelle valeur propre particulière admet-elle ?

Exercice 1 Déterminer les termes généraux u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ sachant que

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique telle que $u_2 = 1$ et $u_8 = 3$,
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique telle que $v_1 = -1$ et $v_6 = 32$.

Exercice 2 Un client contracte auprès d'une banque un prêt d'un montant de X € au taux fixe annuel de $12\tau = 3\%$. Pour rembourser ce prêt sur 10 ans, le client doit payer 120 mensualités constantes de M € chacune. On note u_n le capital restant dû après versement de la n-ème mensualité (et $u_0 = X$).

1. Quelle est la **relation de récurrence** vérifiée par la suite u_n.
   Quelle est la condition d'amortissement du prêt ?
2. Trouver un réel a, dépendant de M et τ, tel que la suite définie par $v_n = u_n + a$ pour tout n soit une suite géométrique.
3. Donner le terme général v_n en fonction de n, M, X et τ.
   En déduire le terme général u_n en fonction de n, M, X et τ.
4. Utiliser la condition d'amortissement du prêt pour exprimer M en fonction de X et τ.
5. Donner, en fonction de M, τ et n, la valeur acquise par la capitalisation des mensualités jusqu'au mois n définie par $S_n = M \sum_{i=0}^{n-1} (1+\tau)^i$.
6. Utiliser la valeur acquise finale pour calculer le montant X du prêt en fonction de M et τ.
7. Montrer que pour cette valeur de X, on retrouve bien la condition d'amortissement $u_{120} = 0$.

Exercice 3 Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (2x+y, x, -x+y)$.

1. Justifier que f est linéaire.
2. Donner la matrice représentative A de f dans les bases canoniques.
3. Quel est le rang de f ? En déduire dim (Ker f) et Ker f.
   En déduire si f est injective, surjective ou bijective.
4. Montrer que Im $f = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a-3b-c = 0\}$. Quelle est la structure de cet ensemble ?
5. Soient $v_1 = f(1,0)$, et $v_2 = f(0,1)$. Justifier que (v_1, v_2) est une base de Im f.
6. Soient $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $F = Vect\{v_3\}$. Justifier que $F \bigoplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$.
   En déduire une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$.
7. Montrer que les vecteurs $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
8. Donner les expressions de $f(e'_1)$ et de $f(e'_2)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3.
9. Donner la matrice représentative B de f dans les bases (e'_1, e'_2) au départ et (v_1, v_2, v_3) à l'arrivée.

Exercice 4 Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Quelles sont les valeurs propres de A. Pour quelle raison sait-on que A est inversible ?
   Pour quelle raison sait-on que A est diagonalisable ?
2. On note $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Justifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que u et v sont des vecteurs propres de A et préciser la valeur propre associée pour chaque vecteur.
4. Justifier que $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice représentative de φ dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.
5. Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1}.
6. Calculer $B = P^{-1}AP$.
7. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Soient les suites réelles (x_n) et (y_n) définies par leur premier terme x_0, y_0 et la relation de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n + 3y_n, \\ y_{n+1} &= -x_n - 2y_n. \end{cases}$$
   Exprimer le vecteur $u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ à l'aide de A, n et u_0.
9. Déduire de la question précédente les termes généraux x_n et y_n en fonction de n, x_0, y_0.