Corrigé du Devoir Surveillé n^{o}1

Questions de cours

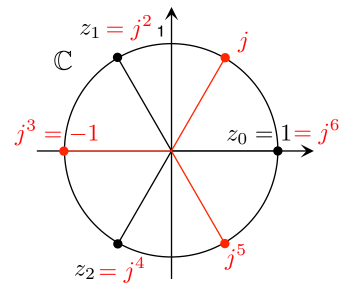
1. Si $z = re^{i\theta}$, alors $\overline{z} = re^{-i\theta}$.
2. Les n racines n-ème de l'unité sont $\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}} | k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.
3. $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ si, pour $(\lambda_i)_{i=1}^p \in \mathbb{R}^p$,
$$\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0.$$
4. Un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ tel que
$$\forall u \in E, \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad u + \lambda v \in E.$$

Exercice 1 On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Soit $Z = \dfrac{z_2}{z_1}$.

1. On a
$$Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} = \frac{(1 + i\sqrt{3})}{(1 + i)}\frac{(1 - i)}{(1 - i)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i\frac{(\sqrt{3} - 1)}{2}.$$
2. $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$. D'où
$$Z = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{12}}.$$
3. En identifiant la forme cartésienne obtenue en 1. et celle résultant de la forme polaire obtenue en 2., on a :
$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \\ \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1), \\ \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1). \end{cases}$$

Exercice 2 On note $z_0 \in \mathbb{R}$, z_1 et z_2 les trois solutions complexes de $z^3 = 1$.

1. $z_0 = 1 (= e^{i.0})$, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
2. En utilisant
$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$
$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
on en déduit
$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
On a donc $\overline{z_2} = z_1$.



3. Voir Figure ci-contre (points noirs)
4. $z_0 + z_1 + z_2 = 0$.
5. $j = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, c'est-à-dire une racine carrée de z_1, soit encore une racine 6-ème de l'unité, soit encore une racine 3-ème de -1 (voir Figure ci-contre, points rouges).
   Si k est impair, $\quad j^{3k} = -1, \quad j^{3k+1} = z_2, \quad j^{3k+2} = \overline{j}$.
   Si k est pair, $\quad j^{3k} = 1, \quad j^{3k+1} = j, \quad j^{3k+2} = z_1$.
6. D'après ce qui précède, pour tout k :
   si k est impair, $\quad j^{3k} + j^{3k+1} + j^{3k+2} = -1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$;
   si k est pair, $\quad j^{3k} + j^{3k+1} + j^{3k+2} = 1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$.
   La somme de 6 termes successifs de la somme à calculer est donc nulle. La somme débute par $n = 0$ (soit $3p$ avec $p = 0$ pair) donc : si k est impair, il y a un multiple de 6 termes dans la somme qui vaut donc 0 ; si k est pair, il reste les 3 derniers termes obtenus avec $n \in \{3k, 3k+1, 3k+2\}$ avec k pair, soit :
$$\sum_{n=0}^{3k+2} j^n = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ 1 + i\sqrt{3} & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Exercice 3 Le discriminant de la 1ère équation est $\Delta = 4 - 8 = -4$. On en déduit les solutions : $-1 + i$ et $-1 - i$.

Le discriminant de la 2nde équation est $\Delta = (2i)^2 + 4i\sqrt{3} = 4(-1 + i\sqrt{3}) = 8\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ dont les racines carrées sont $\delta_\pm = \pm 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. (Remarque : On peut également résoudre $\delta^2 = (a + ib)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = 4(-1 + i\sqrt{3})$, soit $a^2 - b^2 = -4$ et $2ab = 4\sqrt{3}$). Les solutions s_1 et s_2 sont donc :
$$s_1 = \frac{-2i + 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = -i + \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} - 1\right),$$
$$s_2 = \frac{-2i - 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = -i - \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + 1\right).$$

Exercice 4 Simplifions la description de A :
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \mathrm{e}^x = \frac{1}{\mathrm{e}^{2y}}\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \mathrm{e}^{x+2y} = 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y = 0\right\}.$$
A est donc l'hyperplan de $\mathbb{R}^2$ normal au vecteur $(1, 2)$: c'est donc un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

B n'est pas un s.e.v. puisqu'il ne contient pas le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$.

C n'est pas un s.e.v. puisque $u = (2, 0) \in C$ et pour $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, $\lambda u = (1, 0) \notin C$.

D n'est pas un s.e.v. puisque $u = (1, 0) \in D$ et $-u = (-1, 0) \notin D$.

Simplifions la description de E : $(x, y) \in E$ si et seulement si
$$\begin{cases} xy = 0, \\ x = -2y, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 0, \\ x = -2y, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$
D'où E est le s.e.v. trivial de $\mathbb{R}^2$ réduit au vecteur nul.