Université d'Évry-Val-d'Essonne — Mathématiques 3
L2 économie-gestion — Année 2017-2018

Corrigé du devoir à rendre

Exercice 1

1. Pour produire 2 unités de P_1 et 5 unités de P_2, il faut $2\times 1+5\times\frac{2}{2}=7$ unités de M_1, $2\times 2+5\times\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$ unités de M_2 et $2\times 3+5\times\frac{4}{2}=16$ unités de M_3.
2. De manière générale, les quantités de M_1, M_2, M_3 nécessaires à la production de x unités de P_1 et y unités de P_2 sont :
$$f_1(x,y)=x+y,\quad f_2(x,y)=2x+\frac{y}{2},\quad f_3(x,y)=3x+2y.$$
3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$.
Méthode 1. La production est supposée être linéaire en les quantités de matières premières, donc f est linéaire. **Méthode 2.** On peut également arguer que f_1,f_2,f_3 sont à l'évidence 3 formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$, donc $f=(f_1,f_2,f_3)$ est linéaire. **Méthode 3.** On peut encore montrer rapidement que $f(u+\lambda v)=f(u)+\lambda f(v)$ pour tous $u\in\mathbb{R}^2$, $v\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Finalement $f\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$.
4. La matrice représentative de f s'obtient directement à partir du résultat de la question 2. (ou en calculant les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$) :
$$M=Mat(f,\underline{can}_{\mathbb{R}^2},\underline{can}_{\mathbb{R}^3})=\begin{pmatrix}1&1\\2&\frac{1}{2}\\3&2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$
5. **Méthode 1.** Le déterminant extrait obtenu avec les 2 premières lignes et colonnes de M vaut $-3/2\neq 0$. Donc $\mathrm{rg}M\geqslant 2$ et majorée par le nombre de colonnes (soit 2). D'où $\mathrm{rg}f=\mathrm{rg}M=2$.
Méthode 2. On peut aussi appliquer l'unique étape de l'algorithme d'élimination de Gauss (ci-dessous) pour obtenir ce rang.
Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\ f)=0$ et $\mathrm{Ker}\ f=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Une base de $\mathrm{Im}\ f$ (de dimension 2) est donnée par les deux vecteurs colonnes de M.
On échelonne $Mu={}^t(a,b,c)$ à l'aide de l'algorithme d'éliminations de Gauss :
$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\2&1/2&b\\3&2&c\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\0&-3/2&b-2a\\0&-1&c-3a\end{array}\right).\tag{1}$$
Ainsi $(a,b,c)\in\mathrm{Im}\ f\iff\frac{2}{3}(b-2a)=c-3a\iff 5a+2b-3c=0$.
6. L'entreprise peut utiliser l'intégralité des quantités a,b,c de M_1,M_2,M_3 en produisant P_1,P_2 si et seulement si il existe $u=(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ tel que $f(x,y)=(a,b,c)$. Les quantités (a,b,c) doivent donc nécessairement appartenir à $f(\mathbb{R}_+^2)\cap\mathbb{R}_+^3$.

La première condition sur a, b, c est donc donnée par l'équation de Im f. On vérifie à présent que, sous cette condition $5a + 2b - 3c = 0$, l'unique solution (x, y) de $f(x, y) = (a, b, c)$ appartient à $\mathbb{R}_+^2$. On termine la résolution de (1) : $y = 3a - c$, $x = a + c - 3a = c - 2a$. Il faut donc $2a \leqslant c \leqslant 3a$. Finalement :

$$E = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3 | 5a + 2b - 3c = 0 \text{ et } 2a \leqslant c \leqslant 3a\right\} = \text{Im } f \cap \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3 | 2a \leqslant c \leqslant 3a\right\}.$$

7. **Méthode 1.** On peut inverser la matrice carrée constituée des 2 dernières lignes de M (par exemple à l'aide de la transposée de la comatrice divisée par le déterminant) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthode 2. Cependant, on a déjà inversé la restriction $f^{|\text{Im } f}$ à la question précédente. Il suffit donc d'utiliser la solution (x, y) obtenue en remplaçant $a = (3c - 2b)/5$, soit

$$x = c - 2\frac{3c - 2b}{5} = \frac{4b - c}{5} \quad \text{et} \quad y = 3\frac{3c - 2b}{5} - c = \frac{-6b + 4c}{5}.$$

On obtient donc la matrice représentative de $(f^{|\text{Im } f})^{-1}$ (la même que ci-dessus) :

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

8. On remarque tout d'abord $u = {}^t(7, 8, 17) \in E$: on est donc assuré d'avoir une solution $f(x, y) = u$. En calculant le produit de la matrice ci-dessus avec le vecteur ${}^t(8, 17)$, on trouve $(x, y) = (3, 4)$.
9. On obtient la contrainte : $a + 2b + c = 80$.
10. En supposant que a, b, c peuvent être négatifs, $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a + 2b + c = 80\}$ est le sous-espace affine (puisque ne contenant pas 0) de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 passant par $(80, 0, 0)$ et porté par le s.e.v. engendré par ${}^t(1, 0, -1)$ et ${}^t(0, 1, -2)$.
11. $(a, b, c) \in E \cap F \Longrightarrow (a + 2b + c = 80 \text{ et } 5a + 2b - 3c = 0 \text{ et } 2a \leqslant c \leqslant 3a)$. En résolvant le système formé par les deux équations, on obtient : $a = c - 20, b = 50 - c$.
On a donc nécessairement $20 \leqslant c \leqslant 50$ pour que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$. De plus, en remplaçant $a = c - 20$ dans $2a \leqslant c \leqslant 3a$, on obtient la contrainte $2(c - 20) \leqslant c \leqslant 3(c - 20)$ soit $30 \leqslant c \leqslant 40$.
12. On utilise la matrice inverse obtenue à la question 7. et le vecteur ${}^t(50 - c, c)$ (i.e. ${}^t(b, c)$ tel que ${}^t(a, b, c) \in E \cap F$ où $a = c - 20, b = 50 - c$) :

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 - c \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4(50 - c) - c \\ -6(50 - c) + 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 - c \\ 2c - 60 \end{pmatrix}.$$

On retrouve exactement la condition $c \leqslant 40$ pour que la production de P_1 soit positive. Sous la condition $c \geqslant 30$ obtenu en 11., la production $2c - 30$ de P_2 est bien positive.
Avec l'utilisation d'un stock entier sans reste de matière première, on peut donc produire au plus 10 unités de P_1 ($c = 30$). De même, on peut produire au maximum 20 unités de P_2 ($c = 40$).

Exercice 2 A - Amortissement d'un prêt unique à mensualité fixe.

1. $u_0 = I, \quad u_{n+1} = (1+\tau)u_n - m$ définit une suite arithmético-géométrique.
2. On résout en λ :
$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (1+\tau)y_n = (1+\tau)(u_n+\lambda) \\ &= u_{n+1}+\lambda = (1+\tau)u_n - m + \lambda. \end{aligned}$$
Soit $(1+\tau)\lambda = -m+\lambda$ puis $\lambda = -\frac{m}{\tau}$.
3. $y_0 = u_0 + \lambda = I - \frac{m}{\tau}$ et
$$y_n = \left(I - \frac{m}{\tau}\right)(1+\tau)^n$$
4. On en déduit :
$$u_n = \left(I - \frac{m}{\tau}\right)(1+\tau)^n + \frac{m}{\tau}. \tag{2}$$
5. On résout $u_{240} = 0$ soit
$$u_{240} = \left(I - \frac{m}{\tau}\right)(1+\tau)^{240} + \frac{m}{\tau} = 0 \iff m = \frac{I\tau(1+\tau)^{240}}{(1+\tau)^{240}-1}.$$
6. Pour les données numériques, on trouve : $m = 1109,195$ €.
7. Le coût final est donné par $240m - I = \left(\frac{240\tau(1+\tau)^{240}}{(1+\tau)^{240}-1} - 1\right) I$.
8. Pour les données numériques, on obtient un coût final de 66206 €.

B - Amortissement d'un prêt à taux 0 et d'un prêt bancaire complémentaire.

9. $v_{n+1} = v_n - m_1$ et $v_0 = I_1$ définit une suite arithmétique de raison m_1.
10. $v_n = I_1 - nm_1$.
11. On résout $v_{144} = I_1 - 144m_1 = 0$ soit $m_1 = I_1/144$.
12. Pour $I_1 = 40.10^3$ € on obtient $m_1 = 2500/9 \simeq 277,78$ €.
13. On obtient w_n à partir de u_n en remplaçant I par $I - I_1$ et m par $M - m_1$ soit :
$$w_n = \left(I - I_1 - \frac{M-m_1}{\tau}\right)(1+\tau)^n + \frac{M-m_1}{\tau}.$$
A noter : on connaît $m_1 = I_1/144$ que l'on utilise pour la question suivante.
14. Le capital restant dû pour P_2 au mois de dernier remboursement de P_1 est w_{144} par définition. Pour les données numériques considérées, on obtient $w_{144} = 277305,88 - 173,07\,M$.
15. A partir du mois 145 ($n - 144 = 1$), le crédit P_2 est remboursé par des mensualités M. On obtient donc z_k à partir de l'expression de u_k donné par (2) en remplaçant I par z_0 (premier terme) et m par M soit
$$z_k = \left(z_0 - \frac{M}{\tau}\right)(1+\tau)^k + \frac{M}{\tau}.$$

16. La solution proposée par la banque prévoit un dernier remboursement de P_2 au mois $n = 240$ soit $k = n - 144 = 96$ (soit le nombre de mensualités sur les 8 ans de remboursement de P_2 après remboursement de P_1). La condition d'amortissement est donc $z_{96} = 0$.
17. La définition même de (w_n) et (z_{n-144}) dans l'énoncé montre $w_{144} = z_0$ pour $n = 144$. Rien de plus naturel : au mois de dernier remboursement de P_1, il reste w_{144} à rembourser sur P_2 et on initialise donc la récurrence définissant l'amortissement de P_2 avec cette valeur z_0. Les données numériques considérée sont les mêmes que celles de la question 14. On a donc : $w_{144} = a + bM$. L'équation $z_{96} = 0$ s'écrit donc

$$z_{96} = \left(w_{144} - \frac{M}{\tau}\right)(1+\tau)^{96} + \frac{M}{\tau} = \left(a + bM - \frac{M}{\tau}\right)(1+\tau)^{96} + \frac{M}{\tau} = 0.$$

La résolution de cette équation permet d'obtenir

$$M = \frac{a\tau(1+\tau)^{96}}{(1-b\tau)(1+\tau)^{96} - 1}$$

et en utilisant a et b trouvés à la question 14. et $\tau = 0.03/12$, on obtient $M = 1073,46$ €.
18. Le coût total de la solution de crédit est $240M - I = 57630$ €, soit une économie finale par rapport à la solution présentée en partie A de 8576 €.