Devoir Surveillé – 3 décembre 2018 – Durée : 1h30

Documents et appareils électroniques interdits.

Questions de cours

1. Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
   Sous quelle condition nécessaire et suffisante $E \cup F$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?
2. Donner la définition de l'inverse d'une matrice $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.
3. Donner la définition du noyau d'une application linéaire $\varphi \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.
4. Enoncer le théorème du rang pour une application linéaire $\varphi \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Exercice 1 Soient a et b deux réels et les deux complexes $z_1 = \mathrm{e}^{i\,a}$ et $z_2 = \mathrm{e}^{i\,b}$.

1. Donner les formes cartésiennes de z_1 et z_2.
2. A partir de ces formes cartésiennes, calculer la forme cartésienne du produit $z_1 z_2$.
3. Donner la forme polaire de $z_1 z_2$ puis, à partir de cette forme polaire, donner la forme cartésienne de $z_1 z_2$.
4. En déduire les expressions de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$, $\sin b$.

Exercice 2 Pour chacun des sous-ensembles suivants, préciser s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel, d'un sous-espace affine ou aucun des deux. Dans les deux premiers cas, donner sa dimension. Les réponses devront être rigoureusement justifiées.

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \mathrm{Arg}(x+i\,y) = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}. \\
B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x+y-z=1\}. \\
C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad xy=1\}. \\
D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \cos x = 0 \text{ et } x \in [0,\pi]\}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -25 & -6 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & 13 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -7 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que
$$\mathrm{Im}\ A = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - 4b + c = 0\}$$
2. En déduire le rang de A et une base de l'image de A.
3. Sous quelle(s) condition(s) $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ appartient-il à Ker A ?
4. Donner la dimension et une base de Ker A.
5. Déduire des résultats précédents que Ker $A \subset$ Im A.
6. Montrer que pour tout $Y \in$ Im A, $AY \in$ Ker A.
7. Que peut-on en déduire concernant A^3 ?
8. Calculer l'inverse de P.
9. Calculer $B = P^{-1}AP$ et vérifier le résultat de la question 6.