Polycopié de travaux dirigés

L2 Economie et Gestion

Maths 3: Fonctions réelles de plusieurs variables

cecile.cot@genopole.cnrs.fr
alexandre.vidal@univ-evry.fr

Semestre d'automne 2011
Université d'Évry Val d'Essonne

Planning du semestre

séance	thème	exercices
1	Fonction d'une variable, dérivées, graphe, tangente convexité, extremum lignes de niveau, bijection	1.1 1.2 1.3
2	Fonction de demande et élasticité	1.4, 1.5
3	Développements Limités usuels Application des DL	1.6 1.7, 1.8
4	Fonctions de 2 variables : linéaire, Leontieff, Cobb-Douglas ... Transformation monotone Dérivées partielles premières	2.1 2.2 2.3
5	dérivées partielles et appli. Gradient, Différentielle et appli.	2.4 2.5, 2.6 (2.7, 2.8 maison)
6	Dérivées d'une fonction composée de 2 variables	2.9, 2.10, 2.11, 2.12
7	Devoir Sur Table	
8	Gradient, Hessien, Approximations de Taylor caractérisation du Hessien : DP,DN ...	3.1, 3.2 3.3
9	Hessien et position plan tangent	3.4, 3.5
10	Optimisation sans contraintes	4.1, 4.2, 4.3 (4.4 et 4.5 maison)
11	Optimisation sous contraintes	4.6, 4.7, 4.8
12	Révision	annales L2Eco/Gestion
amphi	Partiel	

FIGURE 1 – Progression (indicative !) du semestre

Les bonus suivants s'appliqueront à la note de Contrôle Continu :
- +1 aux étudiants participant TD,
- +1 aux étudiants rendant les devoirs maisons (et ayant bien réussi).

Table des matières

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions réelles d'une variable réelle

Exercice 1.1. Pour chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = x^{3/2} & f_2(x) = e^{x^2/2} & f_3(x) = \frac{1}{x+1} \\ f_4(x) = \tan x & f_5(x) = \ln(1-x^2) & f_6(x) = \sin(\pi x/4) \end{array}$$

1. Donner leur domaine de définition et calculer leur dérivée.
2. Tracer l'allure de leur graphe.
3. Donner l'équation de la tangente à leur graphe à l'origine.

Exercice 1.2. Pour chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = 4x^2e^{-x} & f_2(x) = \ln(1+x^3) \\ f_3(x) = xe^{\frac{1-x^2}{2}} & f_4(x) = e^{-1/x^2} \end{array}$$

1. Trouver les candidats extrémum (points singuliers).
2. Donner le tableau de variation et tracer l'allure du graphe.
3. En déduire les points selles, les maxima et minima (locaux et/ou globaux...). La fonction est-elle convexe, concave ou ni l'un ni l'autre au voisinage de chacun de ces points ?

Exercice 1.3. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = (x+1)^3 - a(x+1)$ pour $a \geq 0$.

1. Déterminer les limites de f_a en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer la dérivée de f_a et étudier son signe suivant les différents cas possibles du paramètre a.
3. En déduire le tableau de variation.
4. En déduire le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f_a(x) = 0$.

Exercice 1.4 (élasticité-prix). Soit F la fonction de demande définie en fonction du prix p d'un bien par

$$F(p) = kp^{-r} \text{ pour } k, r > 0,$$

et $D(p) = pF(p)$ la dépense des consommateurs pour ce bien.
On appelle elasticité de ce bien la grandeur

$$e = \frac{pF'(p)}{F(p)}.$$

1. Justifier l'appellation *fonction à élasticité constante* attribuée dans les manuels d'économie à cette fonction de demande.

2. La fonction de demande F est-elle convexe, concave ou ni l'une ni l'autre ?
3. Qu'en est-il de la fonction de dépense du consommateur ?

Exercice 1.5. On considère maintenant la fonction de demande linéaire $F(p) = 2 - p$ (avec les contraintes usuelles en économie : $p \geq 0$ et $F(p) \geq 0$).

1. Que devient l'élasticité dans ce cas ?
2. Tracer le graphe de F et faire apparaître sur ce graphe les 3 zones correspondant aux trois cas possibles pour l'élasticité (la demande du bien est *inélastique* si $-1 < e < 0$, *élastique unitaire* si $e = -1$ et *élastique* si $e < -1$).
3. Démontrer que pour un bien dont la demande est inélastique (respectivement élastique), l'augmentation du prix engendre une hausse (respectivement une baisse) de la dépense totale.

Exercice 1.6. Ecrire les développements limités à l'ordre et au point indiqués :

1. $f_1(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ à l'ordre 5 en 0.
2. $f_2(x) = \sin(2x) + \ln(1+x)\cos(x)$ à l'ordre 4 en 0.
3. $f_3(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ à l'ordre 3 en 0.
4. $f_4(x) = x^{3/2}$ à l'ordre 2 en 1.
5. $f_5(x) = x^x - x$ à l'ordre 2 en 1.

Exercice 1.7 (Appli des DL : position relative). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{(2\sin x - x)\ln(1+x)}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

1. Déterminer le DL à l'ordre 3 de f en 0.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en 0.
3. Préciser la position relative de T et $\mathcal{C}_f$.

Exercice 1.8 (DL et valeur approchée). En utilisant un DL à l'ordre 1 puis à l'ordre 2 donner des valeurs approchées r_1 et r_2 de $r = \sqrt{101}$. A l'aide d'une calculatrice, calculer et traduire en pourcentage les erreurs relatives

$$e_i = \frac{r_i - \sqrt{101}}{\sqrt{101}} \text{ pour } i = 1, 2.$$

Chapitre 2

Généralités sur les fonctions de deux variables réelles

Exercice 2.1. Pour chacune des fonctions d'utilité définies pour $x, y > 0$ par :

$$\begin{array}{ll} U_1(x,y) = 4x + 2y & U_2(x,y) = 4x - 6y \\ U_3(x,y) = -4x + y & U_4(x,y) = xy^{1/2} \\ U_5(x,y) = y - x^2 & U_6(x,y) = -y + x^2 \\ U_7(x,y) = \sqrt{x+y} & U_8(x,y) = \min(\frac{x}{2}, \frac{y}{3}) \end{array}$$

1. Préciser de quel type est la fonction (linéaire, Leontieff, Cobb-Douglas, à élasticité de substitution constante...)
2. Dessiner l'allure de la courbe de niveau 1.
3. Préciser pour chaque variable x et y si elle correspond à un bien désirable, indésirable, ou neutre.

Exercice 2.2. Quelles fonctions d'utilité parmi

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y) = \sqrt{xy} & f_2(x,y) = 3x + 3y \\ f_3(x,y) = \sqrt{x+y} & f_4(x,y) = \ln(x) + \ln(y) \end{array}$$

sont-elles des transformations monotones l'une de l'autre ?
Donner dans chaque cas (il y en a 6) la transformation permettant de passer de l'une à l'autre.

Exercice 2.3. Calculer la valeur des dérivées partielles (premières) aux points donnés :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - y^3$ au point $(4,2)$.
2. $f(x,y) = y + 2yx^2 - 4x$ au point $(3,7)$.
3. $f(x,y) = x^{3/2} - y^{1/3}$ au point $(2,1)$.
4. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ au point $(1,1)$.

Exercice 2.4. Soit la fonction de production de Cobb-Douglas à deux facteurs

$$Q(K,L) = 4K^{3/4}L^{1/4}$$

où K désigne le facteur capital et L celui du travail.

1. Calculer les dérivées partielles.
2. Calculer le niveau de production pour un capital initial de $K = 10000$ et $L = 625$.
3. Calculer
$$\frac{\partial Q}{\partial K}(10000, 625), \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial L}(10000, 625).$$

4. A quoi correspond le taux d'accroissement de la production correspondant à une variation marginale de K ? de L ?
5. Supposons que le capital augmente de 5%. Evaluer approximativement l'augmentation correspondante de la production. Quel sera l'impact sur la production ?
6. Même question si l'on augmente le facteur travail de une unité supplémentaire.

Indication : pour les deux dernières questions, ne pas calculer la variation exacte de la production pour l'accroissement marginal de la variable, mais en donner une valeur approchée que l'on justifiera soigneusement.

Exercice 2.5. Pour les fonctions $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 4y^2 + 100$ et $g(x, y) = (x - 3)^2 + 3xy^2$

1) Calculer le gradient.
2) Donner l'expression de la différentielle au point $(2, 5)$.

Exercice 2.6. Soit $Q(K, L) = 4K^{3/4}L^{1/4}$ la fonction de production d'un produit dépendant de deux facteurs de production : le capital K et le travail L.
Actuellement l'entreprise possède un capital de $K = 10000$ et $L = 625$ unités de travail.

1) Donner l'expression de la différentielle de production $d_{(x,y)}Q$ au point $(10000, 625)$.
2) Supposons que le facteur capital augmente de 5%, et le travail de 1 unité. Evaluer approximativement la variation de la production correspondante. Quel sera l'impact sur la production ?

Exercice 2.7. Soit Q la fonction de demande définie en fonction du prix p d'un bien (Produits alimentaires) et du revenu r du consommateur par :

$$Q(p, r) = cp^{\alpha}r^{1-\alpha}, \text{ pour } c, \alpha > 0.$$

Cette fonction est appelée *fonction de demande à élasticité constante.*

1. Afin de vérifier le sens de cette appellation, calculer l'élasticité-prix et l'élasticité-revenu définies respectivement par :

$$e_p = \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{p}{Q} \quad \text{et} \quad e_r = \frac{\partial Q}{\partial r}\frac{r}{Q}$$

2. Que constatez-vous ? Pour rappel, ces élasticités mesurent la sensibilité de réaction de la demande à des modifications de ces facteurs.

Exercice 2.8. Le rendement d'un portefeuille composé de deux titres est donné par la fonction suivante (en milliers d' €) :

$$f(x, y) = 0.05x + 0.01y^2 - x\ln(\frac{y}{4}), \quad \text{où } x \geq 0 \text{ et } y > 0.$$

Les variables x et y représentent respectivement le nombre de parts des titres 1 et 2. Actuellement, un investisseur ne possède que 5 parts du titre 2.

1. Sans calculer le rendement de l'investisseur, dire s'il est intéréssant pour lui de commencer à acheter des parts du titre 1 (tout en gardant le même nombre de parts du titre 2).

2. Quel serait alors son gain ou sa perte approximatif(ve) par part du titre 1 s'il décidait d'en acheter ?
3. Calculer son rendement actuel.
4. Evaluer approximativement son nouveau rendement s'il acquérait une part de plus du titre 2.
5. Evaluer approximativement l'impact sur le rendement s'il acquérait 5 parts de plus dans chacun des titres.
6. Evaluer approximativement l'impact sur le rendement s'il échangeait 3 parts du titre 2 contre 2 parts du titre 1.

Exercice 2.9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction partiellement dérivable en ses deux variables x et y.
On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(2t, 1+t^2)$.
Exprimer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 2.10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction une fonction partiellement dérivable en ses deux variables x et y et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$g(u, v) = f(u^2 + v^2, uv)$. Exprimer $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction f notées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 2.11. Soit f la fonction de deux variables réelles $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ et

$$\begin{cases} x &= 2u + v \\ y &= u - 2v \end{cases}$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$

Exercice 2.12. Soit la fonction de Cobb-Douglas

$$Q(K, L) = 4K^{3/4}L^{1/4}.$$

On suppose que K et L dépendent du temps t et du taux d'intérêt r sous la forme

$$K(t, r) = \frac{10t^2}{r}, \qquad L(t, r) = 6t^2 + 250r$$

et on pose $\widetilde{Q}(t, r) = Q(K(t, r), L(t, r))$.

1. Calculer $K(10, 0.1)$ et $L(10, 0.1)$.
2. Calculer le gradient de $\widetilde{Q}$ au point $(10, 0.1)$ (*Indication : ne pas donner l'expression explicite de $\widetilde{Q}$ en fonction de t et r mais utiliser la méthode de dérivation en chaîne*).
3. On suppose maintenant que K et L ne dépendent que du temps t sous la forme

$$K(t) = t^4, \qquad L(t, r) = (t/2)^4$$

et on pose cette fois $\widetilde{Q}(t) = Q(K(t), L(t))$.
Donner l'expression de $\widetilde{Q}$ en fonction de t, calculer sa dérivée et en déduire $\widetilde{Q}'(10)$.

Chapitre 3

Gradient, Hessien, Approximations de Taylor, formes quadratiques

Exercice 3.1. Calculer le gradient des fonctions ci-dessous et déterminer l'approximation de Taylor d'ordre 1 des fonctions au voisinage du point indiqué :

1. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x+y+1}$, au point $(1,0)$.
2. $g(x,y) = xe^{x^2-y^2}$, au point $(1,1)$.

Exercice 3.2. Calculer le gradient et la matrice hessienne puis déterminer l'approximation de Taylor d'ordre 2 pour les fonctions suivantes au voisinage du point indiqué :

1. $f(x,y) = x^2y$, au point $(1,1)$.
2. $f(x,y) = e^{x+y}$, au point $(1,-1)$.
3. $f(x,y) = \ln(1+2x+3y)$, au point $(0,0)$.

Exercice 3.3.

1. Pour chacune des matrices symétriques suivantes, déterminer son type :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.4. Soit la fonction de deux variables réelles définie par

$$f(x,y) = x\ln x + y\ln y, \text{ pour } x>0, y>0.$$

1. Calculer le gradient et le Hessien de f en un point (x,y) quelconque.
2. En déduire la valeur du gradient et du Hessien au point $(1,1)$.
3. En déduire l'approximation de Taylor-Young à l'ordre 1 au point $(1,1)$ et l'équation du plan tangent T au graphe de f au point $(1,1)$.
4. Identifier le type de la matrice hessienne au point $(1,1)$.
5. En déduire la position relative du plan tangent T au graphe de f au voisinage du point $(1,1)$.
6. Le plan T est-il au dessous ou au dessus du graphe sur tout le domaine ?

Exercice 3.5. Soit la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y) = 2x^3 - 3y^2x - y^2$.

1. Calculer le gradient et le Hessien de f.

2. Calculer le gradient et le Hessien de f aux points $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ et $C = (1, 1)$.
3. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f en chacun des points A, B et C.
4. Déterminer le type du Hessien en chacun des points A, B et C.
5. En déduire la position relative du plan tangent au graphe de f au voisinage de chacun des points A, B et C.

Chapitre 4

Optimisation

Exercice 4.1. Pour chacune des fonctions de deux variables suivantes :

$$\begin{aligned}
&f_1(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2\\
&f_2(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y\\
&f_3(x,y) = 2x^2 - 8xy^2 - \frac{16}{3}y^3 + 8y^2 - 8
\end{aligned}$$

1. Calculer le gradient et le Hessien.
2. Trouver les points singuliers.
3. Identifier la nature des points singuliers.

Exercice 4.2. Soit la fonction de deux variables :

$$f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 - 8x - 2y + 1$$

1. Identifier la nature des points singuliers de f.
2. Montrer que f est strictement convexe.
3. Que peut-on conclure sur les points singuliers de f ?

Exercice 4.3. Parmi les fonctions suivantes, dire lesquelles sont convexes, concaves ou ni l'un ni l'autre :

$$\begin{aligned}
&f_1(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x, && f_2(x,y) = x\ln x + y\ln y,\ \ x>0, y>0\\
&f_3(x,y) = 5f_1(x,y), && f_4(x,y) = -f_1(x,y)\\
&f_5(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)
\end{aligned}$$

Exercice 4.4. A quelle condition sur a et b la fonction de Cobb-Douglas définie pour $x, y > 0$ par

$$(x,y) \mapsto x^a y^b, \text{avec } a, b > 0$$

est-elle convexe ?

Exercice 4.5 (Monopole discriminant). On suppose qu'un monopole intervient sur deux marchés distincts (national et international). Le monopole fixe un prix de vente p_i sur chaque marché i ($i = 1$ pour le national, $i = 2$ pour l'international). Celui-ci est défini en fonction de la production mise sur ce marché de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
p_1 &= G_1(q_1) = 50 - 5q_1\\
p_2 &= G_2(q_2) = 100 - 10q_2
\end{aligned}$$

où q_i désigne la quantité produite mise sur le marché, qui est vendue en totalité. G_1 et G_2 sont des fonctions différentes puisque la firme pratique la discrimination.

La fonction recette de la firme est

$$R(q_1, q_2) = \sum_{i=1}^{2} p_i q_i = q_1 G_1(q_1) + q_2 G_2(q_2).$$

La firme fabrique ses produits dans une même usine, ainsi le coût de production C d'une quantité q est donné par la fonction $C(q) = 90+20q$. Le coût total de production pour les deux marchés est donc $C(q_1 + q_2)$.
La fonction de profit est

$$F(q_1, q_2) = R(q_1, q_2) - C(q_1 + q_2).$$

1. Donner l'expression en fonction de q_1 et q_2 de la fonction de profit de la firme.
2. Quelles sont les quantités q_1 et q_2 que la firme doit mettre sur chacun des marchés pour maximiser son profit (vérifier que c'est bien un maximum qui est atteint) ?

Exercice 4.6. Rechercher les extréma des fonctions f ci-dessous, les variables étant liées par une contrainte de type égalité :

1. $f(x, y) = x \ln x + y \ln y$ avec $x + y = 2$
2. $f(x, y) = xy$ avec $x^2 + y^2 = 2$
3. $f(x, y) = e^{-y}\sqrt{x+1} + e^{-x}\sqrt{y+1}$ avec $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4$

Exercice 4.7. Soit $U(x_1, x_2)$ la fonction d'utilité du consommateur disposant de deux biens x_1 et x_2. On suppose que $U(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$. Maximiser l'utilité du consommateur sachant que le panier des biens (x_1, x_2) qu'il peut consommer est soumis à la contrainte de revenu $x_1 + x_2 = R$, où R est son revenu (supposé fixe).

Exercice 4.8.
1. Montrer que parmi les rectangles de périmètre donné, le carré a la plus grande surface.
2. Une usine de boites de conserves demande comment choisir le rayon de ses boites de conserves de façon à utiliser le moins de métal possible pour leur fabrication sachant que les boites sont des cylindres droits de base circulaire et de volume V donné. Il s'agit donc de minimiser la surface extérieure.

Chapitre A

Annexes

A.1 Rappels de dérivées et primitives

La première colonne du tableau de gauche donne une fonction f dont la dérivée f' est indiquée dans la seconde colonne. De même, la première colonne du tableau de droite donne une fonction f dont les primitives sont indiquées dans la seconde colonne (C désigne une constante réelle quelconque).

Attention cependant lors d'une dérivation ou d'une primitivation à l'ensemble de définition de f !

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
ax	a
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ ou $1+\tan^2(x)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\exp x$	$\exp x$

$f(x)$	$F(x)$
0	C
$ax+b$	$\frac{ax^2}{2}+bx+C$
x^n $(\forall n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}+C$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}+C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotan} x + C$
e^x	$e^x + C$
$\ln x$	$x\ln x - x + C$

TABLE A.1 – Dérivées et primitives des fonctions usuelles

A.2 Développements limités

A.2.1 Formule de Taylor-Lagrange

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in I$, $a < b$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I telle que $f^{(n+1)}$ existe sur I.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f"(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

A.2.2 Formule de Taylor-Young

Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Si f est une fonction admettant une dérivée n-ème sur I, on a, au voisinage de 0,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

A.2.3 Développements limités usuels en 0

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

A.3 Formes quadratiques

A.3.1 Classification des formes quadratiques à deux variables

Soit la forme quadratique de deux variables $q(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$ et sa matrice associée

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}.$$

On peut écrire $q(x,y) = (x,y).A.(x,y)^T$. Le type de q (ou de la matrice symétrique M) est donné par le tableau suivant :

type	cas
DP	$a > 0, b > 0, \det M > 0$
DN	$a < 0, b < 0, \det M > 0$
SDP	$a \geq 0, b \geq 0, \det M = 0$
SDN	$a \leq 0, b \leq 0, \det M = 0$
IND	$\det M < 0$

A.4 Convexité et Concavité

A.4.1 Convexité et concavité à une variable : caractérisation et extrema

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction f est dite convexe lorsque pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$ on a :

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Lorsque l'inégalité stricte est vérifiée pour tout $t \in]0,1[$ et $x \neq y$, on parle de fonction strictement convexe.
Pour le cas des fonctions dérivables, on dispose des caractérisations suivantes :
- Si f est dérivable sur I, alors f est convexe ssi f' est croissante sur I.
- Si f est deux fois dérivable sur I, alors f est convexe ssi $f'' \geq 0$ sur I.

Recherche d'extremas locaux pour les fonctions d'une variable :
- Condition suffisante pour un extremum local : si f est dérivable sur I, et si a est un point intérieur à I où la dérivée de f s'annule en changeant de signe, alors f atteint un extremum local en a.

A.4.2 Convexité et concavité à plusieurs variables : caractérisation et extrema

La convexité ou concavité d'une fonction réelle à plusieurs variables est définie seulement sur des ensembles convexes. Un ensemble est dit **convexe** si et seulement si tout segment de droite joignant deux points de l'ensemble est entièrement inclu dans l'ensemble.

Définition A.1. Une fonction f à deux variables est dite *convexe* sur un ensemble convexe si et seulement si tout segment de droite reliant deux points du graphe $\mathcal{G}$ de f est toujours *au-dessus* de cette surface.
Une fonction f à deux variables est dite *concave* sur un ensemble convexe si et seulement si tout segment de droite reliant deux points du graphe $\mathcal{G}$ de f est toujours *au-dessous* de cette surface.

Proposition A.1. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction sur un ouvert **convexe** de $U \subset \mathbb{R}^n$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ pour simplifier et on note $H^f(x)$ sa matrice Hessienne au point $x \in U$. Alors :
- f est *convexe* sur U ssi $H^f(x)$ est semi-définie positive (SDP) pour tout $x \in U$,
- si $H^f(x)$ est définie positive (DP) pour tout $x \in U$ alors f est strict. *convexe* sur U,
- f est *concave* sur U ssi $H^f(x)$ est semi-définie négative (SDN) pour tout $x \in U$,
- Si $H^f(x)$ est définie négative (DN) pour tout $x \in U$ alors f est strict. *concave* sur U.

Proposition A.2. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction sur un ouvert **convexe** de $U \subset \mathbb{R}^n$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$ pour simplifier et on note $H^f(x)$ sa matrice Hessienne au point $x \in U$. Soit $\mathbf{x}^*$ un point stationnaire de la fonction f (c'est à dire $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$).

- Si $H^f(\mathbf{x}^*)$ est définie positive (DP), alors $\mathbf{x}^*$ est un minimum local strict,
- Si $H^f(\mathbf{x}^*)$ est définie négative (DN), alors $\mathbf{x}^*$ est un maximum local strict,
- Si $H^f(\mathbf{x}^*)$ est indéfinie, alors $\mathbf{x}^*$ est un point selle.
- Si $det(H^f(\mathbf{x}^*)) = 0$, alors on ne peut pas conclure sur la nature du point stationnaire $\mathbf{x}^*$.