Devoir à rendre le 12 ou 13 décembre au chargé de TD

Note : L'usage de la calculatrice est, bien entendu, autorisé. Néanmoins, pour l'exercice 2., il est demandé de répondre aux questions théoriques à l'aide de calculs symboliques (i.e. en utilisant les noms des paramètres) et de ne donner de résultats numériques que pour les questions notées "**Application numérique**".

Exercice 1 Une entreprise fabrique 2 produits P_1, P_2 en utilisant 3 matières premières M_1, M_2, M_3.
• La fabrication d'1 unité de P_1 nécessite 1 unité de M_1, 2 unités de M_2 et 3 unités de M_3,
• La fabrication de 2 unités de P_2 nécessite 2 unités de M_1, 1 unité de M_2 et 4 unités de M_3.

1. Quelles quantités de M_1, de M_2 et de M_3 sont nécessaires pour la fabrication de 2 unités de P_1 et 5 unités de P_2.
2. De manière générale, quelle quantité $f_1(x, y)$ de M_1 est nécessaire pour la fabrication de x unités de P_1 et y unités de P_2 ? Même question pour la quantité $f_2(x, y)$ de M_2 et la quantité $f_3(x, y)$ de M_3.
3. On considère l'application :
$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \\ f_3(x,y) \end{pmatrix}$$
Quels sont les espaces de départ et d'arrivée de cette application ? Justifier qu'elle est linéaire.
4. Donner A la matrice représentative de f dans les bases canoniques.
5. Quel est le rang de f. En déduire $\dim(\operatorname{Ker} f)$ et $\operatorname{Ker} f$. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.
Montrer que
$$\operatorname{Im} f = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | 5a + 2b - 3c = 0\right\}$$
6. L'entreprise dispose de a unités de M_1, b unités de M_2 et c unités de M_3 (a, b, c positifs). Elle veut savoir si elle peut utiliser l'intégralité de ces ressources (i.e. sans qu'il ne lui reste de surplus d'aucune des 3 matières) pour produire P_1 et P_2 (en quantités positives).
Exprimer à l'aide de f l'ensemble des (a, b, c) permettant une telle utilisation des ressources ?
Donner les conditions pour que (a, b, c) appartienne à cet ensemble noté E.
Justifier que $E = \operatorname{Im} f \cap \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3 | 2a \leqslant c \leqslant 3a\right\}$
7. On suppose que l'entreprise dispose de a, b, c unités de M_1, M_2, M_3 respectivement, tels que $(a, b, c) \in E$. Donner la représentation matricielle de l'application qui à (b, c) associe les quantités (x, y) produites de P_1 et P_2 en utilisant toutes les matières premières.
8. Dans cette question seulement, on suppose $(a, b, c) = (7, 8, 17)$.
Trouver les valeurs x et y de quantités de production de P_1 et P_2 permettant de consommer toutes les matières premières disponibles.

9. Pour le stockage des matières premières, 1 unité de M_1 occupe 1 m^3, 1 unité de M_2 occupe 2 m^3, 1 unité de M_3 occupe 1 m^3. L'entreprise dispose de 80 m^3 de stockage. Partant d'un stock vide, l'entreprise achète a, b, c unités de P_1, P_2, P_3 respectivement. Quelle contrainte doivent vérifier a, b et c pour remplir le stock ? On note F l'ensemble des (a, b, c) vérifiant cette contrainte.
10. Quelle est la structure de l'ensemble F ? Quelle est sa dimension ?
11. Exprimer a et b en fonction de c pour que $(a, b, c) \in E \cap F$.
    Pour quelles valeurs de c existe-t-il a et b positifs tels que $(a, b, c) \in E \cap F$.
12. Donner, en fonction de c, les quantités de P_1 et P_2 que l'entreprise peut produire en épuisant un stock plein contenant a, b, c unités de M_1, M_2, M_3 respectivement où $(a, b, c) \in E \cap F$?
    Vérifier que la production est alors positive. Donner des encadrements des capacités de productions de P_1 et P_2 lorsqu'on utilise un stock entier sans perte.

Exercice 2 Pour acheter un bien immobilier, le client d'une banque veut emprunter un montant I (en €) à rembourser sur 20 ans (240 mensualités d'un montant fixe). Sa banque lui propose un crédit au taux fixe annuel de 12τ.

A - Amortissement d'un prêt unique à mensualité fixe. On note u_n le capital restant dû au mois $n \in [\![0, 240]\!]$ avec $u_0 = I$, et m la mensualité fixe remboursée chaque mois (à partir de $n = 1$).

1. Ecrire la relation de récurrence définissant la suite u_n en fonction de m et τ.
   Quel est le type de la suite (u_n) ?
2. Trouver un réel λ, dépendant de m et τ, tel que la suite (y_n) définie par $y_n = u_n + \lambda$ pour tout n soit une suite géométrique de raison $1 + \tau$.
3. Calculer y_0 et donner le terme général y_n en fonction de n, I, m et τ.
4. En déduire le terme général de la suite u_n en fonction de n, I, m et τ.
5. Exprimer, en fonction de I et τ, la mensualité fixe m permettant d'amortir le prêt en 20 ans.
6. **Application numérique :** Calculer cette mensualité pour $I = 200$ k€ et $12\tau = 0.03$.
7. Quel est le coût final du crédit en fonction de I et m ? Exprimer ce coût en fonction de I et τ.
8. **Application numérique :** Calculer ce coût pour les données numériques du problème.

B - Amortissement d'un prêt à taux 0 et d'un prêt bancaire complémentaire. La banque propose à son client de profiter d'un prêt d'état (appelé P_1) d'un montant I_1 en € à 0% sur 12 ans remboursé avec une mensualité fixe m_1. Le prêt bancaire complémentaire (appelé P_2), d'un montant $I_2 = I - I_1$ à taux fixe annuel 12τ, est alors amorti avec une mensualité $M - m_1$ sur les 12 premières années puis la mensualité M sur les 8 dernières. Ainsi, le total des mensualités versées chaque mois pour rembourser P_1 et P_2 est constant égal à M sur les 240 mois.
On note
• v_n le capital restant dû pour le prêt P_1 au mois $n \in [\![0, 144]\!]$,
• w_n le capital restant dû pour le prêt P_2 au mois $n \in [\![0, 144]\!]$,
• $z_{(n-144)}$ le capital restant dû pour le prêt P_2 au mois $n \in [\![144, 240]\!]$.
Dans cette partie, on cherche m_1 et M permettant d'amortir P_1 en 12 ans et P_2 en 20 ans pour la solution proposée ci-dessus par la banque.

9. Donner la relation de récurrence définissant (v_n). Que vaut v_0 ? De quel type est la suite (v_n) ?
10. Donner le terme général (v_n) en fonction de n, I_1 et m_1.
11. En déduire, en fonction de I_1, la mensualité m_1 permettant d'amortir le prêt P_1 en 12 ans.
12. **Application numérique :** Calculer m_1 pour $I_1 = 40$ k€.
13. Donner le terme général w_n en fonction de n, I_1, M, m_1 et τ.
    (On pourra adapter la réponse à la question 4.)
14. **Application numérique :** On considère $I = 200$ k€, $I_1 = 40$ k€, et $12\tau = 0.03$. On note $a + bM$, où a et b sont deux réels, le capital restant dû pour P_2 au mois du versement de la dernière mensualité associée à P_1.
    Calculer a et b (on donnera leurs valeurs avec deux chiffres derrière la virgule).
15. Donner le terme général z_k en fonction de k, z_0, M et τ.
    (On pourra adapter la réponse à la question 4.)
16. Pour quelle valeur de k l'équation $z_k = 0$ représente la condition d'amortissement de P_1 en 12 ans et P_2 en 20 ans selon la solution proposée par la banque ?
17. **Application numérique :** On considère, comme à la question 14., $I = 200$ k€, $I_1 = 40$ k€, et $12\tau = 0.03$. Montrer que l'équation trouvée à la question précédente s'écrit :

    $$\left(a + bM - \frac{M}{\tau}\right)(1+\tau)^{96} + \frac{M}{\tau}$$

    Résoudre cette équation pour trouver la valeur de M avec deux chiffres derrière la virgule.
18. Quel est le coût total de cette solution de crédit ?
    Quel est le gain à terme de la solution de crédit $P_1 + P_2$ par rapport à celle du prêt bancaire simple étudié dans la partie A.