Corrigé du Devoir Surveillé n^{o}2

Questions de cours

1. $E \cup F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $E \subset F$ ou $F \subset E$?
2. A^{-1} est l'unique matrice telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
3. Ker $\varphi = \{x \in \mathbb{R}^m | \varphi(x) = 0_{\mathbb{R}^n}\}$.
4. $\mathrm{rg}\, \varphi + \dim \mathrm{Ker}\ \varphi = m$.

Exercice 1

1. $z_1 = \cos a + i\ \sin a$ et $z_2 = \cos b + i\ \sin b$.
2. $z_1 z_2 = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$.
3. $z_1 z_2 = \mathrm{e}^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$.
4. $\Re(z_1 z_2) = \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
   $\Im(z_1 z_2) = \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Exercice 2

• $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, z = x + i\, y = \pm |z| \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right\}$.
Il s'agit de la droite vectorielle (donc de dimension 1) engendrée par $(1, 1)$.
Note : on considère ici que tout réel peut être considéré comme un argument de 0 puisque $\forall \theta \in \mathbb{R}, 0.\mathrm{e}^{i\theta} = 0$. Si on considère que 0 n'appartient pas à A car Arg 0 n'est pas défini, alors, à l'évidence, A n'est pas considéré comme un sous-espace vectoriel.

• $B = M + E$ où $M = (1, 0, 0)$ et $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y - z = 0\right\}$.
E est l'hyperplan normal à $(1, 1, -1)$. B est donc un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

• C n'est pas un sous-espace vectoriel puisque $0_{\mathbb{R}^2} \notin C$.
De plus $u = (1, 1) \in C$, $v = (2, 1/2) \in C$ donc si C était un espace affine $w = u - v = (-1/2, 1/2)$ devrait être un vecteur du sous-espace vectoriel qui le porte et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $u + \lambda w$ devrait appartenir à C. Or $u + w = (1/2, 3/2)$ dont le produit des composantes vaut $3/4$. Donc $u + w \notin C$ et C n'est pas un espace affine. Note : représenter la courbe d'équation $y = 1/x$ est tout aussi rapide pour se convaincre que E n'est ni un espace vectoriel, ni un espace affine.

• L'unique solution de $\cos x = 0$ dans $[0, \pi]$ est $\pi/2$. Donc

$$D = \left\{ \left(\frac{\pi}{2}, y\right) \,|\, y \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

C'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

Exercice 3 1. ${}^t(a,b,c) \in \text{Im } A$ ssi $\exists X \in \mathbb{R}^3, AX = {}^t(a,b,c)$. On échelonne ce système.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -25 & -6 & a \\ 0 & -3 & -1 & b \\ -1 & 13 & 2 & c \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -25 & -6 & a \\ 0 & -3 & -1 & b \\ 0 & -12 & -4 & a+c \end{array}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -25 & -6 & a \\ 0 & -3 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a-4b+c \end{array}\right).$$

On obtient ainsi $(a,b,c) \in \text{Im } A$ si et seulement si $a - 4b + c = 0$.

2. Im A est l'hyperplan normal au vecteur $(1,-4,1)$, de dimension 2 : $\text{rg}A = 2$. On peut prendre n'importe quel couple de vecteurs colonnes de A comme base de Im A (car tous les couples forment une famille libre dans le cas présent). Par exemple le 1er et le 3ème vecteurs colonnes de A : $u = {}^t(1,0,1)$ et $w = {}^t(-6,-1,2)$ forment une base de Im A.
3. A partir de la matrice échelonnée obtenue au 1. avec $a = b = c = 0$, on obtient ${}^t(x,y,z) \in \text{Ker } A$ si et seulement si $3y + z = 0$ et $x - 25y - 6z = 0$.
4. dim Ker $A = 1$ et en prenant, par exemple, $z = 3$ dans la paramétrisation obtenue précédemment, on obtient le vecteur $f_3 = (-7,-1,3)$ qui forme une base de Ker A.
5. On vérifie que les composantes de f_3 vérifient les contraintes pour appartenir à Im A : $-7 - 4.(-1) + 3 = 0$. D'où $f_3 \in \text{Im } A$ et $\text{Ker } A = \mathbb{R}f_3 \subset \text{Im } A$.
6. Vérifions que chaque vecteur de la base de Im A obtenue au 2. a une image par A appartenant à Ker A :
$$Au = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -f_3 \in \text{Ker } A, \quad Aw = A\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -f_3 \in \text{Ker } A.$$
Tout vecteur $Y \in \text{Im } A$ se décompose sur la base (u,w) : $Y = \lambda u + \mu w$.
Ainsi $AY = A(\lambda u + \mu w) = \lambda Au + \mu Aw = -(\lambda + \mu)f_3 \in \text{Ker } A$.
7. Pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, $AX \in \text{Im } A$ et $AAX = A^2X \in \text{Ker } A$ d'après le résultat précédent. Et donc, $AA^2X = A^3X = 0$. Ainsi, $A^3 = 0$.
8. Calculons l'inverse de P :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 7L_3 \\ L_2 \leftarrow -L_2 - L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & 0 & 8 & -14 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$
$$\overset{L_1 \leftarrow (L_1 + 6L_2)/(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) = (I_3 | P^{-1})$$
9. On obtient par le calcul direct : $B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
10. On vérifie facilement que $B^3 = 0$, ce qui montre, d'une autre manière qu'au 7., que
$$A^3 = (PBP^{-1})^3 = PB^3P^{-1} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$