I Vade-Mecum

Règles : Les travaux sont effectués en binôme : un travail copié ou effectué en collaboration entre N binômes divise les notes des binômes concernés par N.
Cette seconde partie du projet se déroule sur 3h30, de 14h à 17h30. Le rapport et les codes sources devront être envoyés par mail (ou rendu sur papier pour les rapports manuscrits) **avant 17h30**.

Objectif et contenu : Le projet consiste en la résolution mathématique d'un problème et sa mise en oeuvre informatique. Le **rapport** devra donc d'une part répondre aux questions théoriques posés dans l'énoncé et d'autre part expliquer les choix d'implémentation. Ce deuxième point nécessite tout d'abord la description précise des fonctions implémentées (les types des arguments et les propriétés mathématiques qu'ils doivent vérifier, la définition mathématique de la sortie, la description du fonctionnement de l'algorithme, ...). Ensuite, les résultats obtenus dans les applications numériques devront être vérifiés, analysés et commentés.
Les **codes sources (fichiers sci et sce)** seront réalisés de manière modulaire, les variables auront des noms explicites, ou au moins univoque. On vérifiera qu'ils sont compilables et que les sorties obtenues à partir d'un historique vide sont celles attendues.
NB : Il est recommandé de lire intégralement l'énoncé en premier lieu.

II Epitome

On étudie les phénomènes électriques accompagnant le battement cardiaque, ou plus précisément, le comportement électrique d'une cellule cardiaque, en essayant de mettre en évidence des propriétés mathématiques significatives. On donne une définition générale des systèmes différentiels autonomes et des phénomènes oscillatoires avec relaxation. On propose un modèle analogique de la contraction d'une cellule du cœur comme exemple d'un phénomène oscillatoire avec relaxation. Ce modèle conduit à l'équation de Van der Pol, dont on rappelle des propriétés qualitatives. On insiste sur le problème de la validation du modèle en soulignant les relations avec les résultats de Van der Pol et Van der Mark au début du vingtième siècle.

III Introduction : modèle du battement du cœur et oscillations avec relaxation

Déjà à la fin du dix-neuvième siècle, on savait que l'activité cardiaque est associée à la production d'une quantité de courant électrique. On a commencé à quantifier ce courant au début du vingtième siècle (électrocardiogramme). La cellule cardiaque est une cellule polarisée qui a, le long de sa paroi, une série de dipôles, chargés positivement sur la surface externe, et négativement sur la surface interne, quand le cœur est au repos (diastole). Quand la cellule est excitée, il y a une chute de la constante diélectrique de la membrane et on a donc des charges négatives qui passent à l'extérieur. Ce phénomène se poursuit jusqu'à la dépolarisation de la cellule, qui atteint alors son

état d'excitation (systole). Après un court délai, des processus physiques et chimiques *réparent* la cellule et la repolarisent. Le procédé de repolarisation est plus lent que celui de dépolarisation.
Le battement du cœur fait partie des systèmes naturels auto-excités (à partir de n'importe quelle condition initiale, le système approche rapidement un cycle limite stable) pour lesquels on peut remarquer des oscillations avec relaxation. En citant Van der Pol et Van der Mark, plusieurs phénomènes présentent ce type d'oscillations : *harpe éolienne, marteau pneumatique, grincement d'un couteau sur une assiette, mouvement d'un drapeau dans le vent,.. tube à néon,... et finalement, le battement du cœur.* Ces phénomènes oscillatoires se caractérisent par les propriétés suivantes :

— Ce sont des oscillateurs de relaxation (le système passe périodiquement d'un état à une autre).
— Leur période est constante.
— La forme de l'onde est sensiblement différente d'une onde sinusoïdale.
— L'amplitude de l'onde est indépendante de la force extérieure appliquée pourvu que cette force soit assez petite.
— La période, en revanche, dépend de la force extérieure appliquée. Si celle-ci est périodique, le système de relaxation tend à se synchronier pour devenir périodique avec la même période que celle de la force extérieure.

Pour donner un exemple de systèmes auto-excités, on considère un circuit électrique **LRC**, décrit par la loi de Kirchoff, la loi de Faraday et la loi d'Ohm généralisée (non-linéaire). En notant x l'intensité du courant dans l'inductance **L** et y la tension aux bornes du condensateur **C**, et en normalisant les constantes physiques, on obtient le système d'équations différentielles : pour $t \in [0, T]$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & C\left(y(t) - f(x(t))\right), \\ y'(t) & = & -x(t). \end{array} \right. \tag{1}$$

Si dans la loi d'Ohm généralisée, on choisit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, le système (1) est appelé système de Van der Pol. Il peut se réécrire, pour $t \in [0, T]$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & C\left(y(t) - \frac{1}{3}x(t)^3 + x(t)\right), \\ y'(t) & = & -x(t). \end{array} \right. \tag{2}$$

ou bien

$$\frac{1}{C}x''(t) + \left(x(t)^2 - 1\right)x'(t) + x(t) = 0.$$

On va essayer dans la Section V de montrer qu'en choisissant opportunément les paramètres, l'équation (2) peut décrire une système naturel auto-excité avec des oscillations avec relaxation.

IV Système différentiel autonome

Un système différentiel est défini par une fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Si $X : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ est continûment dérivable, on peut écrire le système différentiel ainsi : pour tout $t \in I$, $X'(t) = F(t, X(t))$.
Le système différentiel est dit *autonome* si F ne dépend pas du temps : $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Ainsi (1) est un système différentiel autonome avec $d = 2$, $X(t) = (x(t), y(t))$ et si $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et

$$F(X) = \begin{pmatrix} C(y - f(x)) \\ -x \end{pmatrix},$$

alors (1) équivaut à

$$X'(t) = F(X(t)). \tag{3}$$

Un point d'équilibre de (3) est un point $X_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(X_0) = 0$. Ce point est instable si la partie réelle des valeurs propres de la différentielle de F en X_0, notée $\mathrm{d}F(X_0)$, qui est une matrice d'ordre 2, est strictement positive.

V Etude qualitative de l'équation de Van der Pol

On considère le système de Van der Pol, à $C = 1$ fixé, pour $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) - \frac{1}{3}x(t)^3 + x(t), \\ y'(t) &= -x(t). \end{cases} \tag{4}$$

Question 1

1. Montrer que le problème de Cauchy de (4) a une unique solution pour toute donnée initiale.
2. Montrer que le seul point d'équilibre de (4) est (0,0) et qu'il est instable.
3. Montrer que les trajectoires tournent dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'origine.

On va utiliser les schémas d'Euler explicite et de Runge Kutta d'ordre 4 (RK4) pour approcher numériquement les solutions de (4). On partitionne uniformément $[0, T]$ en $N - 1$ intervalles et on note le pas en temps $h = \frac{T}{N}$.

Question 2

1. Ecrire le schéma d'Euler explicite de (4).
2. Implémenter le schéma d'Euler explicite avec Scilab. On résoudra pour $t \in [0, 20]$, avec trois conditions initiales : $x(0) = y(0) = 0.1$, $x(0) = y(0) = 1$ et $x(0) = y(0) = 4$. Afficher sur un même graphe les trois graphes de $x(.)$ (pour les trois conditions initiales). Faire de même pour $y(.)$ dans une autre fenêtre.
3. Répondre aux deux questions précédentes, en utilisant le schéma de RK4.

VI Choix du paramètre C

On essaye de choisir une valeur de C pour (2) de telle sorte que le comportement soit oscillatoire avec relaxation et qu'il soit sensiblement non sinusoïdal.

Question 3

1. En faisant tourner le code RK4 pour des valeurs de $C \in]0, 1[$, justifier, avec les courbes, que cette gamme de valeurs pour C n'est pas celle que l'on recherche.
2. Si $C >> 1$ (par exemple $C = 100$), tracer la fonction $y(t) - \frac{1}{3}x(t)^3 + x(t)$. Puis justifier avec (2) le fait que la courbe s'applatit sur l'axe des abscisses. Le vérifier numériquement.
3. Pour $C < 0$, justifier avec (2) que le comportement des solutions n'est pas celui qui est souhaité.
4. Pour $C = 20$, justifier, avec la courbe, que le comportement des solutions est celui qui est souhaité.

5. On choisit les valeurs numériques suivantes : $C = 20$, $T = 10$, $N = 400$. Afficher les courbes de $x(t)$ obtenues avec Euler et RK4. Pourquoi la solution obtenue avec Euler explose-t-elle, tandis que celle obtenue avec RK4 donne une oscillation avec relaxation ? Que peut-on en conclure ?

Dorénavant, on n'utilise plus que RK4 comme schéma numérique.

VII Solutions forcées

On se fixe le paramètre de relaxation $C = 100$. On impose une force périodique $g(t) = C\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ dans (2). Cette force a pour amplitude $C = 100$ et une période $P = 10$. Le système différentiel devient

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & C(y(t) - \frac{1}{3}x(t)^3 + x(t) + 2g(t)), \\ y'(t) & = & -x(t). \end{array}\right. \tag{5}$$

Question 4 Tracer le graphe de $x(t)$ sur $[0, 30]$ avec un pas en temps petit (de l'ordre de 2E-3) et une condition initiale pour x et y de 0.4 et -2.43 respectivement. Ecrire un programme qui évalue la période de la trajectoire à l'aide des valeurs de x calculées et la comparer à P. Est-ce cohérent avec ce que l'on souhaite (*cf* III).