# Devoir Surveillé – 6 novembre 2017 – Durée : 2h00

**Documents et appareils électroniques interdits.**

**Questions de cours**

1. Soit une suite géométrique $(u_n)$ de raison $r$. Exprimer $\sum_{i=0}^{N} u_i$ en fonction de $N$, $u_0$ et $r$.
2. Donner la définition d'une famille libre de vecteurs $(u_i)_{i=1}^{n}$.
3. Soit $\varphi \in L(\mathbb{R}^n)$ inversible. Que vaut Ker $\varphi$ ? Que vaut Im $\varphi$ ?
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $r$. En utilisant le théorème du rang, donner dim(Ker $A$).
5. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Que signifient que $A$ et $B$ sont équivalentes ?
   Quelle est la condition supplémentaire sous laquelle elles sont dites semblables ?

**Exercice 1** Le 1er février 2017, trois clients d'une banque ont ouvert chacun un livret d'épargne rémunéré au taux annuel $\tau = 1.93\%$. Chaque année, les intérêts sont calculés sur le capital minimal disponible entre le 1er février de l'année $n-1$ et le 31 janvier de l'année $n$ et versés sur le livret le 31 janvier de l'année $n$ pour augmenter le capital.
• Le 1er client dépose $I = 10$ k€ sur son livret à l'ouverture et capitalise les intérêts.
• Le 2nd dépose la même somme mais, le 1er février de chaque année, retire les intérêts générés.
• Le 3ème dépose $J = 8$ k€ à l'ouverture puis, au 1er février de chaque année à partir de 2018, y dépose $d = 300$ €.

On note $a_n$ (resp. $b_n$, $c_n$) le capital disponible sur le livret du 1er (resp. 2nd, 3ème) client au 2 février de l'année $n$ (on considérera 2017 comme l'année $n = 0$).

1. Ecrire les relations de récurrence définissant les suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$ en fonction de $I$, $J$, $\tau$, $d$.
2. De quel type est la suite $(a_n)$ ? La suite $(c_n)$ ? Que dire de la suite $(b_n)$ et que vaut $b_n$ ?
3. Au 2 février 2022, quel sera le total des intérêts récupérés par le 2nd client ?
4. Donner le terme général $a_n$ en fonction de $n$, $I$ et $\tau$.
5. Quel sera le capital disponible du 1er client au 2 février 2027 ?
   On utilisera $(1.0193)^5 = 1.1$ pour l'application numérique.
6. Trouver un réel $\lambda$, dépendant de $d$ et $\tau$, tel que la suite $(v_n)$ définie par $v_n = c_n + \lambda$ pour tout $n$ soit une suite géométrique de raison $1 + \tau$.
7. Calculer $v_0$ et donner le terme général $v_n$ en fonction de $n$, $J$, $\tau$, $d$.
   En déduire le terme général $c_n$.
8. Quel sera le capital disponible du 3ème client au 2 février 2027. Donner une approximation de ce capital en utilisant $d/\tau = 15545$ € pour l'application numérique.
9. Donner en fonction de $I$, $J$, $\tau$ et $d$ l'année à laquelle le capital disponible du 3ème client dépassera 14 k€. (On ne demande pas d'application numérique).

**Exercice 2** Une banque propose 3 produits $P_1$, $P_2$, $P_3$ pouvant être achetés par fractions. L'achat de chaque produit par ses clients engendre des gains et des coûts pour la banque :
• 1 unité de $P_1$ rapporte 1 € et ne coûte rien,
• 1 unité de $P_2$ rapporte 2 € et coûte 1 €,
• 1 unité de $P_3$ rapporte 3 € et coûte 2 €.
La banque veut formaliser l'application qui aux nombres (réels) d'unités des produits $P_i$ achetés lors d'une série d'achats renvoie séparément les gains (positifs) et les coûts (négatifs) dans un vecteur à deux composantes réelles.

1. Dans cette question seulement, on suppose que la banque a vendu $P_2$ et $P_3$ en même quantités et s'intéresse à l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = z\}$. $E$ est-il un sous-espace vectoriel ? Pour cet ensemble, que représente $(f_1, f_2)$ où $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ? Justifier la réponse.
2. Donner le gain $G(x, y, z)$ engendré par l'achat de $x$ unités de $P_1$, $y$ unités de $P_2$ et $z$ unités de $P_3$. Donner le coût $C(x, y, z)$ correspondant.
(On considérera $C(x, y, z) \leqslant 0$ pour $x, y, z$ positifs afin de représenter qu'il s'agit d'un coût).
3. On considère l'application $\varphi : (x, y, z) \to (G(x, y, z), C(x, y, z))$.
Quels sont ses espaces de départ et d'arrivée ?
4. (Facultatif) Donner la représentation matricielle de l'application linéaire $\varphi$ dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.
5. Calculer $\varphi(4, 5, 2)$ et $\varphi(0, 1, 0)$. Ces deux vecteurs forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^2$ ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^2$ ?
6. Trouver $x$ et $y$ tels que $\varphi(x, y, 1) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
7. Montrer que les trois vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{R}^3$ :
$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
8. On considère l'ensemble $F = \{1000u + \lambda w | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel ? Quelle est sa structure géométrique et sa dimension ?
9. On considère une série d'achats de $x$ unités de $P_1$, $y$ unités de $P_2$ et $z$ unités de $P_3$ avec $(x, y, z) \in F$. Quels sont le gain et le coût associés pour la banque ?
10. Pour calculer le bénéfice net d'une série d'achats pour la banque, on considère l'application
$$\begin{array}{rcl} \psi : (u, v) & \to & u + v \\ \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \end{array}$$
Exprimer à l'aide de $\varphi$ et $\psi$ l'application $T$ qui, au triplet des nombres d'unités de $P_1, P_2, P_3$ achetés, associe le bénéfice net pour la banque.
Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de $T$ ? Exprimer $T(x, y, z)$.
11. Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | T(x, y, z) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
Quelle est sa dimension ? En donner une base.