Résumé des propriétés des fonctions trigonométriques

La Figure 1 illustre la mesure des angles en radian sur le cercle trigonométrique, la construction géométrique des sinus, cosinus et tangente d'un angle, les graphes des fonctions sinus, cosinus et tangente.

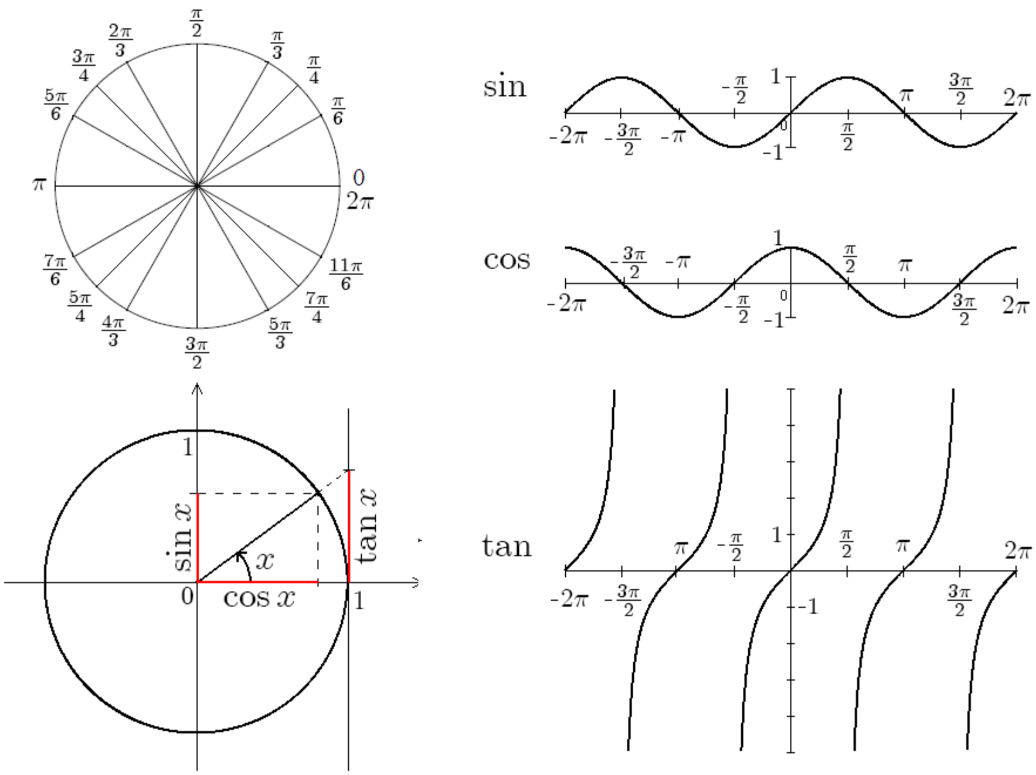

FIGURE 1 – Définition géométrique et graphe des fonctions trigonométriques sin, cos et tan.

La mesure d'un angle est définie à 2π près, c'est-à dire : θ et θ' sont deux mesures d'un même angle si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$. La donnée d'un intervalle semi-ouvert de longueur 2π permet de définir la mesure principale d'un angle (habituellement $[0, 2\pi[$ ou $]-\pi, \pi]$) alors définie de manière univoque pour chaque angle.

Considérons le cercle trigonométrique, dans un repère plan orthonormé, de centre l'origine et de rayon 1, notons A le point de coordonnées $(1, 0)$ et considérons un point M sur ce cercle. La mesure principale de l'angle (OA, OM) dans $[0, 2\pi[$ est la longueur de l'arc de cercle compris en tournant dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre) entre A et M. Réciproquement, la donnée de la mesure d'un angle θ permet de donner sa mesure principale $x \in [0, 2\pi[$ et donc de construire M tel que $(OA, OM) = x$.

On définit les fonctions cos et sin de la manière suivante. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note alors θ l'angle de mesure x. Les coordonnées de M tel que $(OA, OM) = \theta$ définissent alors $\cos x$ et $\sin x$: $M = (\cos x, \sin x)$. Les fonctions sin et cos sont donc définies sur tout $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$. Comme deux réels différant d'un multiple de 2π sont deux mesures d'un même angle et définissent donc le même point M, leur cosinus et leur sinus sont égaux. Les fonctions cos et sin sont donc 2π-périodiques : pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$. Ces fonctions associent donc la même valeur à toutes mesures d'un même angle.

Quelques valeurs particulières :

$$
\begin{array}{llll}
\cos 0 = 1, & \cos \frac{\pi}{2} = 0, & \cos \pi = -1, & \cos \frac{3\pi}{2} = 0, \\
\sin 0 = 0, & \sin \frac{\pi}{2} = 1, & \sin \pi = 0, & \sin \frac{3\pi}{2} = -1, \\
\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, & \\
\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, & \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. &
\end{array}
$$

Comme

$$\cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z},$$

la fonction π-périodique $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est définie sur

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Formulaire :

$$
\begin{array}{lll}
\cos(-a) = \cos a, & \sin(-a) = -\sin a, & \tan(-a) = -\tan a, \\
\cos(\pi - a) = -\cos a, & \sin(\pi - a) = \sin a, & \tan(\pi - a) = -\tan a, \\
\cos(\pi + a) = -\cos a, & \sin(\pi + a) = -\sin a, & \tan(\pi + a) = \tan a, \\
\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin a, & \sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a, & \tan(\frac{\pi}{2} - a) = \text{cotan } a = \frac{1}{\tan a}, \\
\cos(\frac{\pi}{2} + a) = -\sin a, & \sin(\frac{\pi}{2} + a) = \cos a, & \tan(\frac{\pi}{2} + a) = -\text{cotan } a = -\frac{1}{\tan a}.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, & \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \\
\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b, & \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.
\end{array}
$$

Propriété fondamentale : $\forall a \in \mathbb{R}, \cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

Le formulaire et les valeurs particulières permettent de retrouver toutes les valeurs de cos, sin et tan de tous les angles matérialisés sur le cercle trigonométrique de la Figure 1 (en haut à gauche).

Les fonctions trigonométriques classiques induisent des bijections (voir Figures 1 et 2) :

- sin induit une bijection entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[-1, 1]$,
- cos induit une bijection entre $[0, \pi]$ et $[-1, 1]$,
- tan induit une bijection entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$.

Les bijections réciproques sont respectivement notées :

- arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
- arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$,
- arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

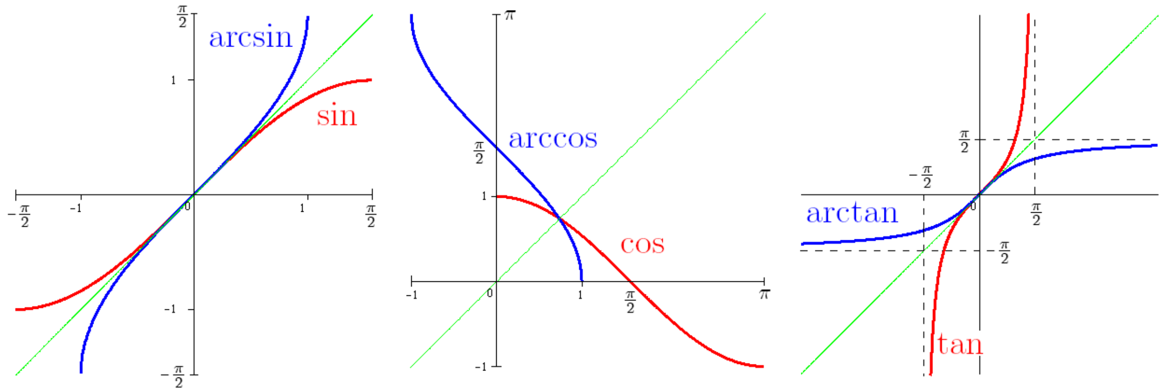

FIGURE 2 – Graphes des restrictions bijectives des fonctions sin, cos et tan et des bijections réciproques arcsin, arccos et arctan.

Résumé de cours sur les nombres complexes

Le nombre imaginaire i est introduit comme solution de $x^2 = -1$ et vérifie donc

$$i^2 = -1.$$

On construit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes qui est en bijection avec $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ à l'aide de i et des propriétés des opérations (multiplication, addition) héritées de celles sur $\mathbb{R}$. Ainsi un nombre complexe s'écrit sous sa forme dite "cartésienne" : $z = a + ib$ avec a et b des réels. Le réel $a = \Re(z)$ est appelé la "partie réelle" de z et $b = \Im(z)$ sa "partie imaginaire".

Le complexe z est représenté dans le plan (muni d'un repère cartésien d'origine O) par un unique point $M = (a, b)$ appelé "image" de z. Réciproquement, le complexe z est appelé "l'affixe" de M (voir Figure 3, panel de gauche).

Le module $|z|$ de z est la distance entre O et M, soit $|a+ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}^+$. Pour $z \neq 0$, c'est-à-dire $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, un argument de z est une mesure de l'angle entre le demi-axe des abscisses positives $[O, x)$ et la demi-droite $[O, M)$. En prescrivant un intervalle de longueur 2π, on définit l'argument (principal) de z comme l'unique mesure de cet angle appartenant à l'intervalle prescrit, alors noté $Arg(z)$.

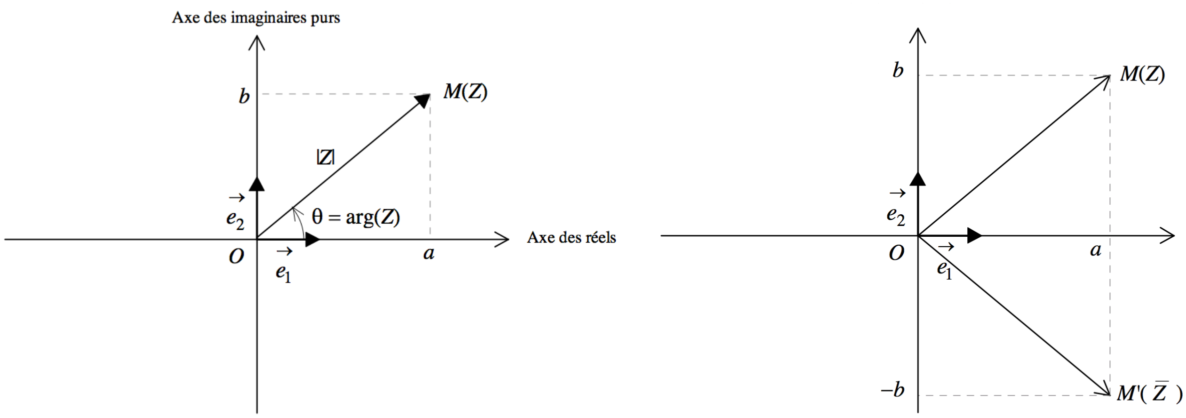

FIGURE 3 –

Conjugué

Le conjugué de $z = a + ib$ est le complexe $\bar{z} = a - ib$. L'image de $\bar{z}$ est le symétrique de l'image de z par rapport à l'axe des abscisses (voir Figure 3, panel de droite).

Pour tous complexes z et z', on a :

$$\begin{array}{lll} z\bar{z} = |z|^2, & \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', & \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, \\ \overline{z^n} = (\bar{z})^n, & z + \bar{z} = \Re(z), & z - z' = 2i\Im(z), \\ z \text{ est réel } \iff z = \bar{z}, & z \text{ est imaginaire pur } \iff z = -\bar{z}. & \end{array}$$

Forme polaire

Un complexe de module $|z| = r > 0$ et d'argument θ s'écrit sous sa forme polaire

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta}$$

Les propriétés de l'exponentielle réelle sont conservées dans $\mathbb{C}$.
On a : $z = r\mathrm{e}^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$. Ainsi :

$$i = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = \mathrm{e}^{i\pi}, \quad -i = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}} = \mathrm{e}^{i\frac{-\pi}{2}}.$$

Pour tous z et z' complexes :

$$\begin{array}{lll} |zz'| = |z||z'|, & Arg(zz') = Arg(z) + Arg(z') + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z}. \\ |z^n| = |z|^n, & Arg(z^n) = n\, Arg(z) + 2k\pi & \text{où } k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Trouver l'argument d'un complexe sous forme cartésienne

Soit $z = a + ib$, a et b réels. On peut calculer son module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
On trouve son argument θ en résolvant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} |z| \cos\theta & = & a, \\ |z| \sin\theta & = & b. \end{array} \right.$$

On peut exprimer les solutions de plusieurs manières en utilisant les bijections réciproques des fonctions trigonométriques. On suppose que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ (dans le cas contraire, il est très facile de trouver un argument parmi $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ selon le cas... laissé en exercice).

$$\theta = \left\{ \begin{array}{r} \arctan\dfrac{b}{a} + 2k\pi \text{ si } a > 0 \\ \pi + \arctan\dfrac{b}{a} + 2k\pi \text{ si } a < 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{r} \arccos\dfrac{a}{|z|} + 2k\pi \text{ si } b > 0 \\ -\arccos\dfrac{a}{|z|} + 2k\pi \text{ si } b < 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{r} \arcsin\dfrac{b}{|z|} + 2k\pi \text{ si } a > 0 \\ \pi - \arcsin\dfrac{b}{|z|} + 2k\pi \text{ si } a < 0 \end{array} \right.$$

Racine n-ième d'un complexe

Il existe n solutions complexes de $z^n = 1$:

$$U_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad | \quad k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\} \right\}.$$

appelées racines n-ièmes de l'unité. Les images des racines n-ièmes de l'unité sont les sommets du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique et admettant 1 pour sommet.

Pour tout $z_0 = |z_0|\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, il existe n solutions complexes de $z^n = z_0$:

$$S_n = \left\{ |z_0|^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad | \quad k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\} \right\}.$$

Les images des racines n-ièmes de z sont les sommets du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $|z_0|^{\frac{1}{n}}$ et admettant $|z_0|^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}$ pour sommet.