

Examen session 2 – 27 juin 2018 – Durée : 2h00

Documents et appareils électroniques interdits.

Questions de cours

1. Soit une suite arithmétique (u_n) de raison r . Exprimer $\sum_{i=p}^q u_i$ en fonction de p , q , u_p et r .
2. Donner la définition d'une famille libre $(u_i)_{i=1}^p$ de vecteurs de \mathbb{R}^n .
3. Donner la définition du noyau d'une application linéaire $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
A quel espace appartiennent ses éléments ?
4. Donner la définition d'un vecteur propre d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'admettant aucune valeur propre nulle. Que vaut $\text{Im } A$?

Exercice 1 Déterminer les termes généraux u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ sachant que

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique telle que $u_2 = 3$ et $u_8 = 1$,
2. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique telle que $v_1 = -2$ et $v_4 = 16$.

Exercice 2 Le client d'une banque ouvre un compte épargne rémunéré au taux fixe annuel de $12\tau = 1,2\%$ avec un montant initial de X €. Les intérêts sont versés tous les mois et, tous les mois pendant 10 ans, il verse M € supplémentaires sur ce compte. On note u_n l'épargne disponible au mois n (avec $u_0 = X$).

1. Quelle est la **relation de récurrence** vérifiée par la suite u_n .
Quelle est la condition finale pour que le client ait une épargne de $E = 10000$ € au bout de 10 ans.
2. Trouver un réel a , dépendant de M et τ , tel que la suite définie par $v_n = u_n + a$ pour tout n soit une suite géométrique.
3. Donner le terme général v_n en fonction de n , M , X et τ .
En déduire le terme général u_n en fonction de n , M , X et τ .
4. En utilisant la condition finale du 1., exprimer la mensualité M en fonction de X , E et τ pour que le client ait une épargne de E € au bout de 10 ans.
5. Donner, en fonction de M , τ et n , la valeur acquise par la capitalisation des mensualités de M € jusqu'au mois n définie par $S_n = M \sum_{i=0}^{n-1} (1 + \tau)^i$.
6. En utilisant la valeur acquise au bout de 10 ans, calculer, en fonction de M et τ , le montant initial X pour que le client ait une épargne de $E = 10000$ € au bout de 10 ans.
7. Montrer que pour cette valeur de X , on retrouve bien la condition $u_{120} = E$.

Exercice 3 Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 définie par $f(x, y) = (x + 2y, y, x - y)$.

1. Justifier que f est linéaire.
2. Donner la matrice représentative A de f dans les bases canoniques.
3. Quel est le rang de f ? En déduire $\dim(\text{Ker } f)$ et $\text{Ker } f$.
En déduire si f est injective, surjective ou bijective.
4. Montrer que $\text{Im } f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - 3b - c = 0\}$. Quelle est la structure de cet ensemble?
5. Soient $v_1 = f(1, 0)$, et $v_2 = f(0, 1)$. Justifier que (v_1, v_2) est une base de $\text{Im } f$.
6. Soient $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $F = \text{Vect}\{v_3\}$. Justifier que $F \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$.
En déduire une nouvelle base de \mathbb{R}^3 .
7. Montrer que les vecteurs $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de \mathbb{R}^2 .
8. Donner les expressions de $f(e'_1)$ et de $f(e'_2)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3 .
9. Donner la matrice représentative B de f dans les bases (e'_1, e'_2) au départ et (v_1, v_2, v_3) à l'arrivée.

Exercice 4 Soit φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Quelles sont les valeurs propres de A . Pour quelle raison sait-on que A est inversible?
Pour quelle raison sait-on que A est diagonalisable?
2. On note $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Justifier que (u, v) est une base de \mathbb{R}^2 .
3. Montrer que u et v sont des vecteurs propres de A et préciser la valeur propre associée pour chaque vecteur.
4. Justifier que $\mathcal{B} = (u, v)$ est une base de \mathbb{R}^2 et donner la matrice représentative de φ dans la base \mathcal{B} au départ et à l'arrivée.
5. Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base \mathcal{B} et calculer P^{-1} .
6. Calculer $B = P^{-1}AP$.
7. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. Soient les suites réelles (x_n) et (y_n) définies par leur premier terme x_0, y_0 et la relation de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n + y_n, \\ y_{n+1} &= -3x_n - 2y_n. \end{cases}$$

Exprimer le vecteur $u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ à l'aide de A, n et u_0 .

9. Déduire de la question précédente les termes généraux x_n et y_n en fonction de n, x_0, y_0 .