Université d'Évry-Val-d'Essonne — Mathématiques 3
L2 économie-gestion — Année 2017-2018

Devoir Surveillé – 6 novembre 2017 – Corrigé

Questions de cours

1. Si, pour tout i, $u_{i+1} = r\, u_i$, alors $\sum_{i=0}^{N} u_i = u_0 \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$.
2. La famille $(u_i)_{i=1}^n$ est dite libre ssi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Longrightarrow \forall i, \lambda_i = 0$.
3. Si $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$ est inversible, alors Ker $\varphi = \{0\}$ et Im $\varphi = \mathbb{R}^n$?
4. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de rang r alors dim (Ker A) $= p - r$.
5. $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si $\exists Q \in Gl_n(\mathbb{R}), \exists P \in GL_p(\mathbb{R}), B = Q^{-1}AP$.
   Elles sont semblables si, de plus, on peut choisir $P = Q$ (et donc nécessairement $n = p$).

Exercice 1

1. Les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont définies par les récurrences suivantes :

$$\begin{cases} a_0 = I, \\ a_{n+1} = (1+\tau)a_n. \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = I, \\ b_{n+1} = b_n. \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 = J, \\ c_{n+1} = (1+\tau)c_n + d. \end{cases}$$

2. La suite (a_n) est géométrique, la suite (c_n) est arithmético-géométrique. La suite (b_n) est constante égale à I.
3. Au 2 février 2022, le 2nd client aura récupéré les intérêts (constants chaque année égaux à τI) pendant 2022-2018+1 = 5 années, soit un total $5\tau I = 5 \times 0.0193 \times 10^4 = 965$ €.
4. Pour tout n, $a_n = I(1+\tau)^n$.
5. Au 2 février 2027 (soit après 10 ans complets d'exercice), le capital du 1er client sera

$$a_{10} = I(1+\tau)^{10} = 10\,(1.0193)^{10} = 10\,((1.0193)^5)^2 \simeq 10\,(1.1)^2 = 12.1 \text{ k€}.$$

6. On cherche λ tel que, pour tout n, $v_{n+1} = (1+\tau)v_n$. Soit encore

$$c_{n+1} + \lambda = (1+\tau)(c_n + \lambda) = (1+\tau)c_n + d + \lambda$$

   d'après la relation de récurrence vérifiée par c_n. On choisit donc λ tel que $(1+\tau)\lambda = d + \lambda$ et donc $\lambda = \frac{d}{\tau}$.

7. On a $v_0 = J + \frac{d}{\tau}$ et, pour tout n,

$$v_n = \left(J + \frac{d}{\tau}\right)(1+\tau)^n \quad \text{et} \quad c_n = \left(J + \frac{d}{\tau}\right)(1+\tau)^n - \frac{d}{\tau}.$$

8. Au 2 février 2027 (soit après 10 ans complets d'exercice), le capital du 3ème client sera

$$c_{10} \simeq (8000 + 15545)(1.1)^2 - 15545 = 8000 \times 1.21 + 15545 \times 0.21 = 12944.45\text{€}.$$

   (Pour information, une approximation au centime de c_{10} est 12959.65 €).

9. On veut trouver le premier entier n tel que $c_n \geqslant G = 14000$. On résout

$$\left(J + \frac{d}{\tau}\right)(1+\tau)^n - \frac{d}{\tau} \geqslant G$$

et on obtient :

$$n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{G\tau+d}{J\tau+d}\right)}{\ln(1+\tau)}.$$

Exercice 2

1. L'ensemble $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = z\}$ est à l'évidence un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ puisque (i) il contient $0_{\mathbb{R}^3}$ et (ii) si $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a immédiatement $u + \lambda v \in E$. Tout vecteur (x,y,y) de E s'écrit de manière unique $xf_1 + yf_2$. (f_1, f_2) est donc une base de E.
2. $G(x,y,z) = x + 2y + 3z$ et $C(x,y,z) = -y - 2z$.
3. $\varphi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.
4. $Mat(\varphi, \underline{can}, \underline{can}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
5. $\varphi(4,5,2) = \begin{pmatrix} 4+10+6 \\ 0-5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\varphi(0,1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs non nuls ne sont pas colinéaires et forment donc une base de $\mathbb{R}^2$.
6. On résout le système $\varphi(x,y,1) = 0_{\mathbb{R}^2}$, soit
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3 & = & 0 \\ & - & y & - & 2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \end{array}\right.$$
7. Montrons que (u,v,w) est une famille libre en considérant $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$:
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4\alpha & & & + & \gamma & = & 0 \\ 5\alpha & + & \beta & - & 2\gamma & = & 0. \\ 2\alpha & & & + & \gamma & = & 0 \end{array}\right.$$
En soustrayant la 3ème équation à la première, on obtient $2\alpha = 0$ soit $\alpha = 0$ puis $\gamma = 0$ (d'après la 1ère ou la 3ème équation) et enfin $\beta = 0$ (d'après la 2nde équation).
Une famille de 3 vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8. F ne contient pas 0 et ne peut donc pas être un s.e.v. Par contre, $F = 1000u + \mathbb{R}.w$ est un sous-espace affine de dimension 1 (droite passant par $1000u$ et portée par $\mathrm{Vect}\{w\}$).
9. Par calcul direct ou en utilisant la linéarité de φ, on obtient :
$\varphi(4000+\lambda, 5000-2\lambda, 2000+\lambda) = 1000\,\varphi(4,5,2) + \lambda\varphi(1,-2,1) = 1000\begin{pmatrix} 20 \\ -9 \end{pmatrix}$.
10. $T = \psi \circ \varphi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $T(x,y,z) = G(x,y,z) + C(x,y,z) = x + y + z$.
11. On peut vérifier et calculer directement. On peut également remarquer qu'il s'agit de $\mathrm{Ker}\, T$, qui est un s.e.v. d'après le cours. De plus, $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ est non identiquement nulle donc de rang 1. Le théorème du rang montre que $\dim \mathrm{Ker}\, T = 3 - 1 = 2$.
Par exemple $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}\, T$.