

## Devoir Surveillé – 23 octobre 2018 – Durée : 1h30

Documents et appareils électroniques interdits.

### Questions de cours

1. Quel est, sous forme polaire, le conjugué du nombre complexe  $re^{i\theta}$  ?
1. Donner TOUTES les racines  $n$ -ème de l'unité.
1. Donner la définition de : “ $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  est une famille libre de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ”.
1. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel  $E$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 1** On considère les nombres complexes  $z_1 = 1 + i$  et  $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ . Soit  $Z = \frac{z_2}{z_1}$ .

1. Donner la forme cartésienne de  $Z$ .
1. Donner la forme polaire de  $Z$ .
2. En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

**Exercice 2** On note  $z_0 \in \mathbb{R}$ ,  $z_1$  et  $z_2$  les trois solutions complexes de  $z^3 = 1$ .

1. Donner les formes polaires de  $z_0$ ,  $z_1$  et  $z_2$ .
2. Donner leur forme cartésienne. Que dire de  $\overline{z_2}$  ?
1. Placer les images de  $z_0$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  dans un repère orthonormé du plan.
1. Calculer  $z_0 + z_1 + z_2$ .
2. On note  $j = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Que valent  $j^{3k}$ ,  $j^{3k+1}$ ,  $j^{3k+2}$  ?
3. Déduire des questions précédentes la valeur de  $\sum_{n=0}^{3k+2} j^n$ .

**Exercice 3** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$z^2 + 2z + 2 = 0;$$

$$z^2 + 2iz - i\sqrt{3} = 0.$$

**Exercice 4** Pour chacun des sous-ensembles suivants, préciser s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel et justifier rigoureusement la réponse.

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^x = \frac{1}{e^{2y}} \right\}.$$

$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 1 \}.$$

$C$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  dont la somme des composantes est un entier pair.

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0 \}.$$

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \text{ et } x = -2y \}.$$