Université d'Evry Val d'Essonne **Mathématiques 3**
L2 ECONOMIE-GESTION **1er semestre 2017-2018**

DS du 6 Décembre 2017

Durée : 1h30 heures

La calculatrice n'est pas autorisée.

La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Toute réponse doit être convenablement justifiée.

Questions de cours

1) Soit une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ triangulaire. Quel est le déterminant de A ?
2) Donner la définition d'une valeur propre λ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3) Qu'est-ce qu'un vecteur propre associé à la valeur propre λ d'une matrice A.
4) Soit une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ triangulaire. Quel est le spectre de A ?
5) Donner la définition de "$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$".

Exercice 1. Déterminer les termes généraux u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ sachant que

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique telle que $u_2 = 1$ et $u_{10} = -3$,
2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique telle que $v_1 = -\frac{3}{5}$ et $v_4 = \frac{81}{5}$.

Exercice 2. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 3u_n - 1.$$

1) Construire une suite géométrique (v_n) telle que, pour tout n, $v_n = u_n - \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$).
2) Donner la formule explicite de v_n en fonction de n.
3) En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n.

Exercice 3. Pour acheter un bien immobilier, un client a contracté auprès d'une banque un prêt d'un montant de X € au taux fixe annuel de $12\tau = 3\%$. Pour rembourser ce prêt sur 20 ans, le client doit payer 240 mensualités constantes de $M = 1000$ € chacune.

1) Donner la valeur acquise S par ces 240 mensualités en fonction de M, τ et n. On rappelle que la valeur acquise est la somme finale du capital constitué et des intérêts générés par la capitalisation, soit :
$$S = M\sum_{i=0}^{n-1}(1+\tau)^i$$
2) Calculer le montant X du prêt. Pour l'application numérique, on pourra utiliser l'approximation à 10^{-4} près $(1.0025)^{-240} \simeq 0.5492$.
Á quelle précision connaît-on X à l'aide de l'approximation précédente ?
3) Calculer le coût final du crédit.

Exercice 4. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (y, x-7y, x+y)$.

1) Montrer que f est linéaire.
2) Donner la matrice représentative A de f dans les bases canoniques.
3) Quel est le rang de f ? En déduire dim (Ker f) et Ker f. En déduire si f est injective, surjective ou bijective.
4) Montrer que Im $f = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 8a + b - c = 0\}$. Quelle est la structure de cet ensemble ?
5) Soient $v_1 = f(1,0)$, et $v_2 = f(0,1)$. Montrer que (v_1, v_2) est une base de Im f.
6) Soient $v_3 = (8, 1, -1)$ et $F = Vect\{v_3\}$. Montrer que $F \bigoplus \text{Im } f = \mathbb{R}^3$.
   En déduire une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$.
7) Montrer que les vecteurs $e'_1 = (1,-1)$ et $e'_2 = (1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
8) Donner les expressions de $f(e'_1)$ et de $f(e'_2)$ en fonction de v_1, v_2 et v_3.
9) Donner la matrice représentative B de f de la base (e'_1, e'_2) vers la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e'_1 = (-2, 3)$ et $e'_2 = (-2, 5)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice B représentative de f dans cette base $\mathcal{B}'$ au départ et à l'arrivée.
2) Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
3) Vérifier que $B = P^{-1}AP$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = P^{-1}A^nP$.
   En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) Soient les suites réelles (x_n) et (y_n) définies par leur premier terme x_0, y_0 et la relation de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{2}{3}y_n, \\ y_{n+1} = \dfrac{-5}{2}x_n - \dfrac{2}{3}y_n. \end{cases}$$
   Exprimer le vecteur $u_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ à l'aide de A, n et u_0.
5) Déduire de la question précédente les termes généraux x_n et y_n en fonction de n.