

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ
PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS 6

LABORATOIRE JACQUES-LOUIS LIONS
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

*Relaxation et
Oscillations en Salves*

Alexandre VIDAL

Soutenance le 2 juillet 2007

Directeur de thèse: Prof. Jean-Pierre FRANÇOISE

Jury: Prof. Jacques DEMONGEOT (Rapporteur)
Prof. Robert ROUSSARIE (Rapporteur)
Prof. Pierre AUGER
Prof. Moulay AZIZ-ALAOUI
Prof. Eric BENOIT
Prof. Alain HARAUX

Table des matières

Introduction	1
1 Systèmes dynamiques lents-rapides et perturbations singulières	3
1.1 Notations	3
1.2 Dynamiques lentes-rapides	5
1.2.1 L’approche générale et le théorème de Takens	5
1.2.2 Le théorème de Tikhonov	8
1.3 Perturbations singulières	12
1.3.1 Variétés invariantes normalement hyperboliques	12
1.3.2 Persistance des variétés normalement hyperboliques	13
1.4 Graphiques et ensembles limite-périodiques	14
1.5 Ultrastabilité	16
2 Bifurcations dynamiques	18
2.1 Forme normale d’une bifurcation dynamique	18
2.2 Bifurcation pli dynamique	18
2.2.1 Forme normale	19
2.2.2 Intégration à l’aide des fonctions d’Airy	20
2.2.3 Comportement asymptotique pour $\varepsilon \rightarrow 0$	23
2.3 Retard à la bifurcation	25
2.3.1 Forme normale de la bifurcation de Hopf dynamique	25
2.3.2 Analyse du système local	26
2.4 Phénomène “Canard”	28
3 Analyse des transitions	31
3.1 Outils d’analyse du flot au voisinage d’un point non hyperbolique de la dynamique rapide	31
3.1.1 Les développements asymptotiques	31
3.1.2 Les éclatements à paramètre	32
3.2 Application à la bifurcation pli	33
3.2.1 Transition au voisinage d’un point de bifurcation pli de la dynamique rapide	34
3.2.2 Courbe de bifurcations plis dans l’espace	36
3.3 Oscillations de relaxation	38
3.3.1 Relaxation dans le plan	38

3.3.2	Relaxation dans l'espace	39
3.3.3	Exemple	40
3.4	Bifurcation de Hopf dans un système de relaxation	40
3.4.1	Description	40
3.4.2	Notion d'excitabilité	41
3.4.3	Simulation	42
4	Bifurcation transcritique dynamique	44
4.1	Forme normale	44
4.1.1	Description du flot local	44
4.1.2	Intégration de la forme normale	45
4.1.3	Développement de la fonction de transition	46
4.2	Forme locale perturbée	51
4.2.1	Ensemble critique et variétés invariantes	52
4.2.2	Eclatement à paramètre	52
4.3	Analyse de transition	64
4.3.1	Développement asymptotique de la fonction de transition	64
4.3.2	Transition transcritique d'un système global	66
5	Un autre type d'oscillations de relaxation	69
5.1	Système de relaxation transcritique-pli dans le plan	69
5.1.1	Description du système	70
5.1.2	Décomposition de l'application de Poincaré	71
5.1.3	Développement des fonctions de transitions	72
5.1.4	Existence et unicité de l'orbite périodique attractive	75
5.1.5	Simulations	76
5.2	Un contre-exemple à l'ultrastabilité selon Ashby	77
5.2.1	Accroissement du délai	78
5.2.2	Auto-amplification du retard à la bifurcation	80
5.3	Courbe \mathcal{T} de bifurcations transcritiques de la dynamique rapide	81
5.3.1	Forme normale	81
5.3.2	Forme locale perturbée	81
5.3.3	Analyse de la transition au voisinage de \mathcal{T}	82
5.3.4	Développement asymptotique de la fonction de transition	91
5.3.5	Transition transcritique d'un système global	92
5.4	Système de relaxation transcritique-pli dans l'espace	95
5.4.1	Description de la classe de systèmes	95
5.4.2	Application de Poincaré	97
5.4.3	Existence et unicité de l'orbite périodique attractive	100
6	Oscillations en salves	102
6.1	De la relaxation aux oscillations en salves	102
6.1.1	Couplage de deux systèmes de Van der Pol	103
6.1.2	Etude des points singuliers et bifurcations	104
6.1.3	Description du flot et projection des orbites dans (x, y, z)	106
6.2	Oscillations en salves et bistabilité : le système de Hindmarsh-Rose	109

6.3	Analyse le long d'une variété persistante de cycles limites rapides . . .	111
6.3.1	Phase asymptotique	111
6.3.2	Perturbation de l'application de retour	113
6.3.3	Généralisation	116
7	Oscillations en salves et transition col-noeud transcritique	118
7.1	Bifurcation col-noeud transcritique	118
7.1.1	Forme normale de la bifurcation col-noeud transcritique dynamique	119
7.1.2	Forme locale perturbée	120
7.1.3	Transition col-noeud transcritique d'un système global	122
7.2	Position du problème	124
7.2.1	Comportement qualitatif du flot	126
7.2.2	Connexions hétéroclines de la dynamique rapide	126
7.3	Décomposition de l'application de Poincaré	127
7.4	Existence et unicité de l'orbite périodique	130
8	Rupture d'oscillations par bifurcation homocline	132
8.1	Bifurcations homoclines du cycle limite rapide	132
8.1.1	Comportement qualitatif du flot	132
8.1.2	Analyse au voisinage du point homocline	134
8.1.3	Construction de l'application de retour au voisinage de $C_{z_{H_1}}$	135
8.1.4	Caractérisation des orbites suivant la variété $\mathcal{W}_\varepsilon^c$	138
8.2	Distribution des orbites périodiques	140
8.2.1	Alternance de comportement	140
8.2.2	Ensemble limite-discrète périodique	143
8.3	Applications au système tritrophique	145
8.3.1	Présentation	145
8.3.2	Analyse de l'ensemble critique	146
8.3.3	Analyse de bifurcations	147
8.3.4	Portrait de phase et simulations	149
	Conclusion et perspectives	155

Introduction

Parmi les nombreuses motivations qui conduisent un mathématicien à s'intéresser aux dynamiques lentes-rapides, on peut mentionner les neurosciences. Il s'agit d'un domaine actuellement en plein essor. Nous disposons d'un matériel exceptionnel de données expérimentales sur les oscillations des neurones et les enjeux sont considérables. Comment les neurones encodent-ils une information et la transmettent-ils sur des oscillations de l'ordre de la milliseconde (cf. [44]) ? Quelle est la stabilité de l'information encodée sous des perturbations périodiques ou aperiodiques ? Il y a une trentaine d'années sont apparues les premières explications utilisant des modèles mathématiques de la forme de ces oscillations et un début de classification. Les précurseurs, tels John Rinzel, Nancy Kopell, Bard Ermentrout, ont montré ce que l'approche "oscillateurs faiblement couplés" apportait aux neurosciences. Ils ont ainsi ouvert une voie de recherche largement développée dans le monde.

Cette thèse contient, tout d'abord, les rappels techniques nécessaires pour aborder la littérature sur les systèmes lents-rapides : l'approche générale des dynamiques lentes-rapides avec la justification de la « dissection »¹ qui consiste à geler les variables lentes et à se concentrer sur les bifurcations de la dynamique rapide en considérant la dynamique lente comme passive. Nous citons également les théorèmes à la base de la théorie géométrique des perturbations singulières : les théorèmes de Takens, de Tikhonov et de Fénichel. Nous nous appuyons également sur la théorie des bifurcations afin d'étudier les transitions entre les différentes phases des oscillations.

Notre apport original consiste à étudier une nouvelle forme de transition entre phases lente et rapide faisant intervenir les bifurcations transcritiques. Notre analyse de ce mécanisme d'éjection, fondée sur des techniques d'éclatement à paramètre (« Blow-up »), permet d'obtenir un développement asymptotique des trajectoires. En utilisant ces résultats pour décomposer l'application de Poincaré, nous pouvons caractériser le comportement global du flot sous certaines conditions. Nous nous intéressons alors plus particulièrement à la distribution (parfois l'unicité) des orbites périodiques associées,

¹Cette terminologie est une traduction directe de la terminologie anglo-saxonne utilisée par J. Rinzel.

selon le cas, aux oscillations de relaxation et aux oscillations en salves.

Par ailleurs, nous repérons dans ce type de transitions un phénomène “canards”. Après avoir été découverts en 1981 par l’école d’analyse non-standard française, les canards ont été étudiés dans le cadre de la théorie des bifurcations par Freddy Dumortier et Robert Roussarie (cf. [17]). Des études récentes leur sont consacrées en neuroscience, comme les travaux de Martin Wechselberger et Jonathan Rubin. Nous discutons donc la notion d’ensembles limite-périodiques dans les cas où une famille d’orbites périodiques existe. Nous mettons alors en avant l’apparition de canards dans des conditions moins contraignantes que pour les systèmes sur lesquels ils ont déjà été découverts. En outre, ceci mène à la découverte de phénomènes nouveaux comme l’auto-amplification du retard à la bifurcation et l’apparition d’ensembles limite-périodiques complexes.

Parmi les apports originaux de ce travail, nous utilisons également une généralisation de la notion de phases asymptotiques aux variétés lentes formées de cycles limites attractifs grâce à la théorie de Fénichel. Ceci nous permet d’étudier le comportement des orbites d’un système bistable donnant naissance à des oscillations en salves quand apparaît une connexion homocline. Nous découvrons alors de nouveaux phénomènes temporels complexes associés à la bifurcation homocline de la dynamique rapide.

Parmi les systèmes auxquels on peut appliquer ces résultats, nous nous intéressons aux dynamiques de populations et, plus particulièrement, à un système tritrophique lent-rapide. Nous discutons, à l’aide des mêmes techniques, la distribution des orbites périodiques. A cet effet, le logiciel libre XPPAUT développé par Bard Ermentrout nous a été très utile pour appuyer nos propos par des simulations numériques.

Cette étude a donné naissance aux articles suivants :

- *Stable Periodic Orbits Associated with Bursting Oscillations in Population Dynamics*, Lectures Notes in Control and Information Sciences vol. 341, Springer Berlin / Heidelberg, 2006.
- *Periodic orbits of Tritrophic Slow-Fast Systems and Double Homoclinic Bifurcations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B, 2007.
- En collaboration avec J.P. Francoise et C. Piquet : *Enhanced delay to bifurcations*, (soumis à publication).

Chapitre 1

Systemes dynamiques lents-rapides et perturbations singulières

1.1 Notations

Pour un champ de vecteurs X différentiable sur \mathbb{R}^k , nous noterons ϕ_t^X le flot associé. Pour $V \subset \mathbb{R}^k$, $I \subset \mathbb{R}$, on note :

$$\phi_I^X(V) = \{\phi_t^X(p) | p \in V, t \in I\}$$

Si $\{p\} = V \subset \mathbb{R}^k$, nous noterons $\phi_I^X(V) = \phi_I^X(p)$. Donc, si I est un intervalle de \mathbb{R} contenant 0, $p \in \mathbb{R}^k$, $\phi_I^X(p)$ est donc la trajectoire définie pour les valeurs de $t \in I$ du système associé à X passant par p à $t = 0$. On note de plus :

$$\begin{aligned} A_I^X(V) &= \{p \in V | \overline{\phi_I^X(p)} \subset V\} \\ A_+^X(V) &= \{p \in V | \overline{\phi_{[0,+\infty)}^X(p)} \subset V\} \\ A_-^X(V) &= \{p \in V | \overline{\phi_{(-\infty,0]}^X(p)} \subset V\} \\ I^X(V) &= \{p \in V | \overline{\phi_{(-\infty,+\infty)}^X(p)} \subset V\} \end{aligned}$$

Une sous-variété \mathcal{W} de \mathbb{R}^k est dite invariante sous le flot de X si, pour tout $p \in \mathcal{W}$, il existe un intervalle I de \mathbb{R} contenant 0 et non réduit à un point tel que :

$$\phi_I^X(p) \subset \mathcal{W}$$

Soit \mathcal{W} une variété invariante sous le flot de X . On note alors, en chaque point x de \mathcal{W} , $T_x\mathcal{W}$ l'espace tangent, $N_x\mathcal{W}$ l'espace normal et $\Pi : T_x\mathbb{R}^k \rightarrow N_x\mathcal{W}$ la projection

orthogonale. Grâce à $D\phi_t^X$, l'application linéaire tangente au flot ϕ_t^X , on définit :

$$\begin{aligned} v(t) &= D\phi_t^X v(0) \\ w(t) &= \Pi D\phi_t^X w(0) \end{aligned}$$

pour $v(0) \in T_x\mathcal{W}$ et $w(0) \in N_x\mathcal{W}$. Nous pouvons alors généraliser la notion de stabilité asymptotique aux variétés invariantes.

Définition 1.1¹ *La variété \mathcal{W} est dite "normalement contractante" si, pour toutes données initiales $v(0) \neq 0$, $w(0)$:*

$$\exists k, C > 0, \forall t > 0, \frac{|w(t)|}{|v(t)|} < Ce^{-kt}$$

Elle est dite "normalement dilatante" si, pour toutes données initiales $v(0) \neq 0$, $w(0)$:

$$\exists k, C > 0, \forall t < 0, \frac{|w(t)|}{|v(t)|} < Ce^{kt}$$

Elle est dite "normalement hyperbolique" si :

- il existe une décomposition $T\mathbb{R}_{|\mathcal{W}}^k = \mathcal{S} + \mathcal{U}$ en deux sous-fibrés vectoriels au-dessus de \mathcal{W} contenant $T\mathcal{W}$ et invariants par $D\phi_t^X$, telle que :
- il existe des supplémentaires $N\mathcal{S}$ et $N\mathcal{U} : N\mathcal{S} \oplus T\mathcal{W} = \mathcal{S}, N\mathcal{U} \oplus T\mathcal{W} = \mathcal{U}$ tels que :
- pour tout $v(0) \in T_x\mathcal{W}$, $w(0) \in N_x\mathcal{S}$, il existe $k_s, C_s > 0$ tels que :

$$\forall t > 0, \frac{|w(t)|}{|v(t)|} < C_s e^{-k_s t}$$

- pour tout $v(0) \in T_x\mathcal{W}$, $w(0) \in N_x\mathcal{U}$, il existe $k_u, C_u > 0$ tels que :

$$\forall t < 0, \frac{|w(t)|}{|v(t)|} < C_u e^{k_u t}$$

Dans le cas particulier où \mathcal{W} est réduite à un point singulier stable, nous retrouvons la notion de point singulier asymptotiquement stable. Dans le cas où \mathcal{W} est un cycle limite, nous ne pouvons trouver la décomposition $S + U$ vérifiant les propriétés de la définition que si tous les exposants caractéristiques de Floquet sont non nuls. Nous retrouvons donc la définition de cycle limite hyperbolique.

L'utilisation de l'attraction d'une variété normalement contractante nécessitera de bien contrôler le comportement des orbites le long de cette variété. A cet effet, nous introduisons également la terminologie suivante :

¹Cette définition est directement adaptée de celle utilisée par Fenichel dans [22]. Elle s'appuie sur les hypothèses des théorèmes de persistance des variétés locales stables et instables associées à une variété invariante.

Définition 1.2 Une fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, \varepsilon) \rightarrow f(u, \varepsilon) \end{cases}$$

est dite *exponentiellement petite* par rapport à $\varepsilon \ll 1$ s'il existe une constante positive c telle que :

$$|f| + \|\nabla f\| \leq \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}\right)$$

où ∇f désigne le gradient de f par rapport à $u \in \mathbb{R}^k$.

1.2 Dynamiques lentes-rapides

La modélisation de certaines dynamiques nécessite de considérer des échelles de temps d'évolution différentes pour les différentes variables d'un même système. Par utilisation de paramètres considérés petits devant les dynamiques de certaines composantes de l'espace des phases, nous sommes en mesure de reproduire cette distinction. Ceci donne naissance à la notion de dynamique lente-rapide que nous présentons dans cette section.

1.2.1 L'approche générale et le théorème de Takens

Définition 1.3 Une "dynamique lente-rapide" est un champ de vecteurs différentiable défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de la forme :

$$(S_\varepsilon) : \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = g(x, y, \varepsilon) \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

où les fonctions f et g sont lisses dans un sens qui est à préciser selon le cas (C^r , C^∞ , C^ω). Le paramètre ε représente le rapport entre les deux échelles de temps des variables x et y et est supposé petit strictement positif, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. Les composantes de $x \in \mathbb{R}^m$ sont appelées les "variables rapides", celles de $y \in \mathbb{R}^n$ sont les "variables lentes".

Le changement de variable temporelle (« Rescaling ») :

$$t = \varepsilon \cdot \tau, \quad dt = \varepsilon \cdot d\tau \quad (1.2)$$

permet d'obtenir un système équivalent à (S_ε) (défini suivant une autre échelle de temps) :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{cases} \quad (1.3)$$

Nous appelons “système lent-rapide” un système du type (S_ε) ou (P_ε) . La première équation de (S_ε) (resp. (P_ε)) constitue la dynamique rapide et la deuxième la dynamique lente. Dans toute cette thèse, pour un système lent-rapide (S_ε) (resp. (P_ε)) donné, nous appellerons (P_ε) (resp. (S_ε)) le système associé par le changement de variable temporelle (1.2) (resp. son inverse).

On remarquera que dans la conception des dynamiques lentes-rapides, “ ε petit” n’a pas de sens intrinsèque. La question du bien fondé de cette approche a déjà été posée (voir [50]) afin de donner une interprétation du point de vue utilisé par beaucoup de travaux sur ce type de systèmes, souvent en application aux sciences du vivant. Par la suite, nous envisageons ces dynamiques sous l’angle de la théorie des perturbations. Toutes les notions et les résultats concernant les systèmes du type (1.1) ou (1.3) sont donc établis pour toutes valeurs de ε (ou au moins, une suite strictement décroissante et de limite nulle) inférieures à $\varepsilon_0 > 0$ fixé selon le contexte.

Dans cette optique, nous considérons les systèmes suivants caractéristiques des dynamiques “non perturbées” et sur lesquels nous serons amenés à poser des hypothèses à caractères analytiques, dynamiques et géométriques.

Définition 1.4 *Le système différentiel avec contrainte :*

$$(S_0) : \begin{cases} f(x, y, 0) = 0 \\ \dot{y} = g(x, y, 0) \end{cases} \quad (1.4)$$

est appelé “système critique”.

$$(P_0) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, 0) \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

est appelé le “système couche-limite”. Sa première équation, pour laquelle y est un paramètre est nommé “système rapide” :

$$(R_y) : \dot{x} = f(x, y, 0) \quad (1.6)$$

Définition 1.5 *Pour l’un ou l’autre des systèmes (S_ε) ou (P_ε) , on définit l’“ensemble critique” :*

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid f(x, y, 0) = 0\} \quad (1.7)$$

constitué des points singuliers de (P_0) . On pose \mathcal{C}_H l’ensemble des points de \mathcal{C} en lesquels toutes les valeurs propres de $\partial_x f$ sont à partie réelles non nulles. On note, en outre, \mathcal{C}^+ (resp. \mathcal{C}^-) l’ensemble des points de \mathcal{C}_H en lesquels toutes les valeurs propres de $\partial_x f$ sont à partie réelles positives (resp. négatives). Soit enfin \mathcal{C}_S le complémentaire de $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ dans \mathcal{C}_H .

Ainsi si $(x, y) \in \mathcal{C}_H$ (resp. \mathcal{C}^+ , \mathcal{C}^-), x est un point singulier hyperbolique de (R_y) (resp. répulsif, attractif). Lorsque le contexte le permet, nous ferons référence à P au lieu de x pour donner des propriétés de ce point vis-à-vis de la dynamique rapide (R_y) . Par exemple, la phrase précédente deviendra : les points de \mathcal{C}_H (resp. \mathcal{C}^+ , \mathcal{C}^-) sont des points singuliers hyperboliques pour la dynamique rapide (resp. répulsif, attractif). Ceci nous permettra d'éviter de préciser la valeur particulière de la variable lente, considérée comme paramètre et ainsi d'alléger les descriptions.

Remarquons que si les trajectoires du système critique (S_0) sur une sous-variété \mathcal{V} de \mathbb{R}^k incluses dans \mathcal{C} sont bien définies, \mathcal{V} ne peut contenir de points de $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_H$ qui ne sont pas des points singuliers de (P_0) .

Définition 1.6 *Une famille de trajectoires de (S_ε) qui tend vers une solution de (S_0) quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est appelée une trajectoire "lente". Les trajectoires de (S_ε) qui n'appartiennent pas à une région de l'espace des phases où f est de l'ordre de ε sont dites "rapides". Une courbe continue formée de l'union de trajectoires de (P_0) et de trajectoires de l'équation couche-limite (P_0) est appelée une "orbite limite". Les points d'une telle courbe où une partie lente se termine et où commence une partie rapide sont appelés les points de décrochage et les points où une partie rapide s'achève et où débute une trajectoire lente sont appelés les points d'accrochage.*

L'analyse des systèmes (S_0) et (P_0) et particulièrement celle de l'ensemble critique leur correspondant est motivée par la possibilité de décrire, sous certaines conditions, le flot de (S_ε) au voisinage d'un point normalement hyperbolique. En particulier, F. Takens a démontré le théorème suivant pour les systèmes lents-rapides du plan :

Théorème 1.1 *Soit P un point normalement hyperbolique de la variété critique qui n'est pas un point singulier de la dynamique lente (S_0) . Pour tout entier $r > 0$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un voisinage de P dans \mathbb{R}^2 et un changement de coordonnées de classe C^r défini sur ce voisinage qui conjugue le champ de vecteurs (S_ε) à un champ de vecteurs de la forme :*

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = a(y, \varepsilon) \cdot x \\ \dot{y} = 1 \end{cases}$$

On obtient ainsi un bon contrôle du système au voisinage des points de l'ensemble critique qui ne sont pas des points de décrochage. Cependant, ce résultat restant local au voisinage des points singuliers normalement hyperboliques de la dynamique rapide, il ne nous permet pas de connaître globalement le flot le long de toute une variété normalement hyperbolique incluse dans l'ensemble critique. Nous utilisons donc les résultats de persistance de variétés invariantes que nous exposons dans la suite.

1.2.2 Le théorème de Tikhonov

Dans cette sous-section, nous présentons complètement ce théorème qui souvent suffit à décrire la situation le long d'une variété transversalement attractive \mathcal{V} incluse dans l'ensemble critique. Ce résultat est le premier montrant la bonne approximation du flot perturbé par la dynamique lente. S'il peut être démontré en utilisant le théorème de Fénichel présenté dans la section suivante, nous donnons ici sa preuve historique pour sa simplicité et son caractère constructif.

On suppose la dynamique lente-rapide du type (S_ε) définie et indéfiniment différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une application différentiable ϕ définie sur un ouvert D de \mathbb{R}^n telle que :

$$f(x, y, 0) = 0 \iff x = \phi(y)$$

La variété \mathcal{V} étant transversalement attractive, toutes les valeurs propres de la matrice :

$$\partial_x f(\phi(y), y, 0), \quad y \in D$$

ont une partie réelle strictement négative. On pose :

$$z = x - \phi(y)$$

La linéarisation du système rapide (R_y) au voisinage de son attracteur conduit à l'équation :

$$\dot{z} = \partial_x f(\phi(y), y, 0).z$$

Il existe alors, pour tout $y \in D$, une forme quadratique W_y qui est une fonction de Lyapunov de la dynamique rapide (R_y) . De fait, étant donné $y_0 \in D$, il existe un voisinage ouvert U_{y_0} de $y_0 \in D$, un voisinage V_{y_0} de 0 dans \mathbb{R}^m et une constante α telle que, pour tout $(y, z) \in U_{y_0} \times V_{y_0}$:

$$\frac{d}{dt} W_y(z) < -\alpha W_y(z)$$

Définition 1.7 Soit G un ouvert de D , le "bassin d'attraction" de G est l'ensemble $U(G)$ des $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times D$ tels que la solution du système couche-limite (P_0) avec donnée initiale (x_0, y_0) tend vers $(\phi(y_0), y_0)$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Lemme 1 Soit \bar{G} un compact de D . Il existe une fonction $W(y, z)$ définie sur $D \times \mathbb{R}^m$ qui est une forme quadratique en z et dépend différentiablement de la variable y :

$$W(y, z) = \sum_{i,j} W_{ij}(y) z_i z_j$$

et des constantes K_1, K_2, M telles que pour tout $(y, z) \in \overline{G} \times \mathbb{R}^m$:

$$K_1 |z|^2 < W(y, z) < K_2^2 |z|$$

$$\left| \frac{\partial w_{ij}(y)}{\partial y_k} \right| < M$$

Etant donné, de plus, un voisinage $|z| < k_0$ de la variété $x = \phi(y)$, $y \in \overline{G}$, il existe une constante α telle que, si (x, y) appartient à ce voisinage :

$$\frac{d}{dt} W(y, z) < -\alpha W(y, z)$$

Démonstration. Les voisinages U_{y_0} définissent un recouvrement de \overline{G} . On prend ϕ_j une partition de l'unité différentiable subordonnée à ce recouvrement et la fonction :

$$W(y, z) = \sum_j W_{y_j}(z) \phi_j(y)$$

■

Lemme 2 Pour n'importe quel compact \overline{G} de D , il existe $\omega(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ et k tel que la dérivée de $W(y, z)$ le long du flot de (S_ε) vérifie :

$$\frac{dW(y, z)}{dt} < -\frac{\alpha}{3} W(y, z)$$

dans

$$W(y, z) = c, \quad \omega(\varepsilon) < c < k$$

Démonstration. Cette dérivée vaut :

$$\frac{dW(y, z)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad}_x W \cdot f(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad}_y W \cdot g(x, y)$$

D'après le lemme précédent, il existe k_0 tel que si $|z| < k_0$, on a l'inégalité :

$$\frac{dW(y, z)}{dt} < -\frac{\alpha}{\varepsilon} W(y, z) + \frac{1}{\varepsilon} \text{grad}_y W \cdot g(x, y)$$

On peut vérifier que $W(y, z)$, étant une forme quadratique définie positive, satisfait une inégalité :

$$|\text{grad}_z W| \leq M \sqrt{W}$$

Il s'en suit qu'il existe deux constantes M_1 et M_2 telles que :

$$|\text{grad}_y W \cdot g| \leq M_1 \sqrt{W} + M_2 W$$

Soit k tel que $W < k$ implique $|z| < k_0$. On a donc, si $W < k$:

$$\frac{dW(y, z)}{dt} \leq -\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{W} \left[\alpha \sqrt{W} - \varepsilon M_1 \sqrt{W} - \varepsilon M_2 \right]$$

Si on choisit,

$$\frac{\alpha}{3}\sqrt{W} > \varepsilon M_2$$

c'est à dire :

$$W > \omega(\varepsilon) = \left(\frac{3M_2}{\alpha}\right)^2 \varepsilon^2$$

et :

$$\varepsilon < \frac{2\alpha}{\alpha + 3M_1}$$

on obtient :

$$\frac{dW(y, z)}{dt} < -\frac{\alpha}{3}W(y, z)$$

dans :

$$W(y, z) = c, \quad \omega(\varepsilon) < c < k$$

■

Lemme 3 *La solution du système lent rapide met un temps de l'ordre de $\varepsilon \ln(\varepsilon)$ pour aller de la variété $W = k$ à la variété $W = \omega(\varepsilon)$*

Démonstration. En effet, d'après le dernier lemme, ce temps est inférieur à la solution t de l'équation :

$$k \exp\left(-\frac{\alpha}{3\varepsilon}t\right) = \omega(\varepsilon)$$

■

Lemme 4 *Soit $(x_0, y_0) \in U(D)$. On peut choisir un voisinage U de (x_0, y_0) et un nombre ε_0 tels que toute solution du système lent-rapide (S_ε) , $\varepsilon < \varepsilon_0$, avec donnée initiale $(x_1, y_1) \in U$ entre dans l'intérieur de l'ensemble défini par $W = c$, $c < k$ en un temps de l'ordre de ε .*

Démonstration. On note :

$$(x(x_1, y_1, \tau, \varepsilon), y(x_1, y_1, \tau, \varepsilon))$$

la solution de (P_ε) à l'instant τ avec donnée initiale (x_1, y_1) . Le lemme de Gronwall implique que, pour (τ_0, δ) fixé, il existe U et ε_0 tels que, si $(x_1, y_1) \in U$ et $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors :

$$|x(x_1, y_1, \tau, \varepsilon) - x(x_1, y_1, \tau, 0)| < \delta$$

$$|y(x_1, y_1, \tau, \varepsilon) - y_0| < \delta.$$

Si τ_0 et δ sont tels que $x(x_1, y_1, \tau, 0)$ est à l'intérieur de $W \leq c$, à une distance supérieure à δ du bord, alors la solution de (S_ε) entre dans $\{W = c\}$ pour un temps $\tau_1 < \tau_0$ et donc un temps $t = \varepsilon \tau_1$. ■

Théorème 1.2 (Tikhonov) Soit (x_0, y_0) un point de $U(D)$. Soit $t_1 > 0$, telle que la solution $y(y_0, t)$ de la dynamique lente :

$$\dot{y} = g(\phi(y), y) \tag{1.8}$$

de donnée initiale y_0 , reste dans D pour toute valeur $t \in [0, t_1]$. Pour tout δ , il existe un voisinage U et une constante ε_0 tels que la coordonnée de la solution $y(x_1, y_1, \varepsilon, t)$ du système lent-rapide de donnée initiale $(x_1, y_1) \in U$ satisfait :

$$|y(x_1, y_1, t, \varepsilon) - y(y_0, t)| < \delta$$

pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, $t \in [0, t_1]$.

Démonstration. On sait déjà qu'en un temps de l'ordre de $\varepsilon \ln(\varepsilon)$, la trajectoire entre dans le domaine $W < \omega(\varepsilon)$ et ne le quitte plus. Ainsi, les coordonnées $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ de la solution restent liées par :

$$|x(t, \varepsilon) - \phi(y(t, \varepsilon))| \leq \omega(\varepsilon)$$

On ne s'occupe donc que de $y(t, \varepsilon) = y(x_1, y_1, t, \varepsilon)$. On note O_δ le δ -voisinage de la solution de la dynamique lente :

$$y = y(y_0, t), \quad 0 \leq t \leq t_1$$

Pour δ suffisamment petit, on peut supposer \overline{O}_δ contenu dans D . En choisissant ε , $|x_0 - x_1|$ et $|y_0 - y_1|$ suffisamment petits, $|y_0 - y(x_1, y_1, t(\varepsilon), \varepsilon)|$ peut être rendu aussi petit qu'on le souhaite. On considère alors la nouvelle donnée initiale :

$$\begin{cases} \bar{x}'_0 = x(x_1, y_1, t(\varepsilon), \varepsilon) \\ \bar{y}'_0 = y(x_1, y_1, t(\varepsilon), \varepsilon) \end{cases}$$

pour le système (S_ε) et on note :

$$\begin{cases} \bar{x}(t, \varepsilon) = x(t + t(\varepsilon), \varepsilon) \\ \bar{y}(t, \varepsilon) = y(t + t(\varepsilon), \varepsilon) \end{cases}$$

sa solution. Comme $g(x, y)$ reste bornée, il existe C tel que :

$$|\bar{y}(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)| \leq C.t(\varepsilon)$$

En conséquence directe du lemme de Gronwall, $\bar{y}(t, \varepsilon)$ reste proche de la solution de la dynamique lente :

$$\dot{y} = g(\phi(y), y)$$

Comme cette solution ne quitte pas \overline{O}_δ pendant un temps t_1 , il en est de même de $\bar{y}(t)$. ■

1.3 Perturbations singulières

Dans cette partie, nous présentons les résultats fondamentaux de la théorie géométrique des perturbations singulières, pour l'essentiel dus à Neil Fénichel. Les démonstrations des théorèmes suivants étant longues, nous nous référons aux articles premiers de cet auteur. On pourra trouver des résultats semblables démontrés sous des hypothèses différentes dans [38], [34] et [7]. En outre, la recherche des variétés centrales est fondamentale, par exemple, dans la méthode de l'agrégation de variables utilisée en dynamique des populations et en écologie (cf. [4]).

1.3.1 Variétés invariantes normalement hyperboliques

Tout d'abord, nous présentons le résultat de Fénichel concernant l'existence des variétés centrale, centrale stable et centrale instable associées à un champ de vecteurs perturbé. Ce premier théorème de Fénichel, démontré pour la première fois dans [22], est plus général ; nous avons choisi de le donner dans le contexte des dynamiques lentes-rapides afin de pouvoir l'appliquer directement par la suite.

Théorème 1.3 *On suppose que le champ X^ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, défini sur $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, associé à (P_ε) est de classe C^r . Soit \mathcal{V} une variété compacte constituée de points singuliers de X^0 ($\mathcal{V} \subset \mathcal{C}$). On suppose que pour tout $p \in \mathcal{V}$, $dX^0(p)$ admet :*

- k_1 valeurs propres à partie réelle négative,
- k_2 valeurs propres à partie réelle nulle,
- k_3 valeurs propres à partie réelle positive.

Alors :

(i) *Il existe une C^r -variété centrale stable \mathcal{W}^s de $X^\varepsilon \times 0$ avec $\mathcal{V} \times \{0\} \subset \mathcal{W}^s$.*

Il existe une C^r -variété centrale instable \mathcal{W}^u de $X^\varepsilon \times 0$ avec $\mathcal{V} \times \{0\} \subset \mathcal{W}^u$.

L'intersection de ces variétés engendre une variété centrale \mathcal{W}^c contenant $\mathcal{V} \times \{0\}$.

Il existe un voisinage U de \mathcal{V} tel que :

$$A_+^{X^\varepsilon \times 0}(U) \subset \mathcal{W}^s, \quad A_-^{X^\varepsilon \times 0}(U) \subset \mathcal{W}^u, \quad I^{X^\varepsilon \times 0}(U) \subset \mathcal{W}^c$$

(ii) *Il existe une C^{r-1} -famille $\{\mathcal{V}^s(p) | p \in \mathcal{W}^s\}$ de variétés stables pour $X^\varepsilon \times 0$.*

Si $p \in \mathbb{R}^k \times \{\varepsilon\}$ alors $\mathcal{V}^s(p) \subset \mathbb{R}^k \times \{\varepsilon\}$. Chaque $\mathcal{V}^s(p)$ intersecte transversalement \mathcal{W}^c en exactement un point.

Le résultat est le même pour \mathcal{W}^u en remplaçant \mathcal{V}^s par \mathcal{V}^u , “stable” par “instable” et en inversant le temps.

(iii) *Soit $k_s < 0$ supérieur aux parties réelles des valeurs propres de parties réelles négatives de $dX^0(p)$ pour tout $p \in \mathcal{V}$. Alors, il existe une constante $\lambda_s > 0$ telle que si*

$p \in \mathcal{W}^s$, $q \in \mathcal{V}^s(p)$, on a pour tout $t \geq 0$ tel que $\phi_{[0,t]}^{X^\varepsilon \times 0}(p) \subset \mathcal{W}^s$:

$$d\left(\phi_t^{X^\varepsilon \times 0}(p), \phi_t^{X^\varepsilon \times 0}(q)\right) < \lambda_s \exp(k_s t) d(p, q)$$

et, si $p \in A_+^{X^\varepsilon \times 0}(\mathcal{W}^s)$:

$$\mathcal{V}^s(p) = \left\{ q \in U \mid \forall t \geq 0, d\left(\phi_t^{X^\varepsilon \times 0}(p), \phi_t^{X^\varepsilon \times 0}(q)\right) \leq \lambda_s \exp(k_s t) d(p, q) \right\}$$

Le résultat est similaire pour $\mathcal{V}^u(p)$.

Nous remarquons que les parties (ii) et (iii) de ce théorème montrent en particulier l'existence d'un feuilletage invariant stable (resp. instable) de la variété centrale stable (resp. instable). Nous rapprochons ce résultat de celui développé à la même époque par Hirsh, Pugh et Shub pour les difféomorphismes (cf [34]). Par la suite, l'utilisation du feuilletage stable nous permettra d'analyser le comportement du flot restreint aux fibres stable et instable associées à une variété persistante normalement hyperbolique. En particulier, l'existence de la phase isochrone démontré dans 6.3.3 utilise l'existence de ce feuilletage fortement contractant.

1.3.2 Persistance des variétés normalement hyperboliques

Une des généralisations les plus importantes du théorème précédent est la persistance des variétés invariantes normalement hyperboliques (deuxième théorème de Fénichel).

Définition 1.8 Une variété à bord est dite invariante sous le flot d'un champ de vecteur si toute orbite intersectant la variété rentre et sort par le bord.

Théorème 1.4 Soit \mathcal{M}_0 une variété compacte de classe C^r , normalement hyperbolique, avec bord, invariante par (S_0) . Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une variété \mathcal{M}_ε compacte à bord de classe C^r invariante pour le système (S_ε) . La famille à un paramètre $(\mathcal{M}_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$ est continue pour la distance de Hausdorff et \mathcal{M}_ε est dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de \mathcal{M}_0 . \mathcal{M}_ε est normalement hyperbolique et appelée "variété lente" du système (S_ε) .

Le flot sur \mathcal{M}_ε est alors lent et bien approché en $O(\varepsilon)$ par le flot de (S_0) .

Exemple 1.1 On considère :

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = 1 \end{cases}$$

Ce système s'intègre immédiatement en :

$$\begin{cases} x(t) = y(0) + t - \varepsilon + (x(0) - y(0) + \varepsilon) \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) \\ y(t) = y(0) + t \end{cases}$$

Remarquons alors que, si $x(0) + y(0) + \varepsilon = 0$, alors $x(t) = y(t) - \varepsilon$ sur toute la solution. La variété d'équation $y = x + \varepsilon$ est donc invariante par le flot et les autres trajectoires tendent asymptotiquement vers cette solution avec le taux de contraction :

$$(x(0) - y(0) + \varepsilon) \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

Remarque 1.1 Cet exemple illustre le fait que la variété lente ne coïncide pas, en général, avec la variété critique, mais elle en reste toujours à une distance de l'ordre de ε .

Fénichel a alors démontré (troisième théorème) un résultat similaire au théorème 1.3 pour une variété compacte formée de cycles limites où k_1, k_2, k_3 désigne les exposants caractéristiques de la théorie de Floquet. Nous nous référons à [22] pour l'énoncé exact de ce dernier théorème.

Nous utiliserons ces résultats de manière répétée dans cette étude afin de contrôler la contraction des trajectoires d'un système lent-rapide près des variétés normalement hyperboliques incluses dans l'ensemble critique.

1.4 Graphiques et ensembles limite-périodiques

Nous utilisons dans toute cette étude la notion d'ensemble limite-périodique d'un système lent-rapide. Cette notion introduite et développée par J.-P. Francoise et C.C. Pugh dans [23] s'applique de manière plus particulière à une suite de déformations d'un champ de vecteurs plan. Nous généralisons ici les notions en dimension finie quelconque, pour des systèmes couche-limite et des systèmes lents-rapides qui en sont des perturbations. Nous notons \mathcal{D}^k la compactification de Poincaré de \mathbb{R}^k , c'est-à-dire l'hémisphère sud de la k -sphère diffeomorphe à \mathbb{R}^k par projection centrale. Rappelons que l'ensemble des compacts de \mathcal{D}^k muni de la métrique de Hausdorff est compact.

Définition 1.9 Soit une famille de champ de vecteurs lents-rapides (P_ε) , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. γ_0 est un "ensemble limite-discrète-périodique" de $(P_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}$ s'il existe $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite 0 telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, (P_{ε_i}) admet un cycle limite γ_{ε_i} et $(\gamma_{\varepsilon_i}) \rightarrow \gamma_0$ pour la topologie de Hausdorff.

γ_0 est un "ensemble limite-continue-périodique" de $(P_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}$ si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, (P_ε) admet un cycle limite γ_ε et $\gamma_\varepsilon \rightarrow \gamma_0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ pour la topologie de Hausdorff.

Un ensemble limite-périodique est “dégénéré” s’il contient une singularité non isolée du champ de vecteur (P_0) .

Remarque 1.2 Pour X champ de vecteurs de \mathbb{R}^k , il existe un feuilletage de \mathbb{R}^k par les orbites du système différentiel associé $\{\dot{z} = v(z)\}$. En particulier, les feuilles du P_0 -feuilletage sont les trajectoires rapides du système (P_0) .

Définition 1.10 Un “graphique” de (P_0) est une union compacte connexe de trajectoires rapides reliant des points singuliers de la dynamique rapide et d’orbites fermées de la dynamique rapide.

Dans le cas particulier de la dimension 2, on retrouve la définition originelle des graphiques.

Définition 1.11 Une séparatrice stable (resp. instable) d’un champ de vecteurs plan est une solution convergant pour $t \rightarrow \infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$) vers un point singulier p n’appartenant pas à l’intérieur d’un ensemble de solutions convergant uniformément vers p .

Avec cette définition, on obtient immédiatement :

Corollaire 1 Pour (P_0) défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, un graphique est une boucle formée d’arcs de points singuliers et de séparatrices qui les connectent :

$$(M_1, N_1), s_1, (M_2, N_2), s_2, \dots, (M_l, N_l), s_l$$

tels que s_j , $j = 1..l - 1$ (resp. s_l) est une séparatrice instable de N_j (resp. N_l) et une séparatrice stable de M_{j+1} (resp. M_1).

Un graphique est dit “simple” si pour tout j , $M_j = N_j$, et “dégénéré” sinon.

Un graphique de (P_0) est dit “adapté à (P_ε) ” si les arcs (M_j, N_j) sont des trajectoires de (S_0) . (Cette assertion remplace l’hypothèse d’orientation qui n’a plus de raison d’être en dimension supérieure à 2).

Certaines théories permettent de donner des résultats sur les orbites périodiques et les ensemble-périodiques. En particulier, le théorème de Poincaré-Bendixson implique alors directement :

Proposition 1 Les ensembles limite-périodiques d’un champ de vecteur plan sont les points singuliers, les orbites périodiques, les graphiques simples ou dégénérés.

L'outil primordial de la théorie des perturbations est, bien entendu, l'application de premier retour de Poincaré. Or, si une orbite périodique admet une application de premier retour analytique, le cas d'un graphique ou d'un point singulier est beaucoup plus délicat, telle la théorie de Dulac. Il apparaît alors clairement deux faits :

1. Les propriétés géométriques du flot "perturbé" (S_ε) (ou (P_ε)) peuvent se déduire de la géométrie des systèmes critiques et couche-limite. Mais les difficultés essentielles proviennent de la difficulté à comprendre la géométrie du flot près des points de $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_H$, c'est-à-dire au voisinage des points (x, y) tels que x est un point singulier de (R_y) subissant une bifurcation selon le paramètre y . Ainsi, l'analyse de l'application de transition entre deux sections bien choisies du flot de (S_ε) au voisinage de tels points nécessite des outils performants.
2. En dimension supérieure à 2, les ensemble limite-périodiques des familles de systèmes lents-rapides sont à géométrie complexes puisque les séparatrices (qui sont alors des sous-variétés de dimension $k - 1$ de \mathbb{R}^k) ne sont pas des limites de trajectoires rapides.

Le but principal de cette étude est de donner des résultats d'existence d'orbites périodiques des systèmes lents-rapides dans le plan et dans l'espace par l'analyse des bifurcations des dynamiques rapides et des arguments géométriques de perturbations singulières. En outre, dans une volonté de généralisation de l'analyse asymptotique des dynamiques lentes-rapides, nous nous pencherons, dans le cas de la dimension 3, sur le rapport entre la notion de graphique généralisé et les ensembles limite-périodiques (limites discrètes et continues).

1.5 Ultrastabilité

Comme l'a souligné H. Atlan, dès le début des années 70, un des acteurs importants de la cybernétique, W.R. Ashby, avait introduit, sous le nom d'« ultrastabilité », la propriété des systèmes qui peuvent s'adapter aux sollicitations de l'environnement en passant, réversiblement ou irréversiblement d'un état stable à un autre. Un tel système est capable de modifier la configuration de ses sous-systèmes sans pour autant devenir instable. Il est ainsi capable, d'habituation et d'homéostasie et son intérêt s'impose dans les sciences du vivant. On a ainsi l'idée d'une dynamique lente-rapide dont les orbites génériques resteraient proches d'une composante connexe stable de la sous-variété formée des attracteurs de la dynamique rapide avant de basculer vers une autre telle composante sous l'influence de la dynamique lente et ainsi, de proche en proche, de décrire un lacet d'hystérèse. C'est donc par référence à ces travaux que nous désignerons dans ce travail par « ultrastabilité selon Ashby » cette vision des systèmes

lents-rapides même si le concept dépasse largement le cadre des systèmes décrits par des équations différentielles. Un des apports de cette thèse sera de discuter un exemple de système lent-rapide qui donne un contre-exemple à cette ultrastabilité.

Chapitre 2

Bifurcations dynamiques

Pour étudier les transitions entre phases passive et active des systèmes lents-rapides, nous sommes amenés à analyser les bifurcations subies par le système rapide. Pour cela, nous utilisons des formes normales de ces bifurcations et considérons une dynamique lente sur le paramètre de bifurcation. Introduit par l'école d'analyse non-standard française, à la fin des années 1970, cette classe de systèmes est naturelle et presque entièrement définie dans l'introduction de ce chapitre.

2.1 Forme normale d'une bifurcation dynamique

Nous donnons ici la terminologie utilisée dans la suite de ce mémoire.

Définition 2.1 *Soit une forme normale d'une bifurcation de codimension 1 de \mathbb{R}^m :*

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

définie dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^m dépendant du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous appelons "bifurcation dynamique associée", la famille de systèmes lents-rapides :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, \lambda) \\ \dot{\lambda} = \varepsilon \end{cases}$$

Nous nous limitons dans ce mémoire à l'étude des bifurcations dynamiques de codimension 1. Nous ajouterons le terme "dynamique" derrière le nom de la bifurcation envisagée pour nous référer à la bifurcation dynamique associée (pli dynamique, col-noeud dynamique, Hopf dynamique, etc).

2.2 Bifurcation pli dynamique

Nous traitons dans cette partie, à titre d'exemple, le cas de la bifurcation pli dynamique. Nous présentons tout d'abord un système local sous forme normale. Puis nous

intégrons la dynamique à l'aide des fonctions d'Airy afin de décrire le comportement du flot selon les valeurs de ε . Enfin, nous analysons le comportement asymptotique pour $\varepsilon \rightarrow 0$ des orbites remarquables de ce système local.

2.2.1 Forme normale

Considérons la forme normale suivante sur \mathbb{R} :

$$\dot{x} = x^2 + z = f(x, z) \quad (2.1)$$

où $z \in \mathbb{R}$ est le paramètre de bifurcation. Pour $z < 0$, il existe deux points singuliers $\pm\sqrt{-z}$ pour lesquels on obtient $\partial_x f(\pm\sqrt{-z}, z) = \mp 2\sqrt{-z}$. Ainsi, $\sqrt{-z}$ est stable tandis que $-\sqrt{-z}$ est instable. Pour $z = 0$, l'unique point singulier est 0 et, puisque $\partial_x f(0, 0) = 0$, il s'agit d'un point non hyperbolique. Enfin pour $z > 0$, il n'existe aucun point singulier.

Nous formons alors le système de bifurcation pli dynamique :

$$(Pli_\varepsilon^N) : \begin{cases} \dot{x} = x^2 + z \\ \dot{z} = \varepsilon \end{cases}$$

La variété critique associée à ce système est donc la courbe d'équation $z = -x^2$ contenant le point O . Nous décomposons cette variété en $\mathcal{C}^- \cup \{O\} \cup \mathcal{C}^+$ où :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^- &= \{(x, -x^2) | x < 0\} \\ \mathcal{C}^+ &= \{(x, -x^2) | x > 0\} \end{aligned}$$

La variété \mathcal{C}^- (resp. \mathcal{C}^+) est constituée des points singuliers stables (resp. instables) de la dynamique rapide (2.1) pour les différentes valeurs de $z \in \mathbb{R}$. Ainsi, \mathcal{C}^- et \mathcal{C}^+ sont normalement hyperboliques pour le flot de (Pli_0^N) et, d'après le deuxième théorème de Fénichel, toute sous-variété compacte avec bord de \mathcal{C}^- ou \mathcal{C}^+ persiste, pour ε assez petit, en une variété invariante de (Pli_ε^N) normalement hyperbolique.

Nous connaissons donc a priori le comportement des orbites de (Pli_ε^N) dans le demi-plan $\{z < -\delta\}$, pour $\delta > 0$ fixé et ε assez petit.

Proposition 2 *Soient $\delta > 0$ et $K > 0$. Soient $\mathcal{C}_\varepsilon^-$ et $\mathcal{C}_\varepsilon^+$ les variétés lentes persistantes associées à $\mathcal{C}^- \cap \{-K - \delta \leq z \leq -\delta/2\}$ et $\mathcal{C}^+ \cap \{-K - \delta \leq z \leq -\delta/2\}$ invariantes sous le flot de (Pli_ε^N) . Pour ε assez petit, la variété $\mathcal{C}_\varepsilon^+$ partage alors $\{-K < z < -\delta\}$ en deux composantes connexes dont l'une, notée B_ε^- , contient $\mathcal{C}_\varepsilon^-$. Alors, pour tout voisinage U de \mathcal{C}^+ , il existe une suite $(V_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$ de voisinages de $\mathcal{C}_\varepsilon^-$ exponentiellement petits par rapport à ε telle que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, l'orbite de (Pli_ε^N) de condition initiale $(x_0, z_0) \in B_\varepsilon^- \setminus U$ rejoint V_ε en un temps $O(\varepsilon)$.*

Démonstration. L'existence de $\mathcal{C}_\varepsilon^-$ et $\mathcal{C}_\varepsilon^+$ résulte directement du second théorème de Fénichel. La variété $\mathcal{C}_+^\varepsilon$ appartient alors à un $O(\varepsilon)$ -voisinage de :

$$\mathcal{C}^+ \cap \{-K - \delta \leq z \leq -\delta/2\}$$

pour la distance de Hausdorff et cette dernière sépare $\{-K < z < -\delta\}$ en deux composantes connexes. Pour ε assez petit, il en est donc de même pour $\mathcal{C}_\varepsilon^+$ et :

$$\mathcal{C}_\varepsilon^+ \cap \mathcal{C}_\varepsilon^- = \emptyset$$

Soit donc B_ε^- la composante connexe contenant $\mathcal{C}_\varepsilon^-$. La conclusion résulte directement de l'attractivité de $\mathcal{C}_\varepsilon^-$. ■

De manière plus générale, en dehors d'un voisinage de l'ensemble critique, donc en particulier dans le demi-plan $\{z > \delta\}$, nous pouvons déduire le comportement des orbites par redressement du flot perturbé. Cependant, le comportement asymptotique des orbites pour $\varepsilon \rightarrow 0$ est plus difficile à décrire près de O . Afin de comprendre la "transition" induite par le flot dans ce voisinage, nous intégrons le système (Pli_ε^N) et paramétrisons les sous-variétés invariantes prévues par la théorie de Fénichel.

2.2.2 Intégration à l'aide des fonctions d'Airy

L'objet de cette sous-section est de donner une paramétrisation des orbites de (Pli_ε^N) : nous mettons ainsi en lumière le comportement du système local au voisinage de son point de décrochage. Nous rappelons les propriétés des fonctions d'Airy, étudiées en détails dans [20], au fur et à mesure de leur utilisation.

En appliquant le changement de variable temporelle :

$$\tau = \varepsilon^{1/3}t, \quad d\tau = \varepsilon^{1/3}.dt$$

à (Pli_ε^N) on obtient, en notant ' la différentielle $\frac{d}{d\tau}$:

$$\begin{cases} \varepsilon^{1/3}x' = x^2 + z \\ z' = \varepsilon^{2/3} \end{cases}$$

Nous obtenons par intégration directe de la dynamique sur z :

$$z(\tau) = \varepsilon^{2/3}\tau + z_0$$

Par la suite, nous nous intéressons d'un point de vue géométrique aux trajectoires atteignant $z = 0$ – i.e. nous paramétrisons la composante sur x par celle de z . Ainsi, supposons que la trajectoire de (Pli_ε^N) , $\varepsilon > 0$, définie par la condition initiale (x_0, z_0) , $z_0 < 0$, est bien définie pour $t \in [0, -z_0/\varepsilon]$. La paramétrisation selon z de l'orbite est

bien définie sur $[z_0, 0]$. En remplaçant τ par $\tau + z_0/\varepsilon$, nous pouvons supposer $z_0 = 0$ fixé et donner la paramétrisation de cette trajectoire selon cette nouvelle échelle de temps, soit pour la composante z :

$$z(\tau) = \varepsilon^{2/3}\tau$$

En opérant alors le changement de variable :

$$x = -\varepsilon^{1/3}\frac{u'}{u}$$

la dynamique sur x correspond à la dynamique suivante sur u :

$$u'' = -\varepsilon^{-2/3}zu = -\tau u$$

dont les solutions sont données par :

$$u(t) = \alpha Ai(-\tau) + \beta Bi(-\tau), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

où Ai et Bi désignent les fonctions d'Airy de première et de seconde espèces. Ainsi, nous obtenons les deux solutions de base de l'équation différentielle en u sous la forme d'intégrales semi-convergentes :

$$\begin{aligned} Ai(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{s^3}{3} - \tau s\right) ds \\ Bi(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\sin\left(\frac{s^3}{3} - \tau s\right) + \exp\left(-\tau s - \frac{s^3}{3}\right) \right] ds \end{aligned}$$

Les solutions en x sont donc paramétrisées par :

$$x_{\alpha,\beta}^{\varepsilon}(\tau) = \varepsilon^{1/3} \frac{\alpha Ai'(-\tau) + \beta Bi'(-\tau)}{\alpha Ai(-\tau) + \beta Bi(-\tau)}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.2)$$

En outre, d'après les valeurs en 0 des fonctions d'Airy et de leur dérivée :

$$\begin{aligned} Ai(0) &= \frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, & Ai'(0) &= -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \\ Bi(0) &= \frac{1}{3^{1/6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, & Bi'(0) &= -\frac{3^{1/6}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

et puisque :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

la solution (2.2) vérifie :

$$x_{\alpha,\beta}^{\varepsilon}(0) = \varepsilon^{1/3} \frac{3^{5/6}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{\beta\sqrt{3} - \alpha}{\beta\sqrt{3} + \alpha}$$

Ainsi, la solution (2.2) vérifiant $x(0) = x_0$ est définie par $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ si :

$$x_0 = -\varepsilon^{1/3} \frac{3^{5/6}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

et par une valeur de $k = \alpha/\beta$ sinon. Dans le paragraphe suivant, nous associons la valeur ∞ à k si $\beta = 0$ pour, ensuite, traiter ce cas spécifique qui attire toute notre attention.

Pour toute valeur de $k \in \bar{\mathbb{R}}$, la solution $x_k\left(\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right)$ donnée par (2.2) est une fonction définie sur tout \mathbb{R} privé des points z tels que :

$$k Ai\left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right) + Bi\left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right) = 0 \quad (2.3)$$

Pour $k \in [\infty, -\sqrt{3}]$, l'une des solutions de cette équation appartient à la demi-droite $\{z \leq 0\}$, alors que les autres forment une suite de valeurs positives tendant vers $+\infty$. Pour les autres valeurs de k , il n'existe pas de valeurs négatives de z vérifiant (2.3). Pour chacun de ses points d'annulation, la limite à gauche (resp. à droite) de la fonction $z \rightarrow x_k\left(\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right)$ est $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Nous nous intéressons dans la suite au développement asymptotique des solutions pour $z \rightarrow -\infty$. Nous rappelons les équivalents des fonctions d'Airy (voir [20]) :

$$\begin{aligned} Ai(u) &\underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}u^{3/2}\right)}{2\sqrt{\pi} \cdot u^{1/4}}, & Ai'(u) &\underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} -u^{1/4} \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}u^{3/2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \\ Bi(u) &\underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\exp\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot u^{1/4}}, & Bi'(u) &\underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} u^{1/4} \frac{\exp\left(\frac{2}{3}u^{3/2}\right)}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

On obtient, à partir de (2.2) :

$$\begin{aligned} x_k^\varepsilon\left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right) &\underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} \varepsilon^{1/3} \sqrt{-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}} \frac{-\alpha \exp\left(-\frac{2}{3\varepsilon}(-z)^{3/2}\right) + 2\beta \exp\left(+\frac{2}{3\varepsilon}(-z)^{3/2}\right)}{\alpha \exp\left(-\frac{2}{3\varepsilon}(-z)^{3/2}\right) + 2\beta \exp\left(+\frac{2}{3\varepsilon}(-z)^{3/2}\right)} \\ &\underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} \sqrt{-z} \frac{2\beta - \alpha \exp\left(-\frac{4}{3\varepsilon}(-z)^{3/2}\right)}{2\beta + \alpha \exp\left(-\frac{4}{3\varepsilon}(-z)^{3/2}\right)} \end{aligned}$$

Ainsi, nous remarquons que pour toute valeur de $\alpha/\beta = k \in \mathbb{R}$, la solution associée vérifie :

$$x_k^\varepsilon\left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right) \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} \sqrt{-z}$$

Cependant, pour la valeur particulière $\beta = 0$ ($k = \infty$), nous obtenons :

$$x_\infty^\varepsilon\left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right) \underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} -\sqrt{-z}$$

Autrement dit, en $-\infty$, les graphes de toutes les fonctions solutions (2.2) avec $k \in \mathbb{R}$, sont dans un petit voisinage de la branche droite de la parabole d'équation $z = -x^2$, tandis que dans l'unique cas $k = \infty$, la solution voisine la branche gauche (voir figure 2.1). Nous reconnaissons, dans cette dernière solution restreinte à $\{z < -\delta\}$, $\delta > 0$, la variété lente attractive C_ε^- de (Pli_ε^N) .

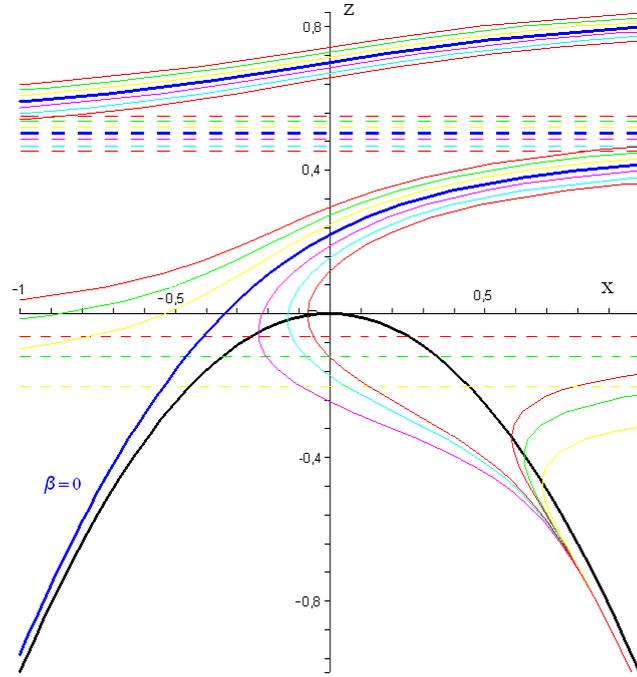


FIG. 2.1 – Graphes des fonctions $x_k^\varepsilon(z/\varepsilon^{2/3})$ données par (2.2) pour $\varepsilon = 0.1$ et différentes valeurs de k . En bleu et gris, le cas particulier $k = \infty$, soit $\beta = 0$. Chaque droite en pointillés est l'asymptote de la courbe de même couleur.

2.2.3 Comportement asymptotique pour $\varepsilon \rightarrow 0$

Nous nous intéressons à présent au comportement asymptotique de la solution particulière pour $\beta = 0$. Nous vérifions alors que la famille $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ des orbites particulières de (Pli_ε^N) asymptotes à la demi-parabole $\mathcal{P}_- : x = -\sqrt{-z}$, $z < 0$, tend asymptotiquement, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, vers l'orbite limite, union de \mathcal{P}_- et de la demi-droite $\{(x, 0) | x > 0\}$.

Proposition 3 *L'orbite γ_ε de (Pli_ε^N) est bien définie sur $]-\infty, \Omega_\varepsilon[$ par la paramétrisation :*

$$x_\infty^\varepsilon \left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}} \right) = \varepsilon^{1/3} \frac{Ai' \left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}} \right)}{Ai \left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}} \right)} \quad (2.4)$$

Il s'agit de l'unique orbite asymptote à C^- pour $z \rightarrow -\infty$ et vérifie :

$$\begin{aligned} x_\infty^\varepsilon \left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}} \right) &\underset{\frac{z}{\varepsilon^{2/3}} \rightarrow -\infty}{=} -\sqrt{-z} + \frac{\varepsilon}{4z} + O \left(\varepsilon^{1/3} \left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}} \right)^{-5/2} \right) \\ &\underset{z \rightarrow -\infty}{=} -\sqrt{-z} \left[1 + \frac{\varepsilon}{4} (-z)^{-3/2} + O \left((-z)^{-3} \right) \right] \end{aligned}$$

Elle admet l' asymptote horizontale $z = \Omega_\varepsilon$ avec :

$$\Omega_\varepsilon = -\varepsilon^{2/3} \max \{z \in \mathbb{R} | Ai(z) = 0\} > 0$$

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, la famille à un paramètre $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers γ_0 , union de la branche gauche de la parabole $\{(x, -x^2) | x < 0\}$ et de la demi-droite $\{(0, x) | x \geq 0\}$.

Démonstration. Nous avons montré dans la sous-section précédente que toutes les orbites de (Pl_i^N) définies pour z au voisinage de $-\infty$ sont asymptotes à $x = \sqrt{-z}$ sauf γ_ε définie par (2.4).

D'après les développements des fonctions d'Airy en $+\infty$:

$$\begin{aligned} Ai(u) &\underset{u \rightarrow +\infty}{=} \frac{\exp(-\frac{2}{3}u^{3/2})}{2\sqrt{\pi}u^{1/4}} - \frac{5 \exp(-\frac{2}{3}u^{3/2})}{96\sqrt{\pi}u^{7/4}} + O\left(\frac{1}{u^{13/4}}\right) \\ Ai'(u) &\underset{u \rightarrow +\infty}{=} -\frac{\exp(-\frac{2}{3}u^{3/2})}{2\sqrt{\pi}}u^{1/4} - \frac{7 \exp(-\frac{2}{3}u^{3/2})}{96\sqrt{\pi}u^{5/4}} + O\left(\frac{1}{u^{11/4}}\right) \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_\infty^\varepsilon\left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right) &= \varepsilon^{1/3} \frac{Ai'(u)}{Ai(u)} \underset{u \rightarrow +\infty}{=} \varepsilon^{1/3} \frac{-\frac{u^{1/4}}{2} - \frac{7}{96u^{5/4}} + O\left(\frac{1}{u^{11/4}}\right)}{\frac{1}{2u^{1/4}} - \frac{5}{96u^{7/4}} + O\left(\frac{1}{u^{13/4}}\right)} \\ &\underset{u \rightarrow +\infty}{=} -\varepsilon^{1/3} \left(\sqrt{u} - \frac{1}{4u} + O\left(\frac{1}{u^{5/2}}\right) \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$x_\infty^\varepsilon\left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right) \underset{z \rightarrow -\infty}{=} -\sqrt{-z} + \frac{\varepsilon}{4z} + O\left(\varepsilon^{1/3} \left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right)^{-5/2}\right) \quad (2.5)$$

De plus, Ω_ε est la plus petite solution de :

$$Ai\left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right) = 0$$

soit :

$$\Omega_\varepsilon = -\varepsilon^{2/3} \max \{z \in \mathbb{R} | Ai(z) = 0\} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} O\left(\varepsilon^{2/3}\right)$$

et, en outre :

$$\forall z \geq 0, \quad x_\infty^\varepsilon\left(-\frac{z}{\varepsilon^{2/3}}\right) \geq x_\infty^\varepsilon(0) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} O\left(\varepsilon^{1/3}\right)$$

D'autre part :

$$\sup \left\{ d_2 \left(\left(-\sqrt{-z_1}, z_1 \right), \left(x_\infty \left(-\frac{z_2}{\varepsilon^{2/3}} \right), z_2 \right) \right) \mid z_1, z_2 \leq 0 \right\} \leq x_\infty^\varepsilon(0) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 0$$

où d_2 désigne la distance euclidienne du plan, ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 2.1 *Le développement (2.5) montre que, pour $z < -\delta$, $\delta > 0$, γ_ε est dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de la branche attractive de la variété critique.*

Nous avons montré la véracité de l'argument heuristique suivant : l'orbite de (Pl_ε^N) de condition initiale (x_0, z_0) , $z_0 < 0$, pour ε assez petit est attirée par la variété invariante persistante et monte en suivant cette variété jusqu'à un voisinage du point de bifurcation pli. Passée la droite d'équation $z = 0$, l'orbite, sous l'influence de la dynamique rapide, explose en un temps fini τ_ε qui tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Cependant, le fait que l'orbite particulière coïncidant avec la variété lente attractive explose pour $z = \Omega_\varepsilon = O(\varepsilon^{2/3})$ et non pas $O(\varepsilon)$ amène à poser la question suivante : cet argument heuristique est-il vrai pour toute bifurcation dynamique ? La réponse négative à cette interrogation est démontrée dans la section suivante.

2.3 Retard à la bifurcation

La perte de l'hyperbolicité normale en certains points de l'ensemble critique contredit les hypothèses nécessaires à l'application de la persistance des variétés. En outre, l'observation de systèmes locaux simples au voisinage de tels points montre l'impossibilité de déduire directement le comportement des orbites de la nature des points singuliers de la dynamique rapide. Ainsi, dans une série d'articles publiés au début des années 1980 (voir [52], [53]), T. Erneux et P. Mandel ont mis en lumière le phénomène de "retard à la bifurcation" en analysant différents systèmes issus de la Physique et de la Chimie. Nous donnons ici une description du phénomène pour la bifurcation de Hopf surcritique dynamique (voir aussi [74]).

2.3.1 Forme normale de la bifurcation de Hopf dynamique

Considérons le système local suivant :

$$(Hp_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) \\ \dot{\mu} = \varepsilon \end{cases}$$

qui s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \\ \dot{\mu} = \varepsilon \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour $\varepsilon = 0$, μ étant alors un paramètre, le sous-système en (x, y) admet $(0, 0)$ pour unique point fixe. Il s'agit d'un foyer, stable pour $\mu < 0$, instable pour $\mu > 0$ et, dans

ce cas, le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{\mu}$ est un cycle limite attractif. Pour $\mu > \mu_0 > 0$, ces cycles limites forment alors une variété normalement hyperbolique invariante par le flot, quel que soit $\varepsilon \geq 0$, soit la variété :

$$\mathcal{M}_{\mu_0} = \{(x, y, \mu) \mid \mu > \mu_0, x^2 + y^2 = \mu\}$$

2.3.2 Analyse du système local

Nous considérons $\varepsilon > 0$ petit et une condition initiale (x_0, y_0, μ_0) où $\mu_0 < 0$ et $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ (on notera également $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ la condition initiale associée en polaire). L'orbite correspondante rejoint le voisinage de $\{(0,0,\mu) \mid \mu < 0\}$ en un temps $O(\varepsilon)$ puis monte lentement autour de cet axe jusque $\mu = 0$. Nous savons alors que l'orbite doit rejoindre un voisinage de \mathcal{M}_{μ_0} et s'en approcher avec une contraction exponentiellement forte. Cependant, il est nécessaire de considérer un temps en $O(1/\varepsilon)$ pour obtenir une portion de trajectoire sur laquelle la variable μ varie de manière caractéristique. Nous ne pouvons donc pas déduire le comportement de l'orbite au voisinage de $(0,0,0)$ en considérant le système global comme une perturbation régulière du sous-système sur (x, y) .

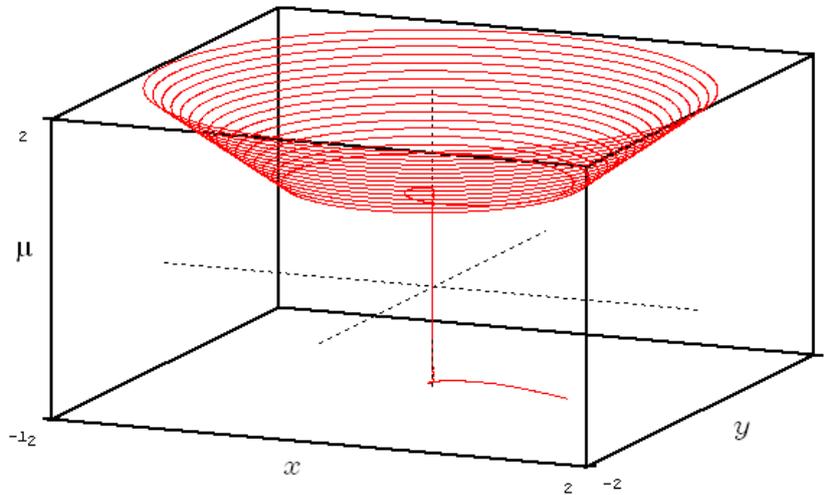


FIG. 2.2 – Orbite de (Hp_ε) pour $\varepsilon = 0.01$ pour la condition initiale $(1, 0, -1)$. L'orbite ne rejoint un voisinage assez petit de la variété invariante que pour une valeur de μ proche de 1.

Pour tout voisinage U de $\{(0,0,\mu) \mid \mu < 0\}$, il existe ε assez petit tel que l'orbite rentre dans ce voisinage et ce en un temps $\tau_\varepsilon = O(\varepsilon)$. Quitte à changer μ_0 en $\mu_0 + \tau_\varepsilon < 0$ pour ε assez petit, considérons que r_0 est déjà tel que $(x_0, y_0, \mu_0) \in U$. Alors, en

intégrant la dynamique sur μ et en appliquant le changement de variable $\eta = \ln(r/r_0)$ à la première équation de (2.6), on obtient :

$$\dot{\eta} = \mu - e^{2\eta} = \varepsilon t - \mu_0 - e^{2\eta}$$

Pour $t_0 = -\mu_0/\varepsilon$, $\mu(t_0) = 0$ et, comme la composante η est dominée par la solution de $\dot{\eta} = \varepsilon t_0 - \mu_0$ (d'après le théorème des accroissements finis), on a :

$$\eta(t) < \varepsilon \frac{t_0^2}{2} + \mu_0 t_0 = -\frac{\mu_0^2}{2\varepsilon} \iff r(t_0) < \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu_0^2}{2\varepsilon}\right)$$

En d'autres termes, la fonction définie par le flot de (2.6) entre $\{\mu = \mu_0\}$ et $\{\mu = 0\}$ est exponentiellement petite par rapport à ε . En utilisant le même procédé, on obtient :

$$\eta(2t_0) < 1 \iff r(2t_0) < \rho_0$$

De fait, nous voyons apparaître ce comportement dans la simulation (fig. 2.2). Pour tout (x_0, y_0) , aussi petite que soit sa norme ν , l'orbite reste dans le voisinage de rayon ν de l'axe de la variable u pendant un temps $-2\mu_0/\varepsilon$ (grand quand ε est petit). Ainsi, l'orbite ne rejoint un voisinage choisi assez petit de \mathcal{M}_{μ_0} qu'une fois sa composante μ devenue supérieure à $-\mu_0$. Ainsi, en faisant varier lentement le paramètre μ de bifurcation de la dynamique rapide, nous provoquons un "retard", indépendant de ε , de la déstabilisation de l'orbite.

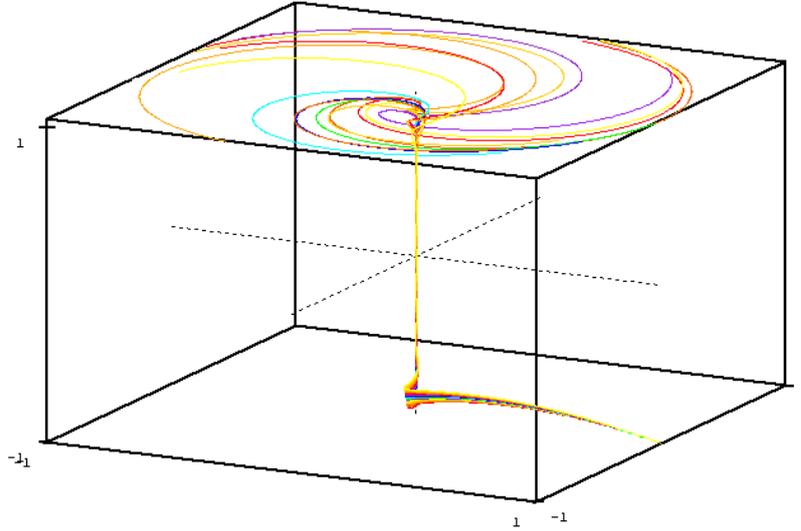


FIG. 2.3 – Orbites de (Hp_ε) pour ε variant entre 0.01 et 0.05 pour la condition initiale $(1, 0, -1)$. L'orbite sort d'un voisinage donné de l'axe $\mu = 0$ pour différentes valeurs de θ .

Remarque 2.2 *Le choix de $\varepsilon < \varepsilon_0$, n'influe en rien sur cette valeur de "déstabilisation", appelée "butée" dans [9]. Cependant, elle définit la valeur de θ pour laquelle l'orbite sort d'un voisinage donné de $\{r = 0\}$ comme le montre la figure 2.3. Cette caractéristique est riche de conséquences puisqu'elle est à la base de certaines bifurcations complexes, telle l'addition de périodes (cf Conclusions et perspectives).*

2.4 Phénomène "Canard"

A la même époque que furent entrepris les premiers travaux sur le phénomène de retard à la bifurcation, E. Benoit, J.L. Callot, F. et M. Diener donnèrent la première définition des "canards" d'un point de vue Analyse Non Standard (voir [6]). Puis, en 1985, C. Lobry et G. Wallet établirent le lien entre les notions en montrant la pertinence d'envisager les canards – définis par des notions non standard – comme des trajectoires subissant un retard à la bifurcation. Nous commençons, dans cette section par donner la première notion non-standard de canards (voir [6]) sur le système de Van der Pol. Cependant, nous utilisons un vocabulaire standard et, de ce fait, nous nous limitons à une idée intuitive. Ceci nous permet de rapprocher les phénomènes canard et retard à la bifurcation. Par la suite, nous donnons la définition standard générale des canards à l'appui des travaux de F. Dumortier et R. Roussarie sur un système de type Van der Pol.

Soit :

$$(VdP_{\varepsilon,c}) : \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y + x - \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} = c - x \end{cases}$$

Un canard de $(VdP_{\varepsilon,c})$ est une trajectoire qui, tout d'abord, rentre dans un voisinage infinitésimal de la partie attractive de la variété lente, passe au voisinage d'un point non hyperbolique de la dynamique rapide, puis reste dans un voisinage infinitésimal de la partie répulsive de la variété lente durant un temps non infinitésimal. Si cet énoncé est satisfaisant pour comprendre le comportement que nous voulons décrire, il soulève cependant beaucoup d'interrogations du simple fait que, d'un point de vue standard, la notion de voisinage infinitésimal (typiquement non-standard) demande à être précisée. Il n'en reste pas moins que cette manière d'appréhender les canards permet de comprendre le phénomène directement sur une trajectoire du système pour une valeur de c donnée proche de 1 et une valeur du paramètre ε , petite mais non infiniment petite, comme montré dans la figure 2.4.

Pour donner à cette notion une définition standard, nous sommes amenés à exhiber une famille à un paramètre d'orbites d'une classe de système qui s'approche d'une partie connexe de la variété critique contenant des points répulsifs de la dynamique rapide. En outre, pour juger de la proximité des trajectoires et de l'ensemble critique,

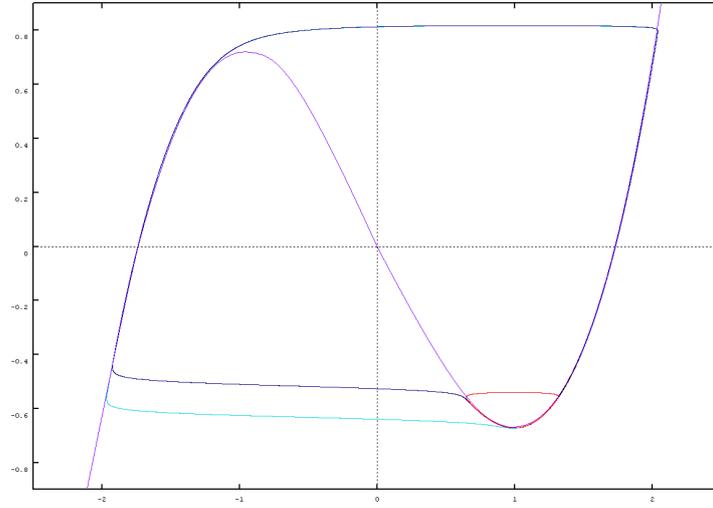


FIG. 2.4 – Orbites périodiques du système de Van der Pol ($VdP_{\varepsilon,c}$) pour $\varepsilon = 0.01$ et en bleu clair $c = 0.99$, en bleu foncé $c = 0.9987404512$, en rouge $c = 0.9987404513$. La variété critique est la cubique représentée en violet.

nous nous restreignons à une partie compacte de l'espace des phases, nous considérons des trajectoires compactes et nous introduisons la distance de Hausdorff bien définie sur les compacts de \mathbb{R}^k . Ainsi :

Définition 2.2 Soit un système lent-rapide dépendant d'un paramètre $c \in \mathbb{R}$:

$$(P_{\varepsilon,c}) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon, c) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon, c) \end{cases}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k$$

dont l'ensemble critique est noté \mathcal{C} . Soit un compact K de \mathbb{R}^n . Alors un canard de $(P_{\varepsilon,c})$ est la limite (compacte) pour $\varepsilon \rightarrow 0$ d'une famille $(\gamma_{\varepsilon,c(\varepsilon)})_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$ de trajectoires compactes de $(P_{\varepsilon,c(\varepsilon)})$ incluses dans K , contenant une sous-variété \mathcal{V} compacte de \mathbb{R}^k incluse dans \mathcal{C} et contenant des points attractifs et des points répulsifs pour la dynamique rapide.

En particulier, dans le cas où la famille $(\gamma_{\varepsilon,c(\varepsilon)})_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$ est formée d'orbites périodiques, un canard est un ensemble limite-périodique.

Nous retrouvons donc la définition non standard des canards en remarquant que les orbites de la famille $(\gamma_{\varepsilon,c(\varepsilon)})_{\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]}$ s'approche arbitrairement près d'un graphique contenant un arc de points de \mathcal{C} répulsifs pour la dynamique rapide. Remarquons que les ensembles limite-périodiques envisagés ici sont, selon les définitions que nous avons

données précédemment, exclusivement des "ensembles limite-continue-périodiques". Ainsi, dans [17], F. Dumortier et R. Roussarie ont étudié, avec une approche standard et en utilisant des éclatements à paramètre, leur apparition dans le système de type Van der Pol :

$$(VdP_{\varepsilon,c}) : \begin{cases} \dot{x} = y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 \\ \dot{y} = \varepsilon(c - x) \end{cases}$$

Les auteurs ont alors montré les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir des ensembles limite-périodiques de chaque type représenté dans la figure 2.5.

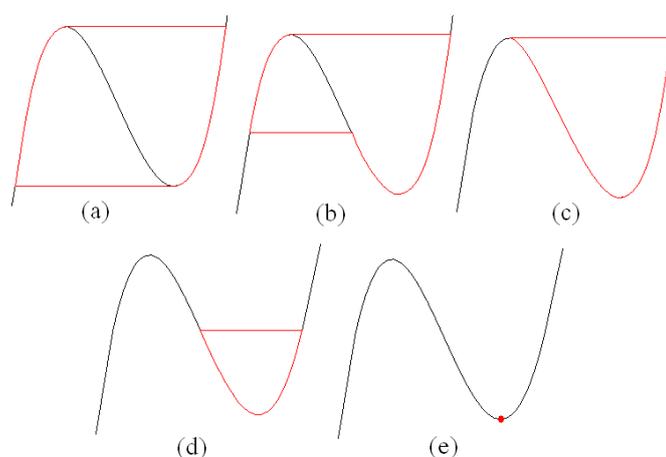


FIG. 2.5 – Les différents types d'ensembles limites périodiques du système $(VdP_{\varepsilon,c(\varepsilon)})$ obtenus selon la fonction $c \geq 0$. Ceux obtenus pour $c \leq 0$ sont les symétriques par rapport à O . (a) Grand cycle, (b) Canards avec tête, (c) Canard maximal sans tête, (d) Canard sans tête, (e) Canard minimal.

Il est important de noter que, dans un cas général, l'obtention de canards nécessite de faire évoluer le paramètre c en fonction du paramètre $\varepsilon \rightarrow 0$. Cependant, nous étudierons dans la suite un type de bifurcations dynamiques sans autre paramètre que ε et faisant apparaître des canards.

Chapitre 3

Analyse des transitions

Pour analyser le comportement des orbites au voisinage de points non hyperboliques de la dynamique rapide, nous ne pouvons pas redresser le champ de vecteurs perturbé, puisqu'il ne s'agit pas de perturbations régulières, ni utiliser la persistance des variétés invariantes. Dans ce chapitre, nous décrivons des outils performants dans ce contexte et que nous utiliserons dans toute la suite. Nous donnons ensuite certains résultats connus d'application de ces méthodes que nous utiliserons par la suite. Pour finir, nous décrivons le phénomène d'oscillations de relaxation à l'appui d'exemples fondamentaux.

3.1 Outils d'analyse du flot au voisinage d'un point non hyperbolique de la dynamique rapide

3.1.1 Les développements asymptotiques

Afin de pouvoir comprendre les comportements des systèmes lents-rapides au voisinage des points non hyperboliques de la dynamique rapide, les premiers auteurs cherchant à montrer des résultats globaux ont utilisé la méthode des développements asymptotiques. Les premières bases de cette méthode ont été posés par L. Pontryagin (voir [62]) et utilisés, par exemple, dans l'étude des oscillations de relaxation dans [29]. En outre, A. Kolesov, E. Mishchenko et N. Rosov l'ont utilisé pour la recherche des orbites périodiques des systèmes de relaxation dans [41], [46] et [54]. C'est également cette méthode que T. Erneux et P. Mandel ont utilisée pour expliquer le phénomène de retard à la bifurcation. Nous en donnons une rapide description en application aux systèmes lents-rapides.

On considère (P_ε) du type (1.3) et on suppose que (P_0) admet un graphique adapté à (P_ε) . On en choisit alors une paramétrisation $\gamma_0(t)$ qu'on peut supposer de période

1. On cherche alors si le système perturbé (P_ε) admet une solution donnée par un développement asymptotique :

$$\gamma_\varepsilon(t) = \gamma_0(t) + \varepsilon \cdot \chi_1(t) + \dots + \varepsilon^k \cdot \chi_k(t) + \dots$$

La méthode consiste alors à remplacer cette solution formelle dans le système (P_ε) et à identifier tous les termes qui factorisent la même puissance de ε . L'inconvénient majeur vient de l'apparition éventuelle de certains termes non bornés dans le développement. Ces termes, dits "séculaires" en référence à leur première application à la mécanique céleste, interdisent de produire un développement asymptotique uniforme sur $t \in [0, +\infty)$. L'oscillateur de type Van der Pol :

$$(VdP_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = y + x - \frac{1}{3}x^3 \\ \dot{y} = -\varepsilon x \end{cases}$$

que l'on peut écrire sous forme d'une équation du second ordre sur \mathbb{R} :

$$\ddot{u} + \dot{u}(1 - u^2) + \varepsilon u = 0$$

est un exemple fort connu mettant cet effet en lumière (voir [31]). Pour résoudre ce problème, des méthodes spécifiques ont été développées : le développement asymptotique en fréquence par Lindstedt, l'approche à deux échelles de temps, la méthode de moyennisation. Mais elles demandent toujours des hypothèses fortes sur les fonctions définissant le système (périodicité ou quasi-périodicité) ou sur l'existence a priori d'orbites périodiques du système perturbé.

Ainsi, nous utiliserons une autre méthode efficace dans l'analyse du flot au voisinage des points singuliers non hyperbolique de la dynamique rapide et permettant de donner un développement asymptotique de la fonction de transition. Nous présentons ici cette méthode dite "d'éclatement à paramètre" (« Blow-up ») et son application aux systèmes lents-rapides au voisinage des points singuliers appartenant à $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_H$.

3.1.2 Les éclatements à paramètre

Nous présentons ici l'outil développé par F. Dumortier et R. Roussarie (voir [16] et [17]). Soit X un champ de vecteur \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^n admettant une singularité à l'origine, $X(0) = 0$. On considère :

$$\Phi : \begin{cases} S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((c_1, \dots, c_n), r) \rightarrow (r^{k_1} c_1, \dots, r^{k_n} c_n) \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i^2 &= 1 \\ (k_1, \dots, k_n) &\in \mathbb{N}^n \end{aligned}$$

Alors le pull-back \hat{X} , défini par $\Phi_*(\hat{X}) = X$, est un champ de vecteurs C^∞ sur $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ appelé “champ éclaté”. On a alors :

$$D\Phi_p(\hat{X}(p)) = X \circ \Phi(p)$$

Nous pouvons alors analyser le champ éclaté dans des cartes en utilisant des “éclatements à paramètres directionnels”. Ainsi, pour chaque variable c_i de la sphère S^{n-1} , on peut associer deux éclatements directionnels dans les cartes $c_i = 1$ et $c_i = -1$. On remarque alors que les pull-backs des éclatements directionnels ont des expressions simples de \hat{X} dans un système de coordonnées choisi. En outre, la singularité dégénérée du champ X devient une sous-variété de $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ de singularités non dégénérées pour \hat{X} .

Enfin, on désingularise le champ \hat{X} en considérant :

$$\bar{X} = \frac{1}{r^l} \hat{X}$$

pour l maximal tel que \bar{X} soit un champ de vecteurs C^∞ sur $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. On remarquera que :

$$l = \max\{\alpha \in \mathbb{N} \mid \forall \beta \leq \alpha, j_\beta(X)(0) = 0\}$$

où $j_\beta(X)(0)$ est le jet d'ordre β de X en 0. Pour les éclatements directionnels, on utilise les :

$$\bar{X}^i = \frac{1}{c_i^l} \hat{X}, \quad i = 1, \dots, n$$

Ainsi, les \bar{X}^i ne sont pas des expressions en coordonnées de \bar{X} mais lui sont conjugués grâce à un changement de coordonnées analytiques et la multiplication par une fonction analytique positive. De fait, il nous est possible de déduire de l'analyse des \bar{X}^i le portrait de phase du champ X au voisinage de la singularité 0 grâce à l'opération inverse de l'éclatement : le « Blow-down ».

L'application la plus pertinente aux systèmes lents-rapides consiste à envisager le champ de vecteurs $X_\varepsilon \times 0$ associé au système :

$$(P_\varepsilon \times 0) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, par éclatement de la constante ε , à présent considérée comme une variable à part entière, on peut déduire la perturbation du X_0 -feuilletage.

3.2 Application à la bifurcation pli

Au chapitre précédent, nous avons étudié le comportement au voisinage de O des orbites du système pli dynamique sous forme normale (Pli_ε^N). A l'aide d'un éclatement

à paramètre et de la proposition 3, nous pouvons développer la fonction de transition de tous les systèmes lents-rapides au voisinage d'un point de bifurcation pli non dégénéré. La première application concerne les systèmes du plan et la seconde les systèmes tridimensionnels à une variable rapide et deux variables lentes.

3.2.1 Transition au voisinage d'un point de bifurcation pli de la dynamique rapide

Les résultats exposés dans cette section sont connus. Le théorème 3.1 a été démontré en utilisant des développements asymptotiques dans [30], [41] et [43] et en effectuant un éclatement à paramètre dans [45]. Nous l'utiliserons dans les chapitres suivants sur des dynamiques globales vérifiant localement ces propriétés.

Soit :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{cases}$$

$$f, g \in C^3(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$$

Nous formons les hypothèses suivantes sur (P_ε) en un point $P \in \mathcal{C}$:

\mathbf{H}_1^P : Il existe un compact K de \mathbb{R}^2 contenant P tel que $\mathcal{C} \cap K$ est une variété en forme de \cap (voir fig. 3.1). On décompose donc $\mathcal{C} \cap K$ en $\mathcal{C}^- \cup \{P\} \cup \mathcal{C}^+$ où \mathcal{C}^- est formée de points attractifs de la dynamique rapide et \mathcal{C}^+ de points répulsifs. On suppose de plus que le point non hyperbolique P est non dégénéré au sens suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P, 0) \neq 0$$

\mathbf{H}_2^P : Le point P n'est pas un point singulier de (S_0) i.e. $g(P, 0) \neq 0$.

Nous pouvons, sous ces conditions, donner une forme canonique du système :

Proposition 4 *Sous les hypothèses \mathbf{H}_1^P et \mathbf{H}_2^P , il existe un changement de variables C^∞ qui conjugue localement au voisinage de P le système (P_ε) à :*

$$(Pli_\varepsilon^{loc}) : \begin{cases} \dot{x} = x^2 + z + O(x^3, xz, \varepsilon) \\ \dot{z} = \varepsilon(1 + O(x, z)) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

Soit U un voisinage de P aussi petit qu'on veut. Les variétés $\mathcal{C}^- \setminus U$ et $\mathcal{C}^+ \setminus U$ invariantes sous le flot de (Pli_ε^{loc}) sont compactes à bord et normalement hyperboliques. Le théorème de Fénichel montre donc l'existence, pour ε assez petit, d'une variété compacte à bord $\mathcal{C}_\varepsilon^-$ (resp. $\mathcal{C}_\varepsilon^+$) invariante sous (Pli_ε^{loc}) normalement hyperbolique et attractive (resp. répulsive) restant dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de \mathcal{C}^- (resp. \mathcal{C}^+). Nous

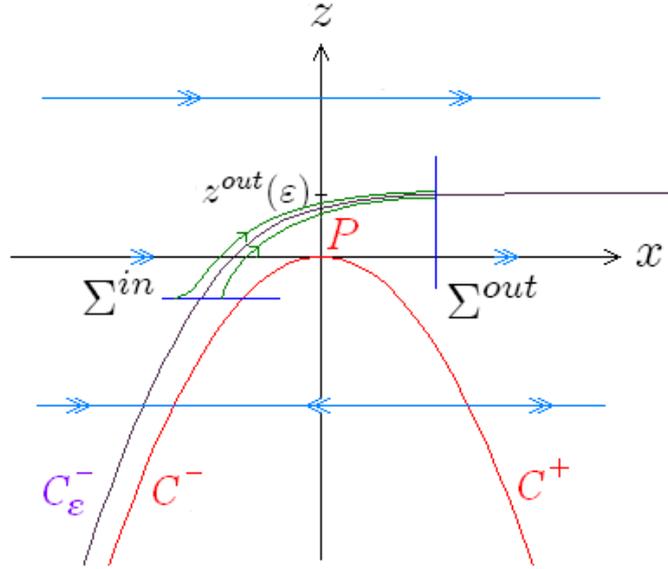


FIG. 3.1 – En rouge, la variété critique et sa décomposition au voisinage de P . En bleu, les trajectoires dans $\{z = cste\}$ du système couche-limite (Pl_0^{loc}). En violet, le prolongement par le flot de la variété invariante perturbée C_ε^- restant dans un ε -voisinage de C^- . En vert, la représentation de la fonction de transition entre Σ^{in} et Σ^{out} .

obtenons respectivement une contraction et une dilatation exponentielles des orbites de (P_ε) au voisinage de ces variétés persistantes.

Remarquons que le prolongement de C_ε^- par le flot de (P_ε) correspond à l'orbite particulière γ_ε de la proposition 3 (voir 2.2.3). La fonction de transition au voisinage de P doit être étudiée en utilisant des développements asymptotiques de cette forme locale ou en effectuant un éclatement à paramètre. On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 3.1 Pour $\delta > 0$, J_1, J_2 intervalles de \mathbb{R} , on note :

$$\begin{aligned}\Sigma^{in} &= \{(x, -\delta^2) \mid x \in J_1\} \\ \Sigma^{out} &= \{(\delta, z) \mid z \in J_2\}\end{aligned}$$

deux sections transverses respectivement à C^- et aux trajectoires rapides $\{x = cste\}$.

On pose $\Pi : \Sigma^{in} \rightarrow \Sigma^{out}$ la fonction de transition induite par le flot de (Pl_ε^{loc}) .

Il existe $\delta > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ et des intervalles J_1 et J_2 tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$:

$$C_\varepsilon^- \cap \Sigma^{out} = \{(\delta, z^{out}(\varepsilon))\}$$

avec $z^{out}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{2/3})$ et l'application Π est bien définie.

Elle admet alors le développement :

$$\Pi \begin{pmatrix} x \\ -\delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ z^{out}(\varepsilon) + \Psi(x, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

où Ψ est exponentiellement petite par rapport à ε .

3.2.2 Courbe de bifurcations plis dans l'espace

Nous généralisons ici le résultat dans le cas de la bifurcation pli de la dynamique rapide de dimension 1 au cas de la dimension 2.

Soit :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{z} = \varepsilon h(x, y, z, \varepsilon) \end{cases}$$

$$f, g \in C^3(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$$

Nous formons les hypothèses géométriques suivantes sur (P_ε) :

$\mathbf{H}_1^{\mathcal{P}}$: Il existe un compact K de \mathbb{R}^3 dans lequel l'ensemble critique \mathcal{C} est une variété de dimension 2 en forme de \cap comme montré sur la figure 3.2. On décompose donc $\mathcal{C} \cap K$ en $S^- \cup \mathcal{P} \cup S^+$ où $\partial_x f < 0$ sur S^- et $\partial_x f > 0$ sur S^+ . On suppose, de plus, que les points non hyperboliques de la courbe \mathcal{P} sont non dégénérés, i.e. :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P, 0) \neq 0$$

$\mathbf{H}_2^{\mathcal{P}}$: La courbe \mathcal{P} est donnée par un graphe $(x_{\mathcal{P}}(y), y, z_{\mathcal{P}}(y))$, $y \in I$ et les points de \mathcal{P} sont des points de décrochage de la dynamique, i.e. :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad \begin{pmatrix} \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(P, 0) \neq 0$$

et le flot de (S_0) est transverse à \mathcal{P} .

Nous pouvons alors donner une forme canonique du système :

Proposition 5 *Sous les hypothèses $\mathbf{H}_1^{\mathcal{P}}$ et $\mathbf{H}_2^{\mathcal{P}}$, il existe un changement de variables C^∞ qui conjugue localement au voisinage de \mathcal{P} le système (P_ε) à :*

$$(\mathcal{P}li_\varepsilon^{loc}) : \begin{cases} \dot{x} = x^2 + z + O(x^3, xyz, x^2z, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon O(x, z, \varepsilon) \\ \dot{z} = \varepsilon (1 + O(x, z, \varepsilon)) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

où $y \in I$, I intervalle compact de \mathbb{R} .

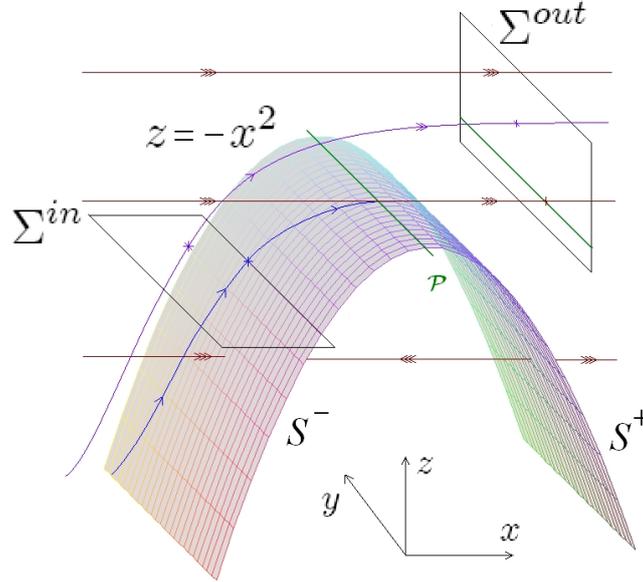


FIG. 3.2 – La variété critique et sa décomposition au voisinage de \mathcal{P} . En marron, les trajectoires dans $\{y = cste, z = cste\}$ du système couche-limite (Pl_0^{loc}). En bleu, une trajectoire du système critique associé. En violet, une orbite ayant pour donnée initiale un point de Σ^{in} et coupant Σ^{out} .

A l’instar du cas plan, en dehors d’un voisinage U de \mathcal{P} , S^- et S^+ sont des variétés compactes à bord normalement hyperboliques. Le théorème de Fénichel implique l’existence, pour ε assez petit, d’une variété compacte à bord invariante sous (P_ε) normalement hyperbolique et attractive (resp. répulsive) restant dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de S^- (resp. S^+). Nous obtenons donc une contraction (resp. dilatation) exponentielle des orbites de (P_ε) le long de la variété attractive (resp. répulsive) persistante. Nous nommons S_ε^- (resp. S_ε^+) le prolongement de cette variété compacte à bord par le flot (P_ε) . Le théorème suivant a été démontré dans [29] grâce à des développements asymptotiques et dans [67] avec des techniques d’éclatements à paramètre.

Théorème 3.2 *Pour $\delta > 0$, J_1, J_2 rectangles de \mathbb{R}^2 , on note :*

$$\begin{aligned}\Sigma^{in} &= \{(x, y, -\delta^2) \mid (x, y) \in J_1\} \\ \Sigma^{out} &= \{(\delta, y, z) \mid (y, z) \in J_2\}\end{aligned}$$

deux sections transverses respectivement à S^- et aux trajectoires rapides $\{x = cste\}$. On pose $\Pi : \Sigma^{in} \rightarrow \Sigma^{out}$ la fonction de transition définie par le flot de (P_ε^{loc}) .

Il existe $\delta > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ et des intervalles I^{out} , J_1 et J_2 tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $S_\varepsilon^- \cap \Sigma^{out}$ est une courbe lisse définie par le graphe :

$$z = z^{out}(y, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{2/3}\right)$$

et l'application Π est bien définie de Σ^{in} dans Σ^{out} .

Alors elle admet le développement :

$$\Pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \Pi^y(x, y, \varepsilon) \\ z^{out}(\Pi^y(x, y, \varepsilon), \varepsilon) + \Psi(x, \varepsilon) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où Ψ est exponentiellement petite par rapport à ε et :

$$\Pi^y(x, y, \varepsilon) = y^{out}(y) + O(\varepsilon \ln \varepsilon) = y + O(\rho^3) + O(\varepsilon \ln \varepsilon)$$

En particulier, y^{out} est induite par le flot de (S_0^{loc}) sur $\Sigma^{in} \cap S^-$ sur \mathcal{P} .

3.3 Oscillations de relaxation

Nous donnons ici l'application principale des résultats de la section précédente et qui nous intéresse particulièrement dans cette étude : la recherche d'orbites périodiques alternant des phases rapides et lentes.

3.3.1 Relaxation dans le plan

Nous retrouvons un résultat classique déjà démontré dans [41]. Soit :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{cases}$$

$$f, g \in C^3(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$$

Afin d'obtenir un comportement oscillatoire du système, nous posons les hypothèses globales suivantes :

$\mathbf{H}_3^{P_1, P_2}$: L'ensemble critique \mathcal{C} de (P_ε) est une variété en forme de S et la dynamique rapide subit en P_1 et en P_2 des bifurcations plis non dégénérées :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^- \cup \{P_1\} \cup \mathcal{C}^+ \cup \{P_2\} \cup \mathcal{C}_2^-$$

tels que les hypothèses $\mathbf{H}_1^{P_1}$, $\mathbf{H}_2^{P_1}$, $\mathbf{H}_1^{P_2}$ et $\mathbf{H}_2^{P_2}$ sont vérifiées.

$\mathbf{H}_4^{P_1, P_2}$: Soient $Q_2 \in \mathcal{C}_1^-$ et $Q_1 \in \mathcal{C}_2^-$ les projections des points P_2 et P_1 respectivement le long des trajectoires rapides sur la branche attractive opposée. On suppose qu'il existe une graphique Γ de (P_0) adapté à (P_ε) dont les séparatrices sont $[P_1, Q_1]$ et $[P_2, Q_2]$.

Remarque 3.1 *L'utilisation de la notion générale de graphique – équivalente, en dimension 2, à celle d'orbite périodique singulière – permet de regrouper plusieurs conditions différentes sur les attracteurs de la dynamique rapide et les fonctions définissant le flot.*

Théorème 3.3 *Sous les hypothèses $\mathbf{H}_3^{P_1, P_2}$ et $\mathbf{H}_4^{P_1, P_2}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, il existe une orbite périodique attractive isolée γ_ε du système (P_ε) .*

La famille à un paramètre (γ_ε) converge vers Γ au sens de la distance de Hausdorff quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ce résultat décrit un phénomène plus général appelé “oscillations de relaxation” :

Définition 3.1 *Le système (P_ε) présente des oscillations de relaxation s'il admet une famille d'orbites périodiques pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ qui converge, pour la distance de Hausdorff vers une orbite limite contenant à la fois des trajectoires lentes et des trajectoires rapides.*

Exemple 3.1 *Le système de Van der Pol :*

$$(VdP_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = y + x - \frac{1}{3}x^3 \\ \dot{y} = -\varepsilon x \end{cases}$$

vérifie ces hypothèses. Il s'agit d'un exemple classique de système dit de “relaxation”. Il admet pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ une orbite périodique globalement attractive (grand cycle limite).

3.3.2 Relaxation dans l'espace

Nous décrivons ici un résultat connu qui utilise l'analyse du flot au voisinage d'une courbe de bifurcation pli de la dynamique rapide. Afin d'obtenir des oscillations de relaxation du système :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, z, \varepsilon) \\ \dot{z} = \varepsilon h(x, y, z, \varepsilon) \end{cases}$$

$$f, g \in C^3(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$$

nous formons les hypothèses globales suivantes :

$\mathbf{H}_3^{\mathcal{P}_+, \mathcal{P}_-}$: La variété est en forme de S et la dynamique rapide subit en chaque point des lignes \mathcal{P}_+ et \mathcal{P}_- des bifurcations plis non dégénérées, selon le paramètre de bifurcation z :

$$\mathcal{C} = S_1^- \cup \mathcal{P}_- \cup S^+ \cup \mathcal{P}_+ \cup S_2^-$$

tels que les hypothèses $\mathbf{H}_1^{\mathcal{P}_1}$, $\mathbf{H}_2^{\mathcal{P}_1}$, $\mathbf{H}_1^{\mathcal{P}_2}$ et $\mathbf{H}_2^{\mathcal{P}_2}$ sont vérifiées pour \mathcal{P}_1 et en \mathcal{P}_2 .

$\mathbf{H}_4^{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2}$: On suppose qu'il existe un graphique Γ de (P_0) adapté à (P_ε) formé de $[P_1, Q_1]$, $[P_2, Q_2]$ et des trajectoires de (S_0) reliant Q_2 à P_1 et Q_1 à P_2 où $P_1 \in \mathcal{P}_1$, $P_2 \in \mathcal{P}_2$, Q_1 (resp. Q_2) est la projection de P_1 (resp. P_2) sur S_2^- (resp. S_1^-) le long des trajectoires rapides.

$\mathbf{H}_5^{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2}$: Soit Σ^- une section transverse à S_1^- telle que $\Gamma \cap \Sigma^- = \{p_0\}$. On suppose que :

$$\frac{d\pi_0}{dy}(p_0) \neq 1$$

où π_0 est l'application de premier retour induite par le système hybride (S_0) et dont p_0 est un point fixe.

Remarque 3.2 *Cette dernière hypothèse impose l'hyperbolicité de l'orbite singulière Γ . De fait, on obtient l'hyperbolicité du point fixe de l'application de retour. Elle est essentielle pour obtenir sa persistance sous la perturbation et donc l'existence d'un point fixe de l'application de retour du système (P_ε) avec $\varepsilon > 0$ assez petit.*

Le théorème suivant a été démontré dans [7] et dans [67].

Théorème 3.4 *Sous les hypothèses $\mathbf{H}_3^{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2}$, $\mathbf{H}_4^{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2}$, $\mathbf{H}_5^{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2}$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, il existe une orbite périodique attractive isolée (γ_ε) du système (P_ε) .*

La famille à un paramètre (γ_ε) converge vers Γ au sens de la distance de Hausdorff quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

3.3.3 Exemple

Nous considérons un exemple proche du système de Van der Pol pour lequel nous ajoutons une perturbation de la dynamique lente par l'intermédiaire de y :

$$\begin{cases} \dot{x} = -z + 4x - x^3 + y \\ \dot{y} = \frac{\varepsilon}{3} (x - z + \frac{1}{3}z^2 - y^3) \\ \dot{z} = \varepsilon x \end{cases} \quad (3.2)$$

On obtient une famille d'orbites périodiques dépendant du paramètre ε comme sur la figure 3.3.

3.4 Bifurcation de Hopf dans un système de relaxation

3.4.1 Description

Dans la sous-section précédente, nous avons exposé les résultats connus sur l'existence d'orbites périodiques de relaxation pour les systèmes du plan oscillant avec deux

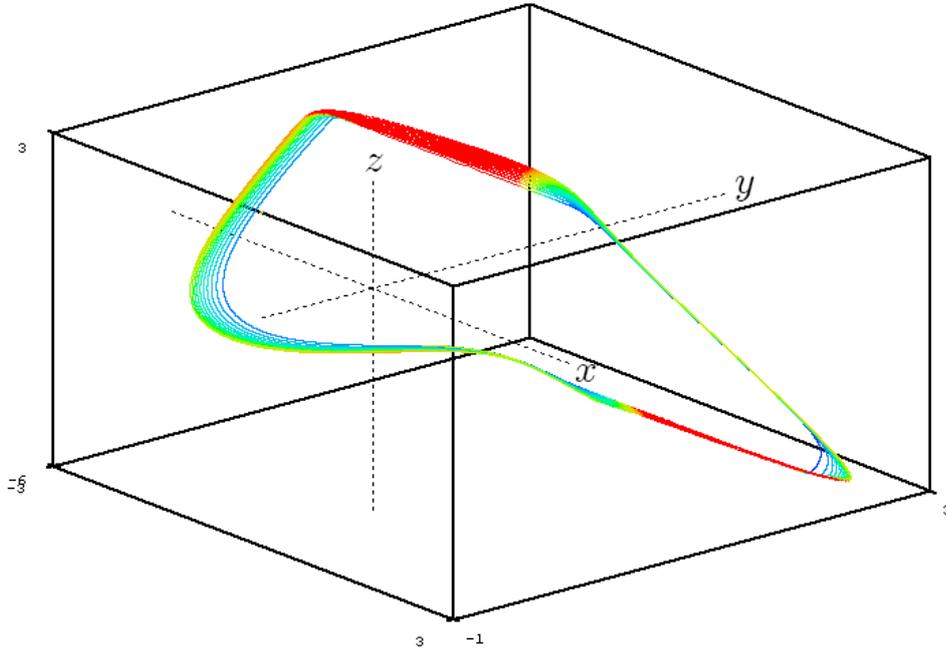


FIG. 3.3 – Orbites périodiques du système (3.2) pour différentes valeurs de ε entre 0.01 et 0.2. Les parties rouges correspondent aux mouvements rapides.

transitions de type pli. Nous analysons ici la bifurcation obtenue en déplaçant la variété $\dot{z} = 0$. Cette variété intersecte la variété critique au point singulier du système (P_ε) . Lorsque ce point appartient à \mathcal{C}^+ , il s'agit d'un foyer répulsif et il est entouré du cycle limite de relaxation. Lorsqu'il appartient à \mathcal{C}_1^- , il s'agit alors d'un foyer attractif. Ainsi, au passage par P_1 , le point singulier a subi une bifurcation de Hopf qui a fait disparaître le cycle limite attractif : il s'agit d'une bifurcation de Hopf surcritique.

3.4.2 Notion d'excitabilité

Nous utilisons à présent la description précédente afin de décrire un phénomène en application directe à la physiologie. Il s'agit d'un comportement omniprésent dans les systèmes issus de la modélisation biologique et qualifiés d'“excitables”.

Considérons un système lent-rapide plan vérifiant les hypothèses $\mathbf{H}_3^{P_1, P_2}$ et $\mathbf{H}_4^{P_1, P_2}$. Le point singulier de ce système entouré du cycle limite change de stabilité au passage d'un côté à l'autre du point de bifurcation pli. Dans ce qui suit, nous ramenons un des points de bifurcation pli à l'origine. Nous notons alors (\bar{x}, \bar{z}) le point singulier que nous faisons évoluer. Par conséquent, nous pouvons supposer que, le point singulier, noté (\bar{x}, \bar{z}) , est attractif si $\bar{x} < 0$ et répulsif si $\bar{x} > 0$.

Nous poursuivons alors la description du flot pour les petites valeurs de ε en remarquant les comportements suivants (voir fig. 3.4). Supposons $\bar{x} < 0$, proche de 0, et donc (\bar{x}, \bar{z}) proche de $(0, 0)$. Soit tout d'abord une donnée initiale (x_0, z_0) proche de (\bar{x}, \bar{z}) avec z_0 au-dessus du "seuil", soit $z_0 > \bar{z}$. Alors, l'orbite rejoint un voisinage quelconque de (\bar{x}, \bar{z}) en un temps exponentiellement petit en ε . À présent, supposons que la donnée initiale est en-dessous du "seuil", soit $z_0 < \bar{z}$. Alors l'orbite passe en-dessous du point pli, rejoint le voisinage de l'autre branche attractive \mathcal{C}_2^- de la variété critique, et se rapproche de la variété lente $\mathcal{C}_{2,\varepsilon}^-$. Elle suit cette variété jusqu'à un voisinage du deuxième point de transition de la dynamique. Sous l'influence de la dynamique rapide, l'orbite rejoint alors la branche \mathcal{C}_1^- puis suit la variété lente $\mathcal{C}_{1,\varepsilon}^-$ jusqu'à un voisinage de (\bar{x}, \bar{z}) et tourne autour de ce foyer attractif.

Dans ce dernier cas, l'orbite a donc réalisé une grande incursion dans le portrait de phase avant de revenir au point singulier stable. Ce comportement typique est appelé "excitabilité du point singulier stable". Remarquons, en outre, que les données initiales pour lesquelles l'orbite suit longtemps la variété lente répulsive forme une bande étroite autour de $z = \bar{z}$. Nous retrouvons ici l'existence de canards. Dans la classe de systèmes ici considérée, nous comprenons alors pourquoi les canards sont si difficiles à exhiber du fait de l'étroitesse de la bande de conditions initiales pour lesquelles ils apparaissent.

3.4.3 Simulation

Afin de montrer le comportement décrit dans la sous-section précédente, nous considérons le système de Van der Pol dans un système de coordonnées tel qu'un des points de bifurcation pli soit l'origine :

$$(VdP_{\varepsilon,a}) : \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = -\left(z - \frac{2}{3}\right) + (x-1) - \frac{1}{3}(x-1)^3 = -z + f(x) \\ \dot{z} = (x-1) - a \end{cases}$$

Nous prenons $a = -0.01$ pour valeur du paramètre. Nous obtenons alors les trajectoires de la figure 3.4 pour des valeurs très voisines de \bar{z} .

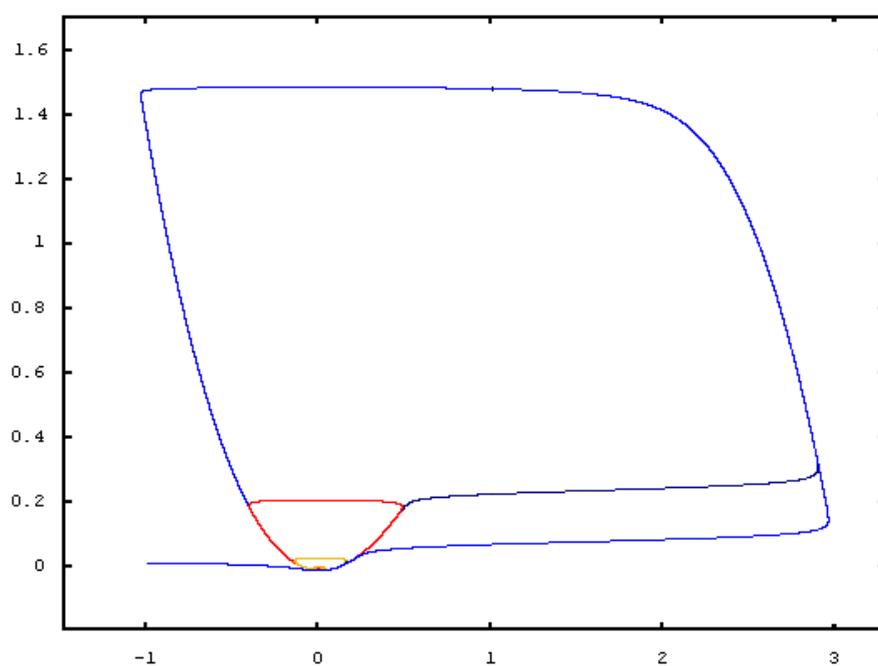


FIG. 3.4 – Orbites du système de Van der Pol ($VdP_{\varepsilon,a}$) pour $a = -0.01$ et différentes données initiales $(-1, z_0)$. La trajectoire orange définie par $z_0 = 0.0187$ rejoint rapidement le point singulier stable alors que la trajectoire bleu clair définie pour $z_0 = 0.0186$ réalise une grande incursion près de l'autre branche attractive de la cubique. Les trajectoires rouge et bleu foncé, définies respectivement par $z_0 = 0.0185694160356796$ et $z_0 = 0.0185694160356795$, représentent les deux types de canards, dits “sans tête” et “avec tête”, qu'on peut exhiber.

Chapitre 4

Bifurcation transcritique dynamique

Certains systèmes, pourtant communs et auxquels seront appliqués les résultats de cette étude, exhibent des transitions plus complexes, générées par des bifurcations plus sophistiquées. Nous considérons ici le cas de la bifurcation transcritique de la dynamique rapide d'un système plan. En premier lieu, nous étudions la bifurcation transcritique dynamique. A l'aide d'une forme normale décrivant cette singularité, nous développons la fonction de transition au voisinage du point de bifurcation et nous caractérisons le comportement asymptotique du portrait de phase lorsque le paramètre ε tend vers 0. Nous mettons ensuite ce comportement en rapport avec le principe de retard à la bifurcation décrit au chapitre 2.

4.1 Forme normale

Considérons le système local lent-rapide suivant au voisinage de O :

$$(TC_\varepsilon^N) : \begin{cases} \dot{x} = x(x + \alpha z) \\ \dot{z} = \varepsilon \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\alpha > 0$. Remarquons, en premier lieu, que l'axe $\{x = 0\}$ est invariant par le flot. Nous nous intéressons à la transition de la dynamique dans un voisinage U de O dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, la symétrie du système nous permettant de restreindre notre étude au demi-plan positif $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sans perte de généralité en déduisant les résultats pour $\alpha < 0$.

4.1.1 Description du flot local

Les points singuliers de la dynamique rapide :

$$(R_z) : \dot{x} = x^2 + \alpha x z$$

pour les différentes valeurs de z , considéré comme un paramètre, forment l'ensemble critique de (TC_ε^N) :

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid x(x + \alpha z) = 0\} = \Delta \cup \mathcal{L} \\ \Delta &= \{(0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{L} &= \{(-\alpha z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

La valeur propre associée à la dynamique rapide (R_z) au point singulier x vaut $2x + \alpha z$. Ceci détermine la nature de ce point singulier selon le signe de z . Le point 0 admet αz comme valeur propre. Alors, si $z < 0$, 0 est attractif pour (R_z) et, si $z > 0$, il est répulsif. La valeur propre $x = -\alpha z$ est αz . Donc, pour $z < 0$, $-\alpha z$ est répulsif et attractif pour $z > 0$. De fait, comme z est considéré comme un paramètre, la dynamique rapide subit une "bifurcation transcritique" pour $z = 0$ qui échange la nature des points singuliers $(0, z)$ et $(-\alpha z, z)$. Puisque le linéarisé de (TC_ε^N) admet 0 comme valeur propre en O , ce point singulier est dégénéré.

Considérons maintenant l'orbite de (TC_ε^N) passant à $t = 0$ par un point (x_0, z_0) tel que $0 < x_0 < \kappa$ soit assez petit et $z_0 < 0$. La variable z croît linéairement en fonction du temps et, sous l'influence de la dynamique rapide, l'orbite est fortement attirée par la demi-droite $\Delta^- = \Delta \cap \{z < 0\}$. Elle rejoint donc un voisinage de O et passe par la demi-droite $\{(-\alpha z, z) \mid z < 0\}$.

Le point-clé pour comprendre le comportement de ce système local consiste à savoir comment l'orbite est repoussée quand elle se trouve entre $\{x = -\alpha z\}$ et $\{z = 0\}$. Pour le reste, l'attraction de la demi-droite Δ^- est aussi forte que la répulsion exercée par $\Delta^+ = \Delta \cap \{z > 0\}$. Nous sommes donc amenés à décrire, au moins d'une manière formelle la fonction de transition de (TC_ε^N) entre deux sections transverses au flot de part et d'autre de O .

4.1.2 Intégration de la forme normale

La dynamique lente de (TC_ε^N) peut être intégrée directement :

$$z(t) = \varepsilon t + z_0, \quad z(0) = z_0$$

et être remplacée dans la dynamique sur x :

$$\dot{x} = x^2 + \alpha(\varepsilon t + z_0)x$$

Il s'agit d'une équation de Riccati-Bernoulli pour laquelle $x \equiv 0$ est une solution particulière. Le changement de variable $\xi = \frac{1}{x}$ mène à l'équation :

$$\dot{\xi} + \alpha(\varepsilon t + z_0)\xi = -1$$

L'équation homogène admet les solutions suivantes :

$$\bar{\xi}(t) = \bar{\xi}_0 \cdot \exp \left[-\alpha \left(\frac{\varepsilon}{2} t^2 + z_0 t \right) \right], \quad \bar{\xi}_0 \in \mathbb{R}_+^*$$

La méthode de variation de la constante nous amène à chercher une solution de :

$$\dot{k} = -\exp \left[\alpha \left(\frac{\varepsilon}{2} t^2 + z_0 t \right) \right]$$

et on pose :

$$k(t) = -\int_0^t \exp \left[\alpha \left(\frac{\varepsilon}{2} \tau^2 + z_0 \tau \right) \right] \cdot d\tau \quad (4.2)$$

Finalement, puisque, pour κ assez petit :

$$x_0 < \kappa \implies \exists t_0 > 0, \forall t \in [0, t_0[, 1 + x_0 \cdot k(t) > 0$$

l'orbite du système (TC_ε^N) passant par le point (x_0, z_0) est paramétrisée pour $t \in [0, t_0[$ par :

$$\bar{x}_\varepsilon(x_0, z_0, t) = \frac{x_0}{1 + x_0 k(t)} \cdot \exp \left[\alpha \left(\frac{\varepsilon}{2} t^2 + z_0 t \right) \right] \quad (4.3)$$

$$\bar{z}_\varepsilon(x_0, z_0, t) = \varepsilon t + z_0 \quad (4.4)$$

dans un voisinage de O .

4.1.3 Développement de la fonction de transition

Soient

$$\Sigma^{-\delta} = \{(x, -\delta) | 0 \leq x < \kappa\} \quad (4.5)$$

$$\Sigma^\delta = \{(x, \delta) | x \geq 0\} \quad (4.6)$$

où δ , constante assez petite, κ constante dépendant de δ seront choisies ultérieurement. Le flot de (TC_ε^N) définit la fonction de transition σ_ε entre Σ^δ et $\Sigma^{-\delta}$ dont nous voulons donner un développement en ε .

Précisons que le choix de ces sections est motivé par l'analyse ultérieure du flot éclaté de la forme canonique traitée dans 4.2.2 (cf carte K_2). Une fonction de transition peut également être définie par le flot entre des sections transverses aux fibres rapides et la fonction de sortie développée en utilisant l'intégrale de la divergence lente (cf [18]).

La paramétrisation de la dynamique lente (4.4) montre que le temps de transition entre $\Sigma^{-\delta}$ et Σ^δ est $\frac{2\delta}{\varepsilon}$. Donc, l'orbite de (TC_ε^N) passant par $(x_0, -\delta) \in \Sigma^{-\delta}$ coupe Σ^δ en :

$$\sigma_\varepsilon(x_0, \delta) = (\sigma_\varepsilon^x(x_0, \delta), \delta) \quad (4.7)$$

où

$$\sigma_\varepsilon^x(x_0, \delta) = \bar{x} \left(x_0, -\delta, \frac{2\delta}{\varepsilon} \right) = \frac{x_0}{1 + x_0 k \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} \right)} \quad (4.8)$$

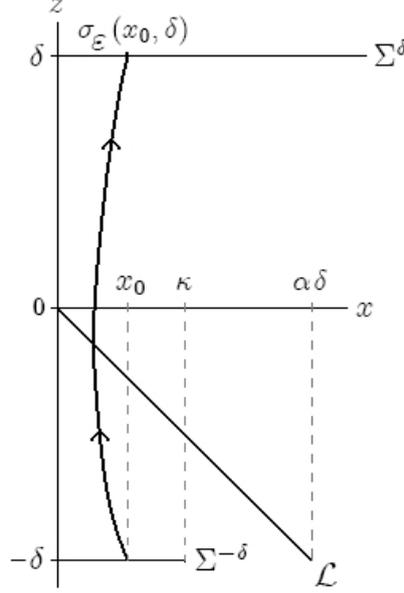


FIG. 4.1 – Trajectoire de (TC_ε^N) . La fonction de transition σ_ε induite par le flot entre $\Sigma^{-\delta}$ et Σ^δ .

Lemme 5

$$k \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} \right) = - \int_0^{2\delta/\varepsilon} \exp \left[\alpha \left(\frac{\varepsilon}{2} t^2 - \delta t \right) \right] .dt \underset{\varepsilon \rightarrow 0^+}{=} - \frac{2}{\alpha\delta} + O(\varepsilon) \quad (4.9)$$

Démonstration. Appliquons le changement de variable temporelle suivant :

$$\varphi : \begin{cases} [0, \frac{\delta}{\varepsilon}] \rightarrow [0, \frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}] \\ t \rightarrow \frac{\alpha\varepsilon}{2} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} - t \right)^2 = v \end{cases}, \quad \varphi^{-1} : \begin{cases} [0, \frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}] \rightarrow [0, \frac{\delta}{\varepsilon}] \\ v \rightarrow \frac{\delta}{\varepsilon} - \sqrt{\frac{2v}{\alpha\varepsilon}} = t \end{cases}$$

$$\Psi : \begin{cases} [\frac{\delta}{\varepsilon}, \frac{2\delta}{\varepsilon}] \rightarrow [0, \frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}] \\ t \rightarrow \frac{\alpha\varepsilon}{2} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} - t \right)^2 = v \end{cases}, \quad \Psi^{-1} : \begin{cases} [0, \frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}] \rightarrow [\frac{\delta}{\varepsilon}, \frac{2\delta}{\varepsilon}] \\ v \rightarrow \frac{\delta}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{2v}{\alpha\varepsilon}} = t \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} -k \left(\frac{2\delta}{\varepsilon} \right) &= \int_0^{\delta/\varepsilon} \exp \left[\alpha \left(\frac{\varepsilon}{2} t^2 - \delta t \right) \right] .dt + \int_{\delta/\varepsilon}^{2\delta/\varepsilon} \exp \left[\alpha \left(\frac{\varepsilon}{2} t^2 - \delta t \right) \right] .dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\alpha\varepsilon}} \exp \left(-\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon} \right) \int_0^{\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}} \frac{\exp(v)}{\sqrt{v}} .dv \end{aligned}$$

En intégrant par parties, on obtient pour tout $u > 0$:

$$\int_u^{\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}} \frac{\exp(v)}{\sqrt{v}} \cdot dv = \exp\left(\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}\right) \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha\delta^2}} - \frac{e^u}{u\sqrt{u}} + \frac{1}{2} \int_u^{\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}} \frac{\exp(v)}{v\sqrt{v}} \cdot dv \quad (4.10)$$

Une seconde intégration par parties, avec $u = 1$, montre :

$$\int_1^{\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}} \frac{\exp(v)}{v\sqrt{v}} \cdot dv = \frac{2\varepsilon}{\alpha\delta^2} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha\delta^2}} \exp\left(\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}\right) - e + \frac{3}{2} \int_1^{\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}} \frac{\exp(v)}{v\sqrt{v}} \cdot dv$$

Et, par domination de $\frac{1}{v^2}$ par $\frac{1}{v}$ pour tout $v > 1$:

$$\frac{1}{2} \int_1^{\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}} \frac{\exp(v)}{v\sqrt{v}} \cdot dv \geq e - \frac{2\varepsilon}{\alpha\delta^2} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha\delta^2}} \exp\left(\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} -k\left(\frac{2\delta}{\varepsilon}\right) &\geq \sqrt{\frac{2}{\alpha\varepsilon}} \exp\left(-\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}\right) \int_0^1 \frac{\exp(v)}{\sqrt{v}} \cdot dv + \frac{2}{\alpha\delta} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\alpha\delta^2}\right) \\ &\geq \frac{2}{\alpha\delta} - \frac{4}{\alpha^2\delta^3\varepsilon} \end{aligned}$$

Ce qui mène à :

$$\text{Pour } \varepsilon > 0 \text{ assez petit, } \frac{1}{\varepsilon} \left(-k\left(\frac{2\delta}{\varepsilon}\right) - \frac{2}{\alpha\delta}\right) \text{ est minoré}$$

En outre, pour tout u tel que $\frac{1}{2} < u \leq v \leq \frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}$, d'après (4.10), on a :

$$\int_u^{\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}} \frac{\exp(v)}{\sqrt{v}} \cdot dv \leq \exp\left(\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}\right) \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha\delta^2}} - \frac{e^u}{u\sqrt{u}} + \frac{1}{2u} \int_u^{\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}} \frac{\exp(v)}{\sqrt{v}} \cdot dv$$

et :

$$\int_u^{\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}} \frac{\exp(v)}{\sqrt{v}} \cdot dv \leq \frac{2u}{2u-1} \left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha\delta^2}} \exp\left(\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}\right) - \frac{e^u}{u\sqrt{u}} \right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} -k\left(\frac{2\delta}{\varepsilon}\right) &\leq \sqrt{\frac{2}{\alpha\varepsilon}} \exp\left(-\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}\right) \left[\int_0^u \frac{\exp(v)}{\sqrt{v}} \cdot dv + \frac{2u}{2u-1} \left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha\delta^2}} \exp\left(\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}\right) - \frac{e^u}{u\sqrt{u}} \right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\alpha\varepsilon}} \exp\left(-\frac{\alpha\delta^2}{2\varepsilon}\right) \left(\int_0^u \frac{\exp(v)}{\sqrt{v}} \cdot dv - \frac{2}{2u-1} \cdot \frac{e^u}{\sqrt{u}} \right) + \frac{2u}{2u-1} \cdot \frac{2}{\alpha\delta} \end{aligned}$$

Comme ce résultat est vrai pour tout $u > 1$, on choisit $u = \frac{\alpha\delta^2}{4\varepsilon}$ (on s'intéresse à $\varepsilon \rightarrow 0$) :

$$-k\left(\frac{2\delta}{\varepsilon}\right) \leq \sqrt{\frac{2}{\alpha\varepsilon}} \exp\left(-\frac{\alpha\delta^2}{4\varepsilon}\right) \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon}}\delta - \frac{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\alpha\delta}(\alpha\delta^2 - 2\varepsilon)}\right) + \frac{\alpha\delta^2}{\alpha\delta^2 - 2\varepsilon} \cdot \frac{2}{\alpha\delta}$$

Cette relation montre :

$$\text{Pour } \varepsilon > 0 \text{ assez petit, } \frac{1}{\varepsilon} \left(-k\left(\frac{2\delta}{\varepsilon}\right) - \frac{2}{\alpha\delta}\right) \text{ est minoré}$$

Finalement :

$$k\left(\frac{2\delta}{\varepsilon}\right) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} -\frac{2}{\alpha\delta} + O(\varepsilon)$$

ce qui termine la preuve. ■

Nous utilisons ce lemme pour donner le développement de $\sigma_\varepsilon(x, \delta)$ en ε .

Proposition 6 Pour tout $(x, \delta) \in \Sigma^\delta$ tel que $x < \kappa < \frac{\alpha\delta}{2}$:

$$\sigma_\varepsilon^x(x, \delta) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{\alpha\delta x}{\alpha\delta - 2x} (1 + x.O(\varepsilon)) \quad (4.11)$$

Démonstration. On a directement d'après (4.8) et (4.9) :

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^x(x, \delta) &= \frac{x}{1 + xk\left(\frac{2\delta}{\varepsilon}\right)} = \frac{x}{1 - x\left(\frac{2}{\alpha\delta} + O(\varepsilon)\right)} = \frac{x}{1 - \frac{2}{\alpha\delta}x + xO(\varepsilon)} \\ &= \frac{\alpha\delta x}{\alpha\delta - 2x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\alpha\delta x}{\alpha\delta - 2x}O(\varepsilon)} = \frac{\alpha\delta x}{\alpha\delta - 2x} \left(1 + \frac{\alpha\delta x}{\alpha\delta - 2x}O(\varepsilon)\right) \end{aligned}$$

■

Remarque 4.1 1) La valeur de κ peut être choisie aussi proche de $\alpha\delta/2$ qu'on veut en considérant ε assez petit.

2) Le fait que la fonction de transition σ_O n'est pas bien définie pour $x > \kappa$ résulte de l'explosion des solutions $\bar{x}(x, -\delta, t)$ dans ce cas pour les valeurs de $t \leq \frac{2\delta}{\varepsilon}$. Cependant, ce résultat nous suffit puisque nous voulons décrire le comportement du système local (TC_ε^N) dans un petit voisinage de O .

Nous remarquons donc que, malgré le caractère répulsif de $\{(0, z) | z > 0\}$, l'orbite reste pendant un temps long près de ce demi-axe, de fait, durant un temps proche de $2\delta/\varepsilon$. Notons, en outre, que l'orbite explose peu de temps après en s'éloignant très rapidement de l'axe. Ce comportement est donc typique du phénomène de "retard à la bifurcation" précédemment expliqué.

La figure 4.2 représente une simulation du système (TC_ε^N) , pour une même valeur de α , au voisinage de O . Pour une même donnée initiale $(x_0, -\delta)$ où x_0 est assez petite,

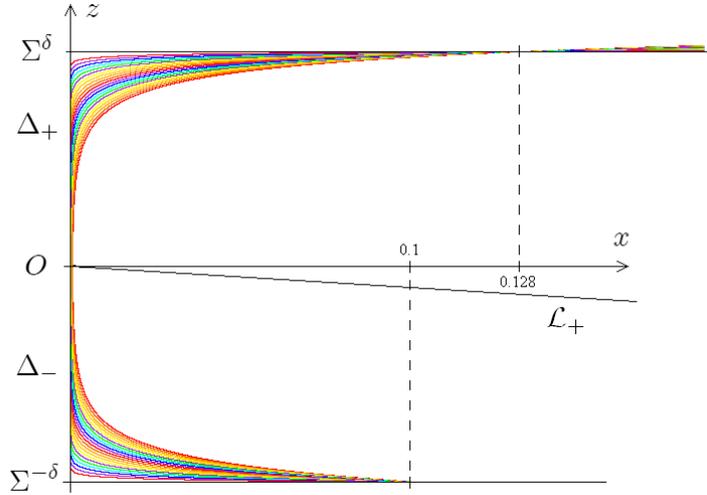


FIG. 4.2 – Orbits de (TC_ε^N) avec $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $x_0 = 0.1$, $\varepsilon = 0.01 + 0.005.k$, $k \in \llbracket 0, 18 \rrbracket$. A chacune de ces valeurs de ε est associée une couleur. Les fonctions de transition σ_ε entre $\Sigma^{-\delta}$ et Σ^δ pour toutes valeurs de ε associée au point $(x_0, -\delta)$ un point proche de $\left(\frac{\alpha\delta x}{\alpha\delta - 2x}, \delta\right)$.

et différentes valeurs de ε , on remarque que l'image par la fonction de transition σ_ε^x dépend peu de ε . Les orbites de (TC_ε^N) pour les différentes valeurs de ε partant de $(x_0, -\delta)$ rejoignent toutes la section Σ^δ au voisinage du même point (x^{out}, δ) . En outre, d'après la proposition 6, pour une même valeur de ε , $\sigma_\varepsilon^x(x, \varepsilon) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (voir fig. 4.3).

Ce développement au premier ordre en ε ne nous permet pas de connaître précisément le comportement d'un système plan dont la dynamique rapide subit une bifurcation transcritique. En effet, il nous est impossible pour l'instant de caractériser la contraction (ou dilatation) subie par les orbites au voisinage de ce point en fonction de ε . En outre, nous ne savons pas dans quelle mesure le développement de cette fonction de transition reste valide sous une perturbation de la forme normale, condition nécessaire pour pouvoir appliquer l'analyse de transition à la recherche d'orbites périodiques de systèmes globaux. Ainsi nous intéressons-nous dans la section suivante à une forme perturbée de (TC_ε^N) sous des hypothèses géométriques générales. Le développement de la fonction de transition de la forme normale nous sera néanmoins indispensable dans la désingularisation du point de bifurcation transcritique.

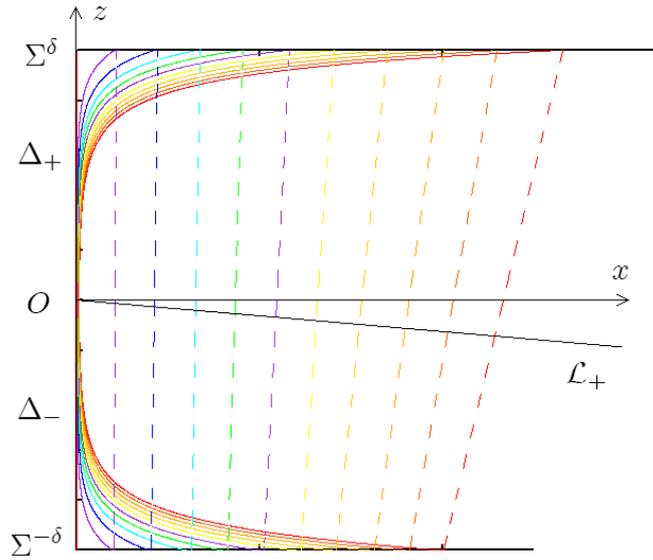


FIG. 4.3 – Orbites de (TC_ε^N) avec $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $x_0 = k/10$, $k \in [0, 18]$. À chacune de ces valeurs de x_0 est associée une couleur. L'image par la fonction de transition de $(x_0, -\delta)$ tend vers $(0, \delta)$ quand x_0 tend vers 0.

4.2 Forme locale perturbée

Afin de généraliser ce résultat et de pouvoir l'appliquer à des systèmes globaux dont la dynamique rapide subit une bifurcation transcritique non dégénérée, nous considérons le système local perturbé suivant :

$$(TC_\varepsilon^{loc}) : \begin{cases} \dot{x} = x^2 + \alpha xz + O(x^3, xz^2, x^2z, x\bar{\varepsilon}) \\ \dot{z} = \bar{\varepsilon}(1 + O(x, z, \bar{\varepsilon})) \\ \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \end{cases}$$

Remarque 4.2 *Nous n'envisageons pas toutes les perturbations locales au voisinage de O . De fait, certaines perturbations appliquées à la forme normale conduisent à des bifurcations plus dégénérées et dont l'étude est plus ardue.*

Récemment, une étude d'une forme canonique plus générale a été faite dans [11] en utilisant l'intégrale de la divergence lente. Il ressort de cette étude l'existence d'une variété canard dépendant d'un paramètre. Cependant, afin de pouvoir appliquer nos résultats dans un contexte global, notre choix se porte naturellement sur une perturbation n'incluant pas de termes uniquement en z afin de pouvoir conserver une bifurcation transcritique en O . Nous pouvons alors appliquer les résultats de cette

analyse locale aux systèmes globaux vérifiant des propriétés géométriques adéquates, en particulier, pour la recherche d'orbites périodiques.

4.2.1 Ensemble critique et variétés invariantes

Au voisinage de 0, pour une valeur fixée de $z \neq 0$, la dynamique rapide admet deux points singuliers : 0 et $x^{\mathcal{L}}(z) = -\alpha z + o(z)$ (d'après le théorème des fonctions implicites). Pour $z < 0$ (resp. $z > 0$), 0 est un noeud attractif (resp. col) et $x^{\mathcal{L}}(z)$ est un col (resp. répulsif). Ainsi, il existe un voisinage compact K de O tel que :

$$\mathcal{C} \cap K = \Delta \cup \mathcal{L}$$

et nous décomposons Δ et \mathcal{L} de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta^- \cup \{0\} \cup \Delta^+, & \mathcal{L} &= \mathcal{L}^- \cup \{0\} \cup \mathcal{L}^+ \\ \Delta^- &= \{(0, z) | z < 0\}, & \Delta^+ &= \{(0, z) | z > 0\} \\ \mathcal{L}^- &= \{(x^{\mathcal{L}}(z), z) | z < 0\}, & \mathcal{L}^+ &= \{(x^{\mathcal{L}}(z), z) | z > 0\} \end{aligned}$$

Les variétés Δ^- et \mathcal{L}^- (resp. Δ^+ et \mathcal{L}^+) sont des variétés invariantes pour (TC_0^{loc}) normalement hyperboliques constituées de points attractifs (resp. répulsifs) de la dynamique rapide. Ainsi, d'après le théorème de Fénichel, en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de O et pour ε assez petit, les variétés Δ^- , Δ^+ , \mathcal{L}^- et \mathcal{L}^+ persistent sous la forme de variétés Δ_ε^- , $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ (attractives), Δ_ε^+ et $\mathcal{L}_\varepsilon^+$ (répulsives) invariantes sous le flot de (TC_ε^{loc}) et normalement hyperboliques.

Nous utilisons une méthode d'éclatement à paramètre afin de développer la fonction de transition entre deux sections du flot encadrant O , point singulier non hyperbolique de la dynamique rapide :

$$\begin{aligned} \Sigma^{-\delta} &= \{(x, -\delta, \bar{\varepsilon}) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq \kappa, 0 < \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_0\} \\ \Sigma^\delta &= \{(x, \delta, \bar{\varepsilon}) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, 0 < \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_0\} \end{aligned}$$

où $\delta > 0$ est petit et κ, ε_0 également petits seront précisés ultérieurement.

4.2.2 Eclatement à paramètre

Dans le système (TC_ε^{loc}) , le développement de la dynamique en x débute avec un terme quadratique : il est donc approprié, dans les nouvelles coordonnées, de l'éclater à l'ordre 1. On choisit en conséquence l'ordre d'éclatement de la variable lente z et du paramètre ε . Nous utilisons la fonction d'éclatement suivante :

$$\begin{aligned} \Phi : & S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ & ((\xi, \zeta, \varepsilon), r) \rightarrow (r\xi, r\zeta, r^2\varepsilon) = (x, z, \bar{\varepsilon}) \end{aligned}$$

et nous étudions le champ dans des cartes locales (voir fig. 4.4).

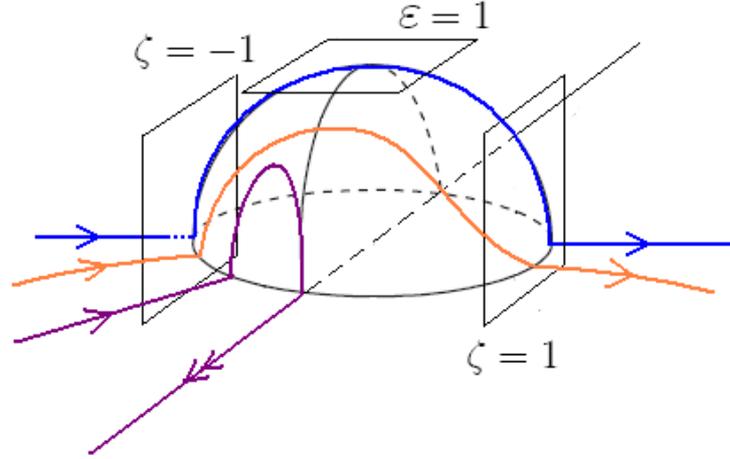


FIG. 4.4 – Eclatement du point de bifurcation transcritique de la dynamique rapide.

Carte K_1

Nous nous intéressons en premier lieu à l'éclatement directionnel dans la carte d'entrée $\zeta = -1$:

$$\Phi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, r_1, \varepsilon_1) \rightarrow (r_1\xi_1, -r_1, r_1^2\varepsilon_1) \end{cases}$$

Le champ éclaté s'obtient donc par les changements de variables suivants :

$$x = r_1\xi_1, \quad z = -r_1, \quad \bar{\varepsilon} = r_1^2\varepsilon_1$$

qui transforme (TC_ε^{loc}) en :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = r_1\varepsilon_1\xi_1 [1 + \varphi_1(\xi_1, r_1, \varepsilon_1)] + r_1\xi_1^2 - \alpha r_1\xi_1 + r_1\mu(\xi_1, \varepsilon_1, -r_1) \\ \dot{r}_1 = -r_1^2\varepsilon_1 [1 + \varphi_1(\xi_1, r_1, \varepsilon_1)] \\ \dot{\varepsilon}_1 = 2r_1\varepsilon_1^2 [1 + \varphi_1(\xi_1, r_1, \varepsilon_1)] \end{cases} \quad (4.12)$$

où $\varphi_1(\xi_1, r_1, \varepsilon_1) = O(r_1)$ et $\mu_1(\xi_1, \varepsilon_1, -r_1) = O(r_1)$. Ainsi, une division locale par $r_1 [1 + \varphi_1(\xi_1, r_1, \varepsilon_1)]$ mène au système :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \varepsilon_1\xi_1 + \xi_1^2 - \alpha\xi_1 + O(r_1) \\ \dot{r}_1 = -r_1\varepsilon_1 \\ \dot{\varepsilon}_1 = 2\varepsilon_1^2 \end{cases} \quad (4.13)$$

pour lequel le point $(0, 0, 0)$ est singulier. Les deux hyperplans $\{\varepsilon_1 = 0\}$ et $\{r_1 = 0\}$ sont invariants par le flot.

Dans le premier, le sous-système de (4.13) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1(\xi_1 - \alpha) + O(r_1) \\ \dot{r}_1 = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Au point singulier $(0, 0)$, la jacobienne associée au système admet 0 et $-\alpha$ pour valeurs propres. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une courbe Δ_1 incluse dans $\{\varepsilon_1 = 0\}$ partant de l'origine, invariante sous le flot de (4.13), normalement hyperbolique et formée de points d'équilibre du système pour lesquels la valeur propre non nulle est $-\alpha + O(r_1)$. On obtient de même une courbe normalement hyperbolique \mathcal{L}_1 contenant $(\alpha, 0)$ formée de points d'équilibre pour lesquels la valeur propre non nulle est, cette fois-ci, $\alpha + O(r_1)$. Remarquons que les courbes Δ_1 et \mathcal{L}_1 sont précisément les variétés Δ^- et \mathcal{L}^+ associées au système (TC_ε^{loc}) .

Dans $\{r_1 = 0\}$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \varepsilon_1 \xi_1 + \xi_1^2 - \alpha \xi_1 \\ \dot{\varepsilon}_1 = 2\varepsilon_1^2 \end{cases} \quad (4.15)$$

dont les points singuliers sont $(0, 0)$ et $(0, \alpha)$. La variété centrale associée à $(0, 0)$ est précisément la demi-droite $\{(0, 0, \varepsilon_1) \mid \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+\}$ et est invariante sous le flot de (4.13).

Enfin, un vecteur propre associé à la valeur propre nulle au point singulier $(0, 0, 0)$ de (4.13) est $(\xi_1, \varepsilon_1, r_1) = (1, 0, 0)$. Ainsi, la théorie des variétés invariantes montre directement la proposition suivante :

Proposition 7 *Il existe une variété centrale attractive \mathcal{V}_1 de dimension 2 associée au point singulier $(0, 0, 0)$ de (4.13) contenant la demi-droite $\{(0, 0, \varepsilon_1) \mid \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+\}$ et la courbe Δ_1 . Pour δ et σ assez petits, dans le voisinage :*

$$\mathcal{N}_1 = \{(\xi_1, r_1, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r_1 \leq \delta, 0 \leq \varepsilon_1 \leq \sigma\}$$

la variété \mathcal{V}_1 est donnée par un graphe :

$$\mathcal{V}_1 : \xi_1 = h_1(r_1, \varepsilon_1) = O(r_1) + O(\varepsilon_1^2)$$

De plus, il existe un feuilletage invariant stable de base \mathcal{V}_1 et de fibre de dimension 1 tel que, pour tout $k < \alpha$, il existe des constantes δ et σ telles que la contraction le long du feuilletage restreint à \mathcal{N}_1 soit plus forte que $\exp(-kt)$.

Nous utilisons alors cet argument géométrique pour étudier le flot de (4.13) au voisinage de 0 et nous développons le temps de transition entre les sections :

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{in} &= \{(\xi_1, \delta, \varepsilon_1) \mid \xi_1 \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon_1 \leq \sigma\} \\ \Sigma_1^{out} &= \{(\xi_1, r_1, \sigma) \mid \xi_1 \in \mathbb{R}, 0 < r_1 \leq \delta\} \end{aligned}$$

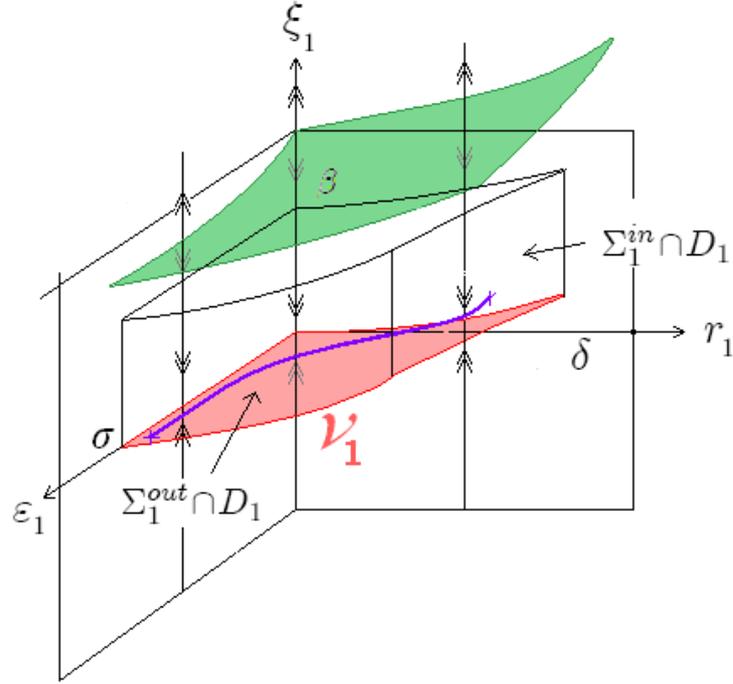


FIG. 4.5 – Variété centrale attractive \mathcal{V}_1 (en orange). En vert, la variété centrale répulsive associée au point singulier $(\alpha, 0, 0)$.

Proposition 8 *Soit :*

$$D_1 = \{(\xi_1, r_1, \varepsilon_1) \in \mathcal{N}_1 \mid h_1(r_1, \varepsilon_1) \leq \xi_1 \leq h_1(r_1, \varepsilon_1) + \beta_1, 0 \leq r_1 \leq \delta, 0 \leq \varepsilon_1 \leq \sigma\}$$

Pour tout $0 < \beta_1 < \alpha$, il existe des constantes δ et σ assez petites telles que la fonction de transition $\Pi_1 : \Sigma_1^{in} \cap D_1 \rightarrow \Sigma_1^{out} \cap D_1$ est bien définie par le système (4.13). Elle admet le développement suivant :

$$\Pi_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \delta \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(\delta\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\sigma}}, \sigma) + \Psi_1(\xi_1, \varepsilon_1) \\ \delta\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\sigma}} \\ \sigma \end{pmatrix}$$

où :

$$h_1\left(\delta\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\sigma}}, \sigma\right) = O\left(\delta\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\sigma}}\right) + O(\sigma^2)$$

et $\Psi_1(\xi_1, \varepsilon_1)$ est exponentiellement petite selon ε_1 , soit il existe $k^{tc} > 0$ tel que :

$$\Psi_1(\xi_1, \varepsilon_1) \underset{\varepsilon_1 \rightarrow 0}{=} (\xi_1 - h_1(\delta, \varepsilon_1)) O\left(\exp\left(-\frac{k^{tc}}{\varepsilon_1}\right)\right) \quad (4.16)$$

Démonstration. Soit $0 < \beta_1 < \alpha$. La variété centrale \mathcal{V}_1 étant attractive et :

$$h_1(r_1, \varepsilon_1) = O(r_1) + O(\varepsilon_1^2)$$

il existe une constante δ assez petite telles que $\Sigma_1^{in} \cap D_1$ soit inclus dans le bassin d'attraction de \mathcal{V}_1 . Ainsi, les orbites de (4.13) ayant pour condition initiale un point de $\Sigma_1^{in} \cap D_1$ restent dans D_1 pour les temps positifs. En particulier :

$$\mathcal{V}_1 \cap \Sigma_1^{out} \subset D_1$$

Les orbites de (4.13) ayant pour condition initiale un point de $\Sigma_1^{in} \cap D_1$ passent donc par Σ^{out} en un point de D_1 . La fonction de transition est donc bien définie.

D'autre part, on peut intégrer la dynamique sur ε_1 et r_1 du système (4.13). Pour une condition initiale $(\xi_1(0), r_1(0), \varepsilon_1(0)) = (\xi_1^{init}, \delta, \varepsilon_1^{init}) \in \Sigma_1^{in} \cap D_1$, la paramétrisation de l'orbite est :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= \frac{\varepsilon_1^{init}}{1 - 2\varepsilon_1^{init}t} \\ r_1(t) &= \delta (1 - 2\varepsilon_1^{init}t)^{1/2} \end{aligned}$$

Ainsi, le temps de transition de l'orbite du système (4.13) passant par $(\delta, \varepsilon_1^{init})$ entre Σ_1^{in} et Σ_1^{out} est :

$$T_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1^{init}} - \frac{1}{\sigma} \right)$$

Et on trouve :

$$r_1(T_1) = \delta \left(\frac{\varepsilon_1^{init}}{\sigma} \right)^{1/2}$$

L'expression recherchée pour la composante selon ξ_1 se déduit alors directement de l'attractivité de \mathcal{V}_1 d'après le théorème de Fénichel. ■

Remarque 4.3 Nous pouvons définir la constante k^{lc} optimale d'après la valeur propre non nulle α associée à (4.13) à l'origine et la perturbation μ .

Nous obtenons grâce à ce résultat un développement de la fonction de transition bien définie entre $\Sigma_1^{in} \cap D_1$, section d'entrée du flot dans $S^2 \times \mathbb{R}$ et image par Φ_1^{-1} de $\Sigma^{-\delta} = \{(x, -\delta, \bar{\varepsilon}) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq \kappa, 0 < \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_0\}$, κ et ε_0 étant assez petits, et $\Sigma_1^{out} \cap D_1$. Dans la suite, nous analysons le flot dans la carte centrée en $\varepsilon = 1$.

Carte K_2

L'éclatement directionnel dans la carte K_2 , définie par $\varepsilon = 1$, s'écrit :

$$x = r_2 \xi_2, \quad z = r_2 \zeta_2, \quad \bar{\varepsilon} = r_2^2 \quad (4.17)$$

En l'appliquant à (TC_ε^{loc}) , on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_2 = r_2 \xi_2^2 + \alpha r_2 \xi_2 \zeta_2 + \xi_2 O(r_2^2) \\ \dot{\zeta}_2 = r_2 (1 + \varphi_2(\xi_2, \zeta_2, r_2)) \\ \dot{r}_2 = 0 \end{cases}$$

où $\varphi_2(\xi_2, \zeta_2, r_2) = O(r_2)$. Ainsi, après une division locale par $r_2 (1 + \varphi_2(\xi_2, \zeta_2, r_2))$, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_2 = \xi_2^2 + \alpha \xi_2 \zeta_2 + \xi_2 O(r_2) \\ \dot{\zeta}_2 = 1 \\ \dot{r}_2 = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Remarque 4.4 *Le choix du type de perturbations que nous envisageons, nous permet de garder, dans la carte K_2 , un terme en ξ_2 devant la perturbation en $O(r_2)$. Ce terme est absolument indispensable afin de maîtriser la perturbation de l'application de transition (cf Remarque 4.2).*

Le système non perturbé défini pour $r_2 = 0$ est donc :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_2 = \xi_2^2 + \alpha \xi_2 \zeta_2 \\ \dot{\zeta}_2 = 1 \end{cases} \quad (4.19)$$

Remarquons, dès à présent, que le système (4.18) n'admet aucun point singulier. Nous pouvons donc appliquer la théorie des perturbations régulières à (4.19) pour en déduire la fonction de transition du système (4.18) entre deux sections transverses à l'axe de la variable ζ_2 . Afin de pouvoir recoller les fonctions de transition entre cartes, nous calculons les fonctions de changement de cartes entre K_1 et K_2 .

Lemme 6 *Les changements de coordonnées entre les cartes K_1 et K_2 sont donnés par :*

$$K_{21}(\xi_1, r_1, \varepsilon_1) \rightarrow \left(\frac{\xi_1}{\varepsilon_1^{1/2}}, -\frac{1}{\varepsilon_1^{1/2}}, r_1 \varepsilon_1^{1/2} \right), \quad \varepsilon_1 > 0 \quad (4.20)$$

$$K_{12}(\xi_2, \zeta_2, r_2) \rightarrow \left(-\frac{\xi_2}{\zeta_2}, -r_2 \zeta_2, \frac{1}{\zeta_2} \right), \quad \zeta_2 < 0 \quad (4.21)$$

Nous choisissons pour sections :

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{in} &= \left\{ \left(\xi_2, -\sigma^{-1/2}, r_2 \right) \mid (\xi_2, r_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ \Sigma_2^{out} &= \left\{ \left(\xi_2, \sigma^{-1/2}, r_2 \right) \mid (\xi_2, r_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

Remarquons qu'elles s'éloignent de l'origine et sont repoussées à l'infini quand σ tend vers 0 par valeurs positives. Afin de pouvoir recoller la fonction de transition Π_1 avec celle dans la carte K_2 et utiliser le développement (4.11) de la section précédente, nous donnons le lemme suivant :

Lemme 7 *L'image par K_{21} de $\mathcal{V}_1 \cap \{\varepsilon_1 > 0\}$ est donnée par un graphe :*

$$\xi_2 = h_2(\zeta_2, r_2), \quad \zeta_2 \leq -\frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \quad 0 \leq r_2 \leq \delta\sqrt{\sigma}$$

avec :

$$h_2(\zeta_2, r_2) = O\left(r_2\zeta_2^2, \frac{1}{\zeta_2^3}\right)$$

L'image (ξ_2, ζ_2, r_2) d'un point de $\Sigma_1^{out} \cap D_1$ au-dessus de \mathcal{V}_1 vérifie :

$$h_2(\zeta_2, r_2) < \xi_2 < h_2(\zeta_2, r_2) + \beta_2$$

où $\beta_2 > 0$ peut-être choisi aussi petit qu'on veut en prenant $\beta_1 > 0$ assez petit.

Démonstration. Dans le voisinage de \mathcal{N}_1 de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}_+^2 , la variété \mathcal{V}_1 est donnée par le graphe :

$$\mathcal{V}_1 : \xi_1 = h_1(r_1, \varepsilon_1) = O(r_1) + O(\varepsilon_1^2)$$

pour :

$$0 \leq r_1 \leq \delta, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \sigma$$

D'après les fonctions de changements de cartes du lemme précédent, l'image (ξ_2, ζ_2, r_2) par K_{21} d'un tel point vérifie :

$$\begin{aligned} -\frac{\xi_2}{\zeta_2} &> h_1\left(-r_2\zeta_2, \frac{1}{\zeta_2^2}\right) \\ \text{avec } 0 < \frac{1}{\zeta_2^2} &\leq \sigma, \quad 0 \leq -r_2\zeta_2 \leq \delta \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \xi_2 &\geq -\zeta_2 h_1\left(-r_2\zeta_2, \frac{1}{\zeta_2^2}\right) = h_2(\zeta_2, r_2) = O\left(r_2\zeta_2^2, \frac{1}{\zeta_2^3}\right), \\ \text{avec } \zeta_2 &\leq -\frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \quad 0 \leq r_2 \leq \delta\sqrt{\sigma} \end{aligned}$$

L'existence de β_2 provient de la proposition 8. ■

La variété $\xi_2 = 0$ est invariante sous le flot de (4.18). Ainsi, l'image de $K_{21} \circ \Pi_1$ est incluse dans :

$$\left\{ \left(\xi_2, -\sigma^{1/2}, r_2 \right) \in \mathbb{R}^3 \mid h_2(\zeta_2, r_2) \leq \xi_2 \leq h_2(\zeta_2, r_2) + \beta_2 \right\}$$

et pour $\delta \rightarrow 0$, le compact $K_{21}(\mathcal{V}_1 \cap \Sigma_1^{out})$ tend vers le singleton constitué de l'origine $(\xi_2, \zeta_2, r_2) = (0, 0, 0)$ de la carte K_2 . Nous avons alors :

Proposition 9 *Posons :*

$$D_2 = \left\{ (\xi_2, \zeta_2, r_2) \in \mathbb{R}^3 \mid h_2(\zeta_2, r_2) \leq \xi_2 \leq h_2(\zeta_2, r_2) + \beta_2, 0 \leq r_2 \leq \delta\sigma^{1/2} \right\}$$

Alors, il existe σ, δ, β_2 des constantes strictement positives assez petites telles que :

(1) $K_{21}(\Sigma_1^{out} \cap D_1) \subset \Sigma_2^{in} \cap D_2$

(2) le flot du système (4.18) induit une fonction de transition bien définie de $\Sigma_2^{in} \cap D_2$ sur Σ_2^{out} :

$$\Pi_2 \begin{pmatrix} \xi_2 \\ -\sigma^{1/2} \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2^{out}(\xi_2, \sigma, r_2) \\ \sigma^{-1/2} \\ r_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_2^{out}(\xi_2, \sigma, r_2) &= h_2(\sigma^{-1/2}, r_2) + (\xi_2 - h_2(-\sigma^{1/2}, r_2))O(r_2) \\ h_2(\sigma^{-1/2}, r_2) &= \xi_2 \left[\left(1 + 2\frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha}\xi_2 \right) + \xi_2^2 O(\sigma) \right] \end{aligned}$$

Démonstration. La première assertion provient directement du lemme 6 de changement de cartes, en utilisant (4.20), et du lemme 7.

Pour (2), nous nous intéressons à l'orbite $\gamma_2((\xi_2^{init}, -\sigma^{-1/2}), t)$ du système non perturbé (4.19) passant à $t = 0$ par le point $(\xi_2^{init}, -\sigma^{-1/2})$. Les changements de variables :

$$\xi_2 = \frac{\delta\sqrt{\sigma}}{\varepsilon}x, \quad \zeta_2 = \frac{1}{\delta\sqrt{\sigma}}z, \quad t = \frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{\sigma}}\tau$$

conjuguent le système à :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{d\tau} = x(x + \alpha'z) \\ z' = \frac{dz}{d\tau} = \varepsilon \end{cases}$$

où :

$$\alpha' = \frac{\varepsilon}{\delta^2\sigma}\alpha$$

Nous pouvons donc utiliser l'analyse sur la forme normale (TC_ε^N) de la section précédente. En effet, par ces changements de variables, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= \sigma^{-1/2} \iff z = \delta \\ t &= \frac{2}{\sqrt{\delta}} \iff \tau = \frac{2\delta}{\varepsilon} \end{aligned}$$

La paramétrisation de γ_2 dans le nouveau système de coordonnées s'écrit alors :

$$\gamma_2((\xi_2^{init}, -\sigma^{-1/2}), t) = \frac{\xi_2^{init}}{1 + \xi_2^{init} \cdot \tilde{k} \left(\frac{2}{\sqrt{\delta}} \right)}$$

avec :

$$\tilde{k}\left(\frac{2}{\sqrt{\delta}}\right) = - \int_0^{2/\sqrt{\delta}} \exp\left[\alpha\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)\right] .dt$$

En posant $\varepsilon = \sigma\sqrt{\sigma}$, qui tend vers 0 quand σ tend vers 0, on obtient $\xi = \frac{\delta}{\sigma}x$ et, d'après (4.11), la fonction de transition entre $z = -\delta$ et $z = \delta$ est bien définie pour tout $0 \leq x^{init} < \kappa' < \frac{\delta}{2}\alpha'$. Ainsi :

$$\sigma_\varepsilon^x(x, \delta) = \frac{\alpha'\delta x^{init}}{\alpha'\delta - 2x^{init}} (1 + x^{init}O(\varepsilon))$$

Comme :

$$\alpha' = \frac{\sigma\sqrt{\sigma}}{\delta^2\sigma}\alpha = \frac{\sqrt{\sigma}}{\delta^2}\alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\delta}\xi_2^{out}(\xi_2, \sigma, 0) &= \frac{\frac{\sqrt{\sigma}}{\delta^2}\alpha\delta\frac{\sigma}{\delta}\xi^{init}}{\frac{\sqrt{\sigma}}{\delta^2}\alpha\delta - 2\frac{\sigma}{\delta}\xi^{init}} \left(1 + \frac{\frac{\sqrt{\sigma}}{\delta^2}\alpha\delta\frac{\sigma}{\delta}\xi^{init}}{\frac{\sqrt{\sigma}}{\delta^2}\alpha\delta - 2\frac{\sigma}{\delta}\xi^{init}}O(\sigma\sqrt{\sigma})\right) \\ &= \frac{\sqrt{\sigma}}{\delta}\alpha\frac{\sigma}{\delta}\xi^{init} \frac{1}{\frac{\sqrt{\sigma}}{\delta}\alpha} \frac{1}{1 - 2\frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha}\xi^{init}} \left(1 + \frac{\frac{\sqrt{\sigma}}{\delta^2}\alpha\delta\frac{\sigma}{\delta}\xi^{init}}{\frac{\sqrt{\sigma}}{\delta^2}\alpha\delta - 2\frac{\sigma}{\delta}\xi^{init}}O(\sigma\sqrt{\sigma})\right) \\ &= \frac{\sigma}{\delta}\xi^{init} \left(1 + 2\frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha}\xi^{init} + 4\frac{\sigma}{\alpha^2}(\xi^{init})^2 + O(\sigma\sqrt{\sigma})\right) \left(1 + \frac{\sigma}{\delta}\xi^{init}O(\sigma\sqrt{\sigma})\right) \end{aligned}$$

On a :

$$\xi_2^{out}(\xi_2, \sigma, 0) = \xi^{init} + 2(\xi^{init})^2\frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha} + 4(\xi^{init})^3\frac{\sigma}{\alpha^2} + \xi^{init}O(\sigma\sqrt{\sigma})$$

Enfin, puisque :

$$h_2(\zeta_2, 0) = O\left(\frac{1}{\zeta_2^3}\right)$$

on a :

$$h_2(-\sigma^{-1/2}, 0) = O(\sigma^{3/2})$$

En outre, il existe $\sigma > 0$ assez petit tel que ce développement soit vrai pour tout :

$$0 \leq \xi^{init} \leq h_2(-\sigma^{-1/2}, 0) + \beta_2 < \frac{\alpha}{2\sqrt{\sigma}}$$

Par perturbation régulière du système (4.19), nous déduisons le développement de la composante sur ξ_2^{out} de la fonction de transition du système (4.18) bien définie entre $\Sigma_2^{in} \cap D_2$ et Σ_2^{out} :

$$\xi_2^{out}(\xi_2, \sigma, r_2) = \xi_2 \left[\left(1 + 2\frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha}\xi_2\right) + \xi_2^2 O(\sigma) \right] + (\xi_2 - h_2(-\sigma^{1/2}, r_2))O(r_2)$$

■

Remarque 4.5 *On retrouve ici la propriété décrite dans la remarque de la section précédente. Les conclusions en sont les mêmes : il suffit de choisir ξ_2 assez petit pour que le développement ait un sens dans un voisinage de l'origine.*

Remarque 4.6 *Nous avons développé la fonction de transition jusqu'aux termes en $\sqrt{\sigma}$ car l'étude de la bifurcation transcritique dynamique nous permettait de le faire. Si pour l'application que nous ferons de ce résultat concernant la dilatation des orbites au passage près de l'origine, les termes d'ordre 1 en ξ_2 nous suffisent, pour pouvoir définir correctement la fonction de transition dans la carte K_3 nous devons limiter l'image de Π_2 à un domaine assez petit. Il nous suffit de remarquer que la composante en ξ_2 de cette fonction de transition contient une partie en $O(\xi_2)$ indépendant de r_2 .*

Carte K_3

Dans la carte K_3 , centrée en $\zeta = 1$, l'éclatement directionnel Φ_3 s'obtient grâce aux changements de variables :

$$x = r_3 \xi_3, \quad z = r_3, \quad \bar{\varepsilon} = r_3^2 \varepsilon_3$$

Nous obtenons alors le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_3 = -r_3 \varepsilon_3 \xi_3 [1 + g_3(\xi_3, r_3, \varepsilon_3)] + r_3 \xi_3^2 + \alpha r_3 \xi_3 + r_3 \mu(\xi_3, \varepsilon_3, r_3) \\ \dot{r}_3 = r_3^2 \varepsilon_3 [1 + g_3(\xi_3, r_3, \varepsilon_3)] \\ \dot{\varepsilon}_3 = -2r_3 \varepsilon_3^2 [1 + g_3(\xi_3, r_3, \varepsilon_3)] \end{cases} \quad (4.22)$$

où $\varphi_3(\xi_3, r_3, \varepsilon_3) = O(r_3)$ et $\mu(\xi_3, \varepsilon_3, r_3) = O(r_3)$. Ainsi, en opérant une division locale par $r_3 [1 + \varphi_3(\xi_3, r_3, \varepsilon_3)]$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_3 = \varepsilon_3 \xi_3 + \xi_3^2 + \alpha \xi_3 + O(r_3) \\ \dot{r}_3 = r_3 \varepsilon_3 \\ \dot{\varepsilon}_3 = -2\varepsilon_3^2 \end{cases} \quad (4.23)$$

L'analyse qui suit est semblable à celle dans la carte K_1 .

Les hyperplans $\{\varepsilon_3 = 0\}$ et $\{r_3 = 0\}$ sont invariants sous le flot du système (4.23). Dans le premier, le sous-système de (4.23) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_3 = \xi_3(\xi_3 + \alpha) + O(r_3) \\ \dot{r}_3 = 0 \end{cases}$$

Au point singulier $(0, 0)$, la jacobienne associée au système admet 0 et α pour valeurs propres. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une courbe normalement hyperbolique Δ_3 passant par $(0, 0)$ et formée de points singuliers instables du système pour lesquels la valeur propre non nulle est proche de α . Notons en outre qu'on obtient également une courbe normalement hyperbolique \mathcal{L}_3 passant par $(0, -\alpha)$ formée de points d'équilibre pour lesquels la valeur propre non nulle est, cette fois-ci, proche de $-\alpha$. Remarquons que les courbes Δ_3 et \mathcal{L}_3 sont précisément les variétés Δ^+ et \mathcal{L}^- associées au système (TC_ε^{loc}) .

Dans $\{r_3 = 0\}$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_3 = \varepsilon_3 \xi_3 + \xi_3^2 + \alpha \xi_3 \\ \dot{\varepsilon}_3 = 2\varepsilon_3^2 \end{cases}$$

dont les points singuliers sont $(0, 0)$ et $(0, -\alpha)$. La variété centrale associée à $(0, 0)$ est la demi-droite $\{(0, 0, \varepsilon_3) | \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_+\}$ invariante sous le flot de (4.23).

Enfin, un vecteur propre associé à la valeur propre nulle en $(0, 0, 0)$ est $(\xi_3, \varepsilon_3, r_3) = (1, 0, 0)$. Ainsi, la théorie des variétés invariantes montre la proposition suivante :

Proposition 10 *Il existe une variété centrale répulsive \mathcal{V}_3 de dimension 2 associée au point singulier $(0, 0, 0)$ de (4.23) contenant la demi droite $\{(0, 0, \varepsilon_3) | \varepsilon_3 \in \mathbb{R}_+\}$ et la courbe Δ_3 . Pour δ et σ assez petits, dans le voisinage :*

$$\mathcal{N}_3 = \{(\xi_3, r_3, \varepsilon_3) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq r_3 \leq \delta, 0 \leq \varepsilon_3 \leq \sigma\}$$

la variété \mathcal{V}_3 est donnée par un graphe :

$$\mathcal{V}_3 : \xi_3 = h_3(r_3, \varepsilon_3) = O(r_3) + O(\varepsilon_3^2)$$

Il existe un feuilletage invariant instable de base \mathcal{V}_3 et de fibre de dimension 1 tel que, pour tout $k > \alpha$, il existe des constantes δ et σ telles que la dilatation le long du feuilletage soit moins forte que $\exp(kt)$.

Par un calcul direct, on obtient :

Lemme 8 *Les changements de coordonnées entre les cartes K_2 et K_3 sont donnés par :*

$$\begin{aligned} K_{32}(\xi_2, \zeta_2, r_2) &\rightarrow \left(\frac{\xi_2}{\zeta_2}, r_2 \zeta_2, \frac{1}{\zeta_2^2} \right), & \zeta_2 > 0 \\ K_{23}(\xi_3, r_3, \varepsilon_3) &\rightarrow \left(\frac{\xi_3}{\varepsilon_3^{1/2}}, \frac{1}{\varepsilon_3^{1/2}}, r_3 \varepsilon_3^{1/2} \right), & \varepsilon_3 > 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Par suite, nous étudions le flot de (4.23) au voisinage de $(0, 0, 0)$ et nous développons le temps de transition entre les sections :

$$\begin{aligned} \Sigma_3^{in} &= \{(\xi_3, r_3, \sigma) | (\xi_3, r_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\} \\ \Sigma_3^{out} &= \{(\xi_3, \delta, \varepsilon_3) | (\xi_3, \varepsilon_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\} \end{aligned}$$

Cependant, nous prêtons une grande attention à pouvoir définir un domaine D_3 tel que $\Sigma_3^{in} \cap D_3$ contienne l'image de $\Pi_2 \circ K_{21} \circ \Pi_1$.

Proposition 11 *Posons :*

$$D_3 = \{(\xi_3, r_3, \varepsilon_3) \in \mathcal{N}_3 \mid h_3(r_3, \varepsilon_3) \leq \xi_3 \leq h_3(r_3, \varepsilon_3) + \beta_3, 0 \leq r_3 \leq \delta, 0 \leq \varepsilon_3 \leq \sigma\}$$

Pour tout $\beta_3 > 0$, il existe des constantes δ et σ assez petites telles que :

(1) on ait :

$$\mathcal{V}_3 \cap \Sigma_3^{in} \subset D_3$$

et :

$$K_{32}(\Sigma_2^{out} \cap D_2) \subset \Sigma_3^{in} \cap D_3$$

(2) la fonction de transition $\Pi_3 : \Sigma_3^{in} \cap D_3 \rightarrow \Sigma_3^{out}$ soit bien définie par le système (4.22). Elle admet alors le développement suivant :

$$\Pi_3 \begin{pmatrix} \xi_3 \\ r_3 \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_3 \left(\delta, \sigma \left(\frac{r_3}{\delta} \right)^2 \right) + \Psi_3(\xi_3, r_3) \\ \delta \\ \sigma \left(\frac{r_3}{\delta} \right)^2 \end{pmatrix}$$

où :

$$h_3 \left(\delta, \sigma \left(\frac{r_3}{\delta} \right)^2 \right) = O(\delta) + O \left(\sigma^2 \left(\frac{r_3}{\delta} \right)^4 \right)$$

et :

$$\Psi_3(\xi_3, r_3) \underset{r_3 \rightarrow 0}{=} O((\xi_3 - h_3(r_3, \sigma))) O \left(\exp \left(\frac{k^{tc}}{r_3} \right) \right)$$

Démonstration. Soit $0 < \beta_3 < \alpha$. D'une part :

$$h_3(r_3, \varepsilon_3) = O(r_3) + O(\varepsilon_3^2)$$

et d'autre part :

$$\xi_2^{out}(\xi_2, \sigma, r_2) = \xi_2 \left[\left(1 + 2 \frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha} \xi_2 \right) + \xi_2 O(\sigma) + O(r_2) \right]$$

Nous pouvons choisir les constantes δ et σ assez petites telles que :

$$\forall r_3 \in [0, \delta], \forall \varepsilon_3 \in [0, \sigma], |h_3(r_3, \varepsilon_3)| < \beta_3$$

et :

$$\forall r_2 \in [0, \delta], \forall \xi_2 \in [h_2(\zeta_2, r_2), \beta_2], |\xi_2^{out}(\xi_2, \sigma, r_2)| \leq \beta_3 \sigma^{-1/2}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_3 \cap \Sigma_3^{in} &\subset D_3 \\ K_{32}(\Sigma_2^{out} \cap D_2) &\subset \Sigma_3^{in} \cap D_3 \end{aligned}$$

Intégrons à présent la dynamique sur ε_3 et r_3 du système (4.23). Pour une condition initiale $(r_3(0), \varepsilon_3(0)) = (r_3^{init}, \sigma) \in \Sigma_3^{in} \cap D_3$, la paramétrisation de l'orbite est :

$$\begin{aligned}\varepsilon_3(t) &= \frac{\sigma}{1 + 2\sigma t} \\ r_3(t) &= r_3^{init} (1 + 2\sigma t)^{1/2}\end{aligned}$$

Ainsi, le temps de transition de cette orbite entre $\Sigma_3^{in} \cap D_3$ et Σ_3^{out} est :

$$T_3 = \frac{1}{2\sigma} \left[\left(\frac{\delta}{r_3^{init}} \right)^2 - 1 \right]$$

Et on trouve :

$$\varepsilon_3(T_3) = \sigma \left(\frac{r_3^{init}}{\delta} \right)^2$$

L'expression recherchée pour la composante selon ξ_3 se déduit de la proposition précédente en remarquant que (4.12) et (4.22) sont les mêmes en inversant le temps.

■

Le développement de la fonction de transition est bien définie entre $\Sigma_3^{in} \cap D_3$ et Σ_3^{out} , carte de sortie du flot dans $S^2 \times \mathbb{R}$ et image réciproque par Φ_3 de Σ^δ . Nous sommes alors en mesure, en composant les fonctions de transition dans les cartes et les fonctions de changements de cartes, de donner un développement de la fonction de transition du système local : ceci est l'objet de la section suivante. Il est important de remarquer, d'ores et déjà, que les exposants de contraction (resp. dilation) des fonctions Ψ_1 et Ψ_3 sont opposés l'un de l'autre. En effet, dans la composition des applications de transition, les deux expansions des orbites par Π_1 et Π_3 se compensent. Notons, en outre, que nous utiliserons les analyses dans les différentes cartes du système plan dans les chapitres suivants, en ajoutant une dynamique lente ou une dynamique rapide.

4.3 Analyse de transition

Nous utilisons à présent la décomposition de l'application de transition du champ éclaté afin de donner un développement de celle du système (TC_ε^{loc}) .

4.3.1 Développement asymptotique de la fonction de transition

Théorème 4.1 *Il existe $\delta > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\kappa > 0$ tel que pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, la fonction de transition $\Pi : \Sigma^{-\delta} \mapsto \Sigma^\delta$ induite par le flot de (TC_ε^{loc}) soit bien définie. Elle admet alors le développement suivant :*

$$\Pi : \begin{pmatrix} x \\ -\delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^{out}(x, \delta, \varepsilon) \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

où :

$$x^{out}(x, \delta, \varepsilon) = \lambda(x) + xO(\varepsilon)$$

avec $\lambda(x)$ indépendante de ε et $\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$

Démonstration. D'après les études dans les cartes K_1 , K_2 et K_3 de la section précédente, nous savons que l'application de transition induite par le champ éclaté est bien définie de $\Sigma_1^{in} \cap D_1$ dans Σ_3^{out} en choisissant des constantes β_1 , δ et σ strictement positives assez petites.

L'image par Φ_1 de $\Sigma_1^{in} \cap D_1$ est :

$$\Sigma^{-\delta} = \{(x, -\delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < \kappa\}$$

On développe la fonction de transition $\Pi : \Sigma^{-\delta} \rightarrow \Sigma^\delta$ pour le flot induit par (TC_ε^{loc}) en utilisant la transition induite par le champ éclaté :

$$\Pi = \Phi_3^{-1} \circ \Pi_3 \circ K_{32} \circ \Pi_2 \circ K_{21} \circ \Pi_1 \circ \Phi_1$$

Ainsi, pour κ et ε assez petites, nous pouvons composer les développements :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x \\ -\delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi_1} \begin{pmatrix} \frac{x}{\delta} \\ \delta \\ \frac{\varepsilon}{\delta^2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi_1} \begin{pmatrix} h_1(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}, \sigma) + \Psi_1\left(\frac{x}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}} \\ \sigma \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{K_{21}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left[h_1(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}, \sigma) + \Psi_1\left(\frac{x}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) \right] \\ -\sigma^{-1/2} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\Pi_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \left[\left(h_1(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}, \sigma) + \Psi_1\left(\frac{x}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \right) (1 + O(\sigma)) \right] \\ \sigma^{-1/2} \\ \sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{K_{32}} \begin{pmatrix} \left(h_1(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}, \sigma) + \Psi_1\left(\frac{x}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \right) (1 + O(\sigma)) \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}} \\ \sigma \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\Pi_3} \begin{pmatrix} h_3\left(\delta, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) + \Psi_3\left(\left(h_1(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}, \sigma) + \Psi_1\left(\frac{x}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \right) (1 + O(\sigma)) , \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}} \right) \\ \delta \\ \frac{\varepsilon}{\delta^2} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\Phi_3^{-1}} \begin{pmatrix} \delta \left[h_3\left(\delta, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) + \Psi_3\left(\left(h_1(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}, \sigma) + \Psi_1\left(\frac{x}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \right) (1 + O(\sigma)) , \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}} \right) \right] \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, par définition $\xi_1 = h_1(r_1, \varepsilon_1)$ et $\xi_3 = h_3(r_3, \varepsilon_3)$ sont les équations de la même variété dans des cartes différentes. Ainsi, en utilisant les changements de cartes, on obtient :

$$h_1\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}, \sigma\right) = h_3\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}, \sigma\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \Psi_3\left(\left(h_1\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}, \sigma\right) + \Psi_1\left(\frac{x}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)\right) (1 + O(\sigma)), \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}\right) \\ & \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \left(\frac{x}{\delta} - h_1\left(\delta, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right)\right) O\left(\exp\left(-\frac{k^{tc}}{\varepsilon} \delta^2\right)\right) O\left(\exp\left(\frac{k^{tc}}{\varepsilon} \delta^2\right)\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \\ & \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \left(\frac{x}{\delta} - h_1\left(\delta, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right)\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \end{aligned}$$

Comme $\sigma > 0$ fixé est tel que les applications soient bien définies :

$$x^{out}(x, \delta, \varepsilon) \stackrel{\varepsilon_3 \rightarrow 0}{=} \delta \left[h_3\left(\delta, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) - \left(\frac{x}{\delta} - h_1\left(\delta, \frac{\varepsilon}{\delta^2}\right)\right) O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \right] = \lambda(x) + xO(\varepsilon)$$

avec $\lambda(x) \stackrel{x \rightarrow 0}{=} O(x)$ et $\lambda(x)$ indépendante de ε . ■

Nous avons montré qu'il n'y a pas d'expansion des orbites dépendant de ε lors du passage au voisinage du point de bifurcation transcritique. En effet, le développement de la fonction de transition effectué dans la section précédente est semblable à celui obtenu pour la forme normale (TC_ε^N) . Nous rappelons ici que nous n'avons pas envisagé toutes les perturbations possibles, mais seulement celle permettant de conserver une bifurcation transcritique de la dynamique rapide. Ceci suffit à notre étude et permet de pouvoir étudier localement une grande classe de systèmes lents-rapides présentant un mécanisme d'éjection de type transcritique.

4.3.2 Transition transcritique d'un système global

Nous utilisons la forme locale étudiée dans la sous-section précédente pour analyser les systèmes lents-rapides plans, pour lesquels apparaît une bifurcation transcritique de la dynamique rapide. Nous posons dans un premier temps les hypothèses nécessaires sur le système :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, z) \\ \dot{z} = \varepsilon \cdot h(x, z) \end{cases} \\ (f, h) \in C^3(\mathbb{R}^2)$$

pour qu'il présente ce type de transition.

\mathbf{H}_1^T : L'ensemble critique de (P_ε) est l'union de deux courbes Δ et \mathcal{L} d'intersection transverse $\{T\}$. On suppose alors que Δ et \mathcal{L} sont, localement dans un compact K

autour de T , donnés par des graphes au-dessus de z . Nous envisageons donc le système localement dans le compact K .

\mathbf{H}_2^T : T sépare alors Δ et \mathcal{L} en deux parties respectivement :

$$\begin{aligned}\Delta \cap K &= \Delta^- \cup \{T\} \cup \Delta^+ \\ \mathcal{L} \cap K &= \mathcal{L}^- \cup \{T\} \cup \mathcal{L}^+\end{aligned}$$

On suppose que Δ^- et \mathcal{L}^- sont formées de points attractifs de la dynamique rapide et Δ^+ , \mathcal{L}^+ de points répulsifs. Nous supposons le point non hyperbolique T non dégénéré i.e. :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(T) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T) \neq 0$$

En outre, on suppose que T n'est pas un point singulier du système critique associé et le flot de (S_0) défini sur Δ est dirigé de Δ^- vers Δ^+ .

D'après le théorème de Fénichel, en dehors d'un ouvert arbitrairement petit contenant T , les variétés Δ^- , Δ^+ , \mathcal{L}^- et \mathcal{L}^+ persistent sous la forme de variétés invariantes Δ_ε^- , Δ_ε^+ , $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ et $\mathcal{L}_\varepsilon^+$ pour ε assez petit. L'instabilité structurelle de la bifurcation transcritique nous oblige à poser une condition supplémentaire pour pouvoir maîtriser le flot de (P_ε) au voisinage de T .

\mathbf{H}_3^T : Pour ε assez petit, les prolongements de Δ_ε^- et Δ_ε^+ par le flot de (P_ε) coïncident. Ceci équivaut à supposer que la variété Δ entière persiste en une variété Δ_ε invariante sous le flot de (P_ε) .

Nous obtenons ainsi une bifurcation transcritique de la dynamique rapide en T . Ceci revient à choisir le type de perturbations locales que nous pouvons appliquer à (TC_ε^N) et qui nous permettent de contrôler les orbites au voisinage du point de bifurcation. Remarquons que la variété Δ_ε ne peut en aucun cas être normalement hyperbolique. Il existe donc un point T_ε dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de T qui sépare le prolongement Δ_ε en deux sous-variétés normalement hyperboliques. Enfin, imposer la direction du flot (S_0) sur Δ revient à connaître le signe de h au voisinage de T . Nous pouvons alors rapprocher cette classe de systèmes de la forme locale étudiée dans la section précédente :

Proposition 12 *Sous les hypothèses \mathbf{H}_1^T , \mathbf{H}_2^T , \mathbf{H}_3^T , il existe un changement de variables \mathcal{C}^∞ qui conjugue localement en T le système (P_ε) , $\varepsilon > 0$, à un système de la forme (TC_ε^{loc}) .*

Démonstration. D'après l'hypothèse \mathbf{H}_1^T , nous pouvons choisir un nouveau système de coordonnées locales (\hat{x}, \hat{z}) pour lequel Δ_ε est donné par le graphe $\hat{x} = 0$ et $T_\varepsilon = (0, 0)$. Nous utilisons le développement de Taylor de \hat{f} selon (\hat{x}, \hat{z}) en T . D'après

$\mathbf{H}_2^T, \mathbf{H}_3^T$, en renormant la coordonnée \hat{x} , (P_ε) devient localement :

$$\begin{cases} \hat{x}' = \hat{x}^2 + \alpha \hat{x} \hat{z} + O(\hat{x}^3, \hat{x} \hat{z}^2, \hat{x}^2 \hat{z}, \hat{x} \varepsilon) \\ \hat{z}' = \varepsilon \hat{h}(\hat{x}, \hat{z}) \end{cases}$$

Le choix de l'orientation de z permet alors de supposer $\alpha > 0$ et $\hat{h} > 0$ dans un voisinage de T . En renormant la coordonnée z , on obtient localement :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \hat{x}' = \hat{x}^2 + \alpha \hat{x} \hat{z} + O(\hat{x}^3, \hat{x} \hat{z}^2, \hat{x}^2 \hat{z}, \hat{x} \varepsilon) \\ \hat{z}' = \varepsilon(1 + O(\hat{x}, \hat{z}, \varepsilon)) \\ \varepsilon' = 0 \end{cases}$$

En ajoutant une dynamique nulle sur le paramètre ε , nous obtenons la forme locale (TC_ε^N) . ■

Grâce à cette proposition, nous conjugons les systèmes du plan dont la dynamique rapide subit une bifurcation transcritique non dégénérée et le système local pour lequel nous avons développé la fonction de transition au voisinage du point de bifurcation. Le théorème 4.1 nous permet alors de définir l'application de transition entre deux sections transverses respectivement à Δ^- et Δ^+ et d'en donner un développement asymptotique en ε .

Remarque 4.7 *Les sections sont déformées par le changement de variables inverse défini dans la proposition 12. Cependant, elles restent transverses au flot de (P_ε) pour ε assez petit.*

Chapitre 5

Un autre type d'oscillations de relaxation

Dans ce chapitre, nous appliquons les résultats des chapitres 3 et 4 à la recherche d'orbites périodiques de relaxation d'un type distinct de ceux étudiés jusqu'à présent. En effet, nous envisageons le cas où une transition au moins naît d'une bifurcation transcritique de la dynamique rapide. Or, nous avons établi au chapitre précédent que la fonction de transition associée à ce type de bifurcation dynamique admet un comportement asymptotique très éloigné de celle associée au pli dynamique. De fait, l'absence de contraction suffisante des orbites lors du passage dans un voisinage du point de bifurcation transcritique est susceptible de ne produire aucun point fixe de l'application de retour. Nous traitons ici les cas typiques pour mettre en lumière le caractère peu contractant de la bifurcation transcritique dynamique.

Dans un premier temps, nous étudions le cas d'un système plan présentant deux types de transition différents : l'une née d'une bifurcation pli, l'autre d'une bifurcation transcritique de la dynamique rapide. Puis nous traitons l'exemple d'un système plan à deux transitions transcritiques mettant en défaut la notion d'ultrastabilité évoqué dans le chapitre 1. Enfin, nous traitons le cas d'un système spatial à une variable rapide dont la dynamique subit une bifurcation transcritique et une bifurcation pli le long de variétés de dimension 1.

5.1 Système de relaxation transcritique-pli dans le plan

Nous étudions ici un système global qui, au voisinage de l'origine, est de la forme (TC_ε^{loc}) . Nous le construisons de telle manière que sa dynamique rapide subisse également, en un autre point et pour une autre valeur de la variable lente, une bifurcation pli. Nous voulons ainsi faire naître un comportement de relaxation dont l'un

des mécanismes d'éjection est moins contraignant que la bifurcation pli et nous nous interrogeons sur l'existence d'orbites périodiques pour les petites valeurs de ε .

Remarque 5.1 *Les résultats de cette section peuvent être généralisés à une classe de systèmes lents-rapides du plan. Sous des hypothèses standard sur l'ensemble critique et sur les flots des systèmes critique et couche-limite au voisinage des points non hyperboliques de la dynamique rapide, nous sommes en mesure de caractériser la distribution des orbites périodiques. Cependant, ce résultat est un cas particulier du théorème 5.3 (dans le cas tridimensionnel). Nous avons choisi, dans cette section, de nous intéresser à un exemple particulier afin, d'une part, de rendre plus claire la méthode de décomposition de la fonction de Poincaré que nous utiliserons à plusieurs reprises, d'autre part de modifier cet exemple pour faire apparaître un comportement spécifique d'instabilité.*

5.1.1 Description du système

Considérons :

$$(TCP_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = x(x - z - \frac{1}{3}x^2) = F(x, z) \\ \dot{z} = \varepsilon(x - 1) \end{cases}$$

$$(x, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

L'ensemble critique peut être décomposé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \Delta \cup \mathcal{L} \\ \Delta &= \{(0, z) | z \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{L} &= \{(x, x - \frac{1}{3}x^2) | x \in \mathbb{R}_+\} \end{aligned}$$

L'axe Δ étant une variété invariante, elle sépare l'espace des phases en deux demi-plans invariants par le flot. Ainsi, nous focalisons notre étude sur le demi-plan positif. Nous décomposons \mathcal{L} selon la nature des points singuliers pour la dynamique rapide. Nous posons $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cap \{x < \frac{3}{2}\}$, constituée de points répulsifs pour la dynamique rapide et $\mathcal{L}^- = \mathcal{L} \cap \{x > \frac{3}{2}\}$, constituée de points attractifs. De même, nous séparons la variété Δ en $\Delta^+ = \Delta \cap \{z < 0\}$, constituée de points répulsifs pour la dynamique rapide et $\Delta^- = \Delta \cap \{z > 0\}$, constituée de points attractifs.

Ainsi, pour une donnée initiale $(x, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ proche de Δ^+ , l'orbite est repoussée par la branche répulsive et, sous l'influence de la dynamique rapide, rejoint un voisinage de \mathcal{L}^- en traversant la droite $x = 1$, i.e. $\dot{z} = 0$. Elle monte ensuite en s'approchant exponentiellement de la variété persistante attractive. Au voisinage du point de décrochage de type pli, sous l'influence de la dynamique rapide, elle traverse à nouveau la droite $x = 1$ pour rejoindre un voisinage de Δ^- . Elle descend le long de

cette variété avec une contraction exponentielle, pour arriver au voisinage de l'origine, point de bifurcation transcritique de la dynamique rapide. Par retard à la bifurcation, elle reste dans un voisinage de la variété répulsive Δ^+ . Enfin, elle se "décroche" pour entamer un nouveau cycle.

Nous utilisons les analyses locales au voisinage des points non hyperboliques de la dynamique rapide entrepris dans le chapitre précédent afin de montrer la bonne définition de l'application de premier retour de (TCP_ε) et de donner son développement asymptotique en ε .

5.1.2 Décomposition de l'application de Poincaré

D'après la description précédente, nous sommes amenés à décomposer l'application de Poincaré :

$$\begin{aligned}\Pi & : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A \\ \Sigma_A & = \{(\rho^{in}, z) \mid z > \delta\}\end{aligned}$$

de la manière suivante. Considérons les points :

$$\begin{aligned}P & = (x_P, z_P) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right) \in \mathcal{L}^- \\ A & = (0, z_P) \quad ; \quad B = (0, -z_P) \\ Q & = (x_Q, -z_P) \in \mathcal{L}^- \end{aligned}$$

et les sections du flot suivantes (voir fig. 5.1) :

$$\begin{aligned}\Sigma^\delta & = \{(x, \delta) \mid 0 < x < \rho^{in}\}, & \Sigma^{-\delta} & = \{(x, -\delta) \mid x < 0 < \rho^{out}\} \\ \Sigma_B & = \{(\rho^{out}, z) \mid z < \delta - z_P\}, & \Sigma_Q & = \{(x, 0) \mid 3 - \rho_Q < x < 3 + \rho_Q\} \\ \Sigma_P^{in} & = \{(x, z_P - \delta^2) \mid x > 0\}, & \Sigma_P^{out} & = \{(x_P - \delta, z) \mid z > z_P\}\end{aligned}$$

La constante $\rho^{in} > 0$ est fixée petite, au moins inférieure à z_P . Les paramètres $\rho^{out}, \delta, \rho_Q$ et sont des constantes fixées plus précisément par la suite. Ainsi, nous décomposons la fonction Π de la manière suivante :

$$\Pi = \Pi_{P-A} \circ \Pi_P \circ \Pi_{Q-P} \circ \Pi_{B-Q} \circ \Pi_{O-B} \circ \Pi_O \circ \Pi_{A-O}$$

et montrons par la suite que les fonctions de transition suivantes induites par (TCP_ε) sont bien définies pour ε assez petit :

$$\begin{aligned}\Pi_{A-O} & : \Sigma_A \rightarrow \Sigma^{-\delta} \quad ; \quad \Pi_O : \Sigma^{-\delta} \rightarrow \Sigma^\delta \\ \Pi_{O-B} & : \Sigma^\delta \rightarrow \Sigma_B \quad ; \quad \Pi_{B-Q} : \Sigma_B \rightarrow \Sigma_Q \\ \Pi_{Q-P} & : \Sigma_Q^{out} \rightarrow \Sigma_P^{in} \quad ; \quad \Pi_P : \Sigma_P^{in} \rightarrow \Sigma_P^{out} \\ \Pi_{P-A} & : \Sigma_P^{out} \rightarrow \Sigma_A\end{aligned}$$

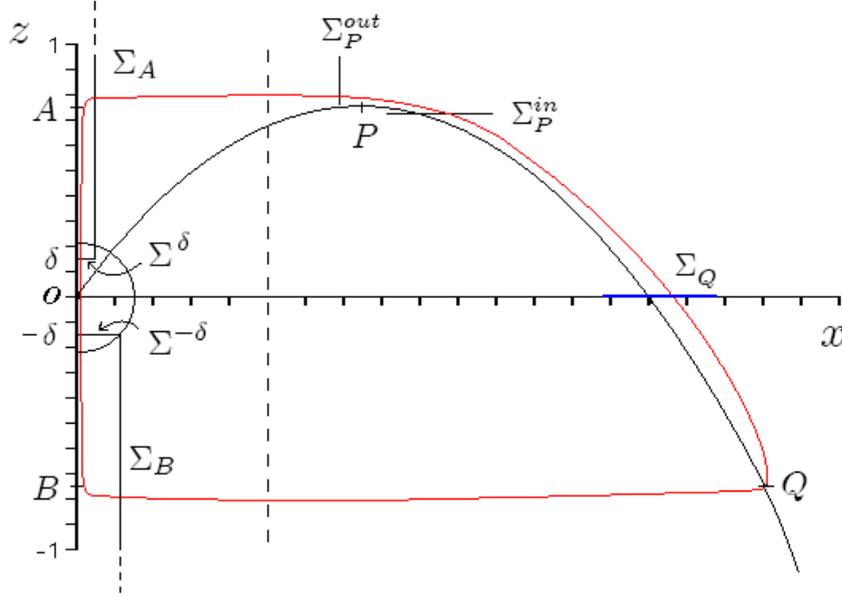


FIG. 5.1 – Décomposition de l'application de Poincaré entre les différentes sections séparant les voisinages des variétés normalement hyperboliques, des points de jonction et des trajectoires rapides.

Sans changer les systèmes de coordonnées dans les différentes sections utilisées, nous induisons de tels changements en donnant les développements des fonctions de transition en prenant un point de référence. Ceci nous permettra de composer les applications sans difficulté pour donner le développement, dans le système de coordonnées originel, de l'application de retour globale. Remarquons que nous pouvons procéder ainsi car les changements de coordonnées permettant de conjuguer (TCP_ε) aux formes locales appropriées – (TC_ε^{loc}) à l'origine et (Pli_ε^{loc}) en P – sont linéaires. Dans un cadre plus général, nous devons choisir les sections du flot comme pré-images de celles adaptées à la forme locale par le difféomorphisme conjuguant le système et cette forme.

5.1.3 Développement des fonctions de transitions

Nous utilisons, dans cette partie, la théorie des perturbations régulières loin de l'origine et du point P et le théorème de Fénichel près de la variété invariante \mathcal{L}^- du système rapide pour décrire le comportement du flot selon ε grâce à un développement. En outre, nous utilisons les résultats du chapitre 3 pour développer la fonction de

transition σ_O au voisinage de l'origine.

– Développement de Π_{A-O}

Proposition 13 *Supposons :*

$$0 < \delta < \rho^{in} - \frac{(\rho^{in})^2}{3}$$

L'application Π_{A-O} est alors bien définie de Σ_A dans Σ^δ . Il existe une constante positive k_1 telle que, pour tout z près de z_p :

$$\Pi_{A-O} \begin{pmatrix} \rho^{in} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cdot \exp\left(-\frac{z^2 - \delta^2}{2\varepsilon}\right) (1 + O(\varepsilon)) \\ \delta \end{pmatrix}$$

Démonstration. Nous savons, a priori, grâce à l'attractivité de Δ^- , que l'application de transition est bien définie entre Σ_A et $\Sigma^{-\delta}$. En outre, pour $\delta > 0$, on peut approcher, par perturbation régulière, l'orbite de (TC_ε^{loc}) passant par $(\rho^{in}, z) \in \Sigma_A$ à $t = 0$ par l'orbite de :

$$\begin{cases} \dot{x} = -xz \\ \dot{z} = -\varepsilon \end{cases}$$

pour $t > 0$ jusqu'à ce qu'elle coupe Σ^δ . Ainsi, on peut intégrer le système pour $\{x(0) = \rho; z(0) = z\}$, et on obtient :

$$x \left(\frac{z - \delta}{\varepsilon} \right) = \rho \exp \left(-\frac{z^2 - \delta^2}{2\varepsilon} \right)$$

Il en résulte le développement Π_{A-O} , par redressement du champ de vecteurs, pour z près de z_P avec $k_1 = z_P^2 - \delta^2$. ■

– Développement de Π_O

En changeant z en $-z$, le système (TCP_ε) étant déjà sous la forme locale (TC_ε^{loc}) , il ne nous est pas nécessaire d'appliquer de changement de variable pour appliquer le théorème 4.1. Ainsi, pour ρ^{in} assez petit, nous pouvons choisir ρ^{out} tel que pour, ε assez petit, l'application de transition Π_O soit bien définie de Σ^δ dans $\Sigma^{-\delta}$ et admette le développement :

$$\Pi_O \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x) + xO(\varepsilon) \\ \delta \end{pmatrix}$$

où $\lambda(x)$ est indépendante de ε et $\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$.

– Développement de Π_{O-B}

L'application de transition Π_{O-B} est bien définie d'après le choix de Σ^δ et Σ_B . Son développement se déduit du même raisonnement que celui de Π_{A-O} . Ainsi :

$$\Pi_{O-B} \begin{pmatrix} x \\ -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ -\sqrt{\delta^2 + 2\varepsilon \ln\left(\frac{x}{\rho}\right)} (1 + O(\varepsilon)) \end{pmatrix}$$

– Développement de Π_{B-Q}

Chaque orbite du système (TCP_0) partant de Σ_B rejoint le voisinage de la branche droite \mathcal{L}^- . En outre, pour ε assez petit, (TCP_ε) est une petite perturbation de la dynamique rapide. Ainsi, l'orbite de (TCP_ε^{loc}) ayant pour donnée initiale $(\rho, z - z_P) \in \Sigma_A$ est loin de tout point singulier de la dynamique rapide jusqu'à ce qu'elle rejoigne le voisinage de \mathcal{L}^- . Sur cet intervalle de temps, l'orbite est sous \mathcal{L}^- et $\dot{x} > 0$, donc elle intersecte nécessairement \mathcal{L}^- en un point $(\tilde{x}_\varepsilon(z), \tilde{z}_\varepsilon(z))$. Par utilisation directe du théorème de Fénichel, on obtient le résultat suivant :

Proposition 14 *Soit $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ la variété persistante invariante normalement hyperbolique de (TCP_ε) restant dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de \mathcal{L}^- . Soit x_Q^ε où $(x_Q^\varepsilon, 0)$ est le point d'intersection de $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ avec Σ_Q . Alors, pour $\rho_Q > 0$ fixé, pour ε assez petit, ce point existe et la fonction de transition induite par le flot entre Σ_B et Σ_Q est bien définie et admet le développement :*

$$\Pi_{B-Q} \begin{pmatrix} \rho^{out} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q^\varepsilon + O\left(\exp\left(-\frac{k_1}{\varepsilon} z\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $k_1 > 0$ et $x_Q^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} O(\varepsilon)$.

Remarque 5.2 *Nous avons choisi une section Σ_Q éloigné du point Q défini dans les hypothèses afin de pouvoir définir Π_{B-Q} sur tout Σ_B . Ceci résulte du fait que nous avons choisi une grande section Σ_A , largement disproportionnée par rapport à l'image de l'application de retour globale. De manière générale (voir théorème 5.3), nous pouvons nous limiter à un petit voisinage V de (z_P, ρ^{in}) dans Σ_A . Ainsi, l'image par $\Pi_{O-B} \circ \Pi_O \circ \Pi_{A-O}$ de ce voisinage est un petit voisinage de $(\rho^{out}, -z_P)$ dans Σ_B . Alors, pour tout $\delta_Q > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\Pi_{B-Q} \circ \Pi_{O-B} \circ \Pi_O \circ \Pi_{A-O}$ soit bien définie de V dans $\{(x, \delta - z_P) | x_Q' - \rho_Q < x < x_Q' + \rho_Q\}$ avec $F(x_Q', \delta - z_P) = 0$. Cette remarque est importante pour caractériser l'ensemble limite-périodique Γ du théorème 5.1.*

– Développement de Π_{Q-P}

Le théorème de Fénichel le long de la variété normalement hyperbolique $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ montre directement :

Proposition 15 *Il existe $k_0 > 0$ tel que, pour x assez petit :*

$$\Pi_{Q-P} \begin{pmatrix} x_Q^\varepsilon + x \\ -z_P + \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P^{in}(\varepsilon) + x \exp\left(-\frac{k_0}{\varepsilon}\right) (1 + O(\varepsilon)) \\ z_P - \delta \end{pmatrix}$$

où :

$$P_\varepsilon^{in} = (x_P^{in}(\varepsilon), z_P - \delta) \in \mathcal{L}_\varepsilon^-$$

– Développement de Π_P

Le point de jonction P vérifie les hypothèses \mathbf{H}_1^P , \mathbf{H}_2^P , \mathbf{H}_3^P . Donc, d'après le théorème 3.1, l'application de transition Π_P de Σ_P^{in} à Σ_P^{out} est bien définie pour δ et ε assez petit et admet le développement :

$$\Pi_P \begin{pmatrix} x_P^{in}(\varepsilon) + x \\ z_P - \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P - \delta \\ z_P^{out}(\varepsilon) + \Psi(x, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

où Ψ est exponentiellement petite par rapport à ε et $z_P^{out}(\varepsilon) = O(\varepsilon^{2/3})$

– Développement de Π_{P-B}

Loin de l'ensemble critique, nous pouvons redresser le champ de vecteurs, on en déduit que pour ε assez petit, l'application Π_{P-A} de Σ_P^{out} vers Σ_A est bien définie et s'écrit :

$$\Pi_{P-B} \begin{pmatrix} x_P - \rho \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ z + O(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

Nous avons finalement tous les développements nécessaires à la description de l'application de retour de Σ_A .

5.1.4 Existence et unicité de l'orbite périodique attractive

Nous utilisons les résultats qui précèdent pour montrer le théorème suivant :

Théorème 5.1 *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, le système (TCP_ε) admet une unique orbite périodique Γ_ε dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Cette dernière est globalement attractive.*

En outre, la famille à un paramètre $(\gamma_\varepsilon)_{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0}$ converge vers l'ensemble limite-périodique :

$$\Gamma = [A, B] \cup [B, Q] \cup \mathcal{L}^- \cap \{-z_P \leq z \leq z_P\} \cup [P, A]$$

qui est un graphique de (TCP_0) adapté à (TCP_ε) .

Démonstration. Nous développons la fonction de Poincaré $\Pi : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ selon ε . En conservant les hypothèses faites sur ρ^{out} , δ , ρ_Q nous obtenons

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \rho^{in} \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi_{A-O}} \begin{pmatrix} \rho \exp\left(-\frac{z^2 - \delta^2}{2\varepsilon}\right) (1 + O(\varepsilon)) \\ \delta \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\Pi_Q} \begin{pmatrix} \rho \exp\left(-\frac{z^2 - \delta^2}{2\varepsilon}\right) (1 + O(\varepsilon)) \\ \delta \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\Pi_{O-B}} \begin{pmatrix} \rho^{out} \\ -z + O(\varepsilon) \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi_{B-Q}} \begin{pmatrix} x_Q^\varepsilon + O\left(\exp\left(-\frac{k_1}{\varepsilon} z\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Pi_{Q \rightarrow P} \left(\begin{array}{c} x_P^{in}(\varepsilon) + \left(x_Q^\varepsilon + O \left(\exp \left(-\frac{k_1}{\varepsilon} z \right) \right) \right) \exp \left(-\frac{k_0}{\varepsilon} \right) \\ z_P - \delta \end{array} \right) \\ & \Pi_{P \rightarrow B} \circ \Pi_P \left(\begin{array}{c} x_P - \delta \\ z_P^{out}(\varepsilon) + \Psi \left(\left(x_Q^\varepsilon + O \left(\exp \left(-\frac{k_1}{\varepsilon} z \right) \right) \right) \exp \left(-\frac{k_0}{\varepsilon} \right), \varepsilon \right) + O(\varepsilon) \end{array} \right) \end{aligned}$$

où Ψ est exponentielle petite. D'après la sous-section précédente, ce développement est juste pour ε assez petit, soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$.

Nous en déduisons donc que Π est une contraction exponentielle en ε uniformément sur tout compact inclus dans Σ_A dont l'image est incluse dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de (ρ^{in}, z_P) . Elle admet donc un point fixe attractif contenu dans ce voisinage auquel est associée une orbite globalement attractive dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Remarquons, en outre, d'après le théorème de Fénichel et la remarque 5.2, que quelque soit le voisinage de $\mathcal{L}^- \cap \{-z_P \leq z \leq z_P\}$, il existe ε assez petit tel que pour toute valeur inférieure l'orbite rentre dans ce voisinage. Il en est de même pour un voisinage de $\Delta \cap \{-z_P \leq z \leq z_P\}$.

De plus, la famille d'orbites γ_ε définit des trajectoires rapides dans $]0, x_P[\times \mathbb{R}^+$ et $]0, x_Q[\times \mathbb{R}^+$. Puisque l'orbite γ_ε passe dans un $O(\varepsilon^{2/3})$ -voisinage de P et dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de Q ; il apparaît que ces trajectoires rapides sont $]P, A[$ et $]B, Q[$. Finalement, il existe une famille $(U_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]}$ de $O(\varepsilon^{2/3})$ -voisinages de :

$$\Gamma = [A, Q] \cup (\mathcal{C} \cap \{x_P \leq x \leq x_Q\}) \cup [P, B] \cup [B, A]$$

pour la topologie de Hausdorff, telle que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $\gamma_\varepsilon \subset U_\varepsilon$. Ainsi, γ_ε converge vers l'ensemble limite-périodique Γ qui est un graphique de (TCP_0) adapté à (TCP_ε) . ■

Nous remarquons que l'ensemble limite-périodique Γ contient $[O, B] \subset \Delta^+$, segment formé de points singuliers répulsifs de la dynamique rapide. Nous en déduisons donc que Γ est un canard, ensemble limite-périodique d'une famille (γ_ε) dépendant uniquement de ε . Contrairement aux systèmes de relaxation dont les mécanismes d'éjection sont tous de type pli, il n'est pas nécessaire ici de faire évoluer un autre paramètre du système pour obtenir des canards. Nous remarquons la forme caractéristique des orbites dans les simulations suivantes.

5.1.5 Simulations

La figure 5.2 représente les orbites périodiques globalement attractives de (TCP_ε) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ pour différentes valeurs de ε . Nous remarquons que plus la valeur de ε est petite, plus l'orbite périodique s'approche près de Δ .

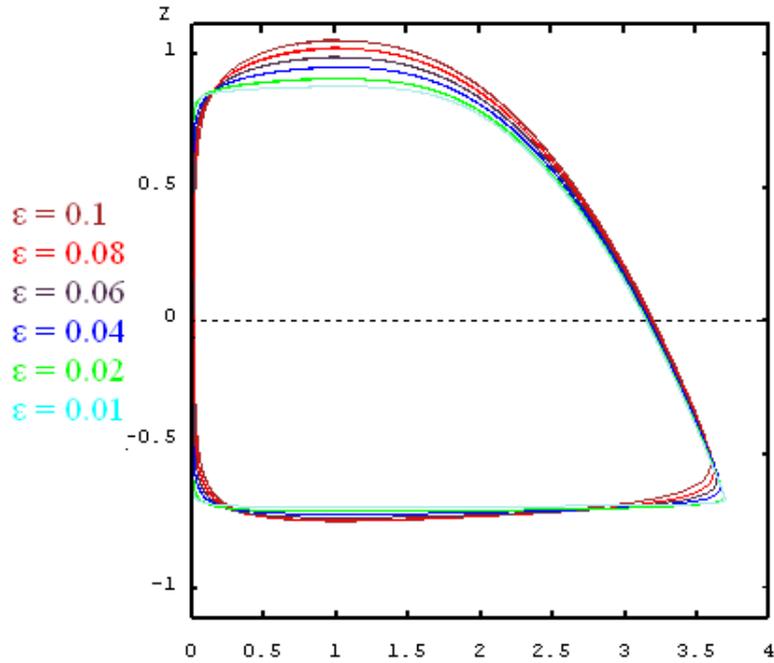


FIG. 5.2 – Orbites périodiques du système (TCP_ε) pour différentes valeurs de ε .

5.2 Un contre-exemple à l'ultrastabilité selon Ashby

Enfin d'étudier plus avant ce type de transition, nous considérons un système produisant des oscillations et n'utilisant que le mécanisme d'éjection transcritique. Ainsi, nous étudions l'exemple d'un système lent-rapide présentant une double bifurcation transcritique de la dynamique rapide (cf [25]) :

$$(DTC_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = (x - z)(1 - x^2) \\ \dot{z} = \varepsilon x \end{cases}$$

Nous nous intéressons au flot entre les droites invariantes d'équation $x = -1$ et $x = 1$.

La dynamique rapide :

$$\dot{x} = (x - z)(1 - x^2)$$

subit des bifurcations transcritiques en -1 pour $z = -1$ et en 1 pour $z = 1$. Le système admet l'origine pour unique point singulier qui est un foyer répulsif. Nous montrons que, dans ce cas, les orbites de ce système contenues dans la bande $[-1, 1] \times \mathbb{R}$, à l'exception de celle stationnaire en O , présentent des oscillations d'amplitude de plus en plus grande en z et restent, à chaque oscillation, durant un temps de plus en plus grand dans un voisinage donné des parties répulsives de l'ensemble critique.

5.2.1 Accroissement du délai

Proposition 16 *Il n'existe pas de cycle limite entre les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$. Pour toute condition initiale différente de $(0, 0)$, pour tout δ et pour tout T , l'orbite correspondante reste durant un temps plus grand que T à une distance inférieure à δ de la partie répulsive de la variété lente.*

Démonstration. On applique le changement de variable $x = \tanh(u)$ dans $] -1, 1[$ et on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} \dot{u} = \tanh(u) - z \\ \dot{z} = \varepsilon \cdot \tanh(u) \end{cases} \quad (5.1)$$

En différentiant la première équation, nous obtenons :

$$\dot{z} = \frac{\dot{u}}{\cosh^2(u)} - \ddot{u}$$

Puis en remplaçant par la dynamique sur z :

$$\ddot{u} + \varepsilon \dot{u} \tanh(u) = \left(\frac{u}{\cosh(u)} \right)^2$$

Il apparaît alors que la fonction :

$$\Phi(u, z) = \frac{1}{2} (\tanh u - z)^2 + \varepsilon \ln (\cosh u)$$

est une fonction de Lyapunov de (5.1) strictement croissante le long du flot sauf au point $(0, 0)$.

En outre, remarquons que si $(u(t), z(t))$ est une solution de (5.1) alors $(-u(t), -z(t))$ également. Nous pouvons donc, sans perte de généralité, restreindre notre analyse des orbites du système en considérant les conditions initiales (u_0, z_0) telles que $u_0 \geq 0$.

1) Supposons dans un premier temps $z_0 \geq \tanh(u_0)$. Alors $\dot{u}(0) \leq 0$ et :

$$\frac{d}{dt}(z - \tanh u) = \varepsilon \tanh u + \frac{z - \tanh u}{\cosh^2 u}$$

montre que $z - \tanh u$ croît et donc reste positif. Supposons que u reste positif. Alors, comme $z - \tanh u > 0$, u décroît et $u \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} l$.

- Si $l > 0$, $\dot{z} = \varepsilon \tanh u$ implique $z \rightarrow +\infty$ donc $\dot{u} \rightarrow -\infty$ ce qui est en contradiction avec $u > 0$.

- Si $l = 0$, $\dot{u} + z \rightarrow 0$. Or z est croissante. Si $z \rightarrow +\infty$, alors $\dot{u} \rightarrow -\infty$ et nous obtenons à nouveau une contradiction. Si z tend vers une limite finie m , alors $\dot{u} \rightarrow -m$: nouvelle contradiction. Ainsi, toutes les orbites ayant pour donnée initiale (u_0, z_0) telle que $z_0 \geq \tanh u_0 \geq 0$ intersectent l'axe $u = 0$.

2) Considérons à présent le cas $z_0 < \tanh u_0$. La variable u est d'abord croissante – tant que $z < \tanh u$ – donc positive et z est croissante. Supposons que $\tanh u - z$ reste positif le long de l'orbite. Alors, quand $t \rightarrow +\infty$, u tend vers une limite m (éventuellement $+\infty$). Comme $\dot{z} \rightarrow m$, $z \rightarrow +\infty$ et nous obtenons une contradiction avec $\dot{u} \rightarrow -\infty$. Ainsi, l'orbite coupe nécessairement la droite $z = \tanh u$ et enfin l'axe $u = 0$ d'après le 1).

Par symétrie, nous pouvons également montrer l'existence de deux suites de valeurs de t , (t_n) et (θ_n) telles que :

$$\begin{aligned} t_n &< \theta_n < t_{n+1} \\ x(t_n) &= x(t_{n+1}) = 0 \\ x(\theta_n) &= z(\theta_n) \\ z(t_n) &= (-1)^n a_n, \quad a_n > 0 \end{aligned}$$

Montrons que (t_n) n'est pas bornée. Considérons la fonction :

$$w(x, z) = 2\Phi(u, z) = (x - z)^2 - \varepsilon \ln |1 - x^2|$$

qui vérifie :

$$\dot{w} = \frac{2}{\varepsilon} (1 - x^2)(x - z)^2$$

Comme w est strictement croissante :

$$w(t_n) = a_n^2 < w(\theta_n) = -\varepsilon \ln(1 - \xi_n^2) < w(t_{n+1}) = a_{n+1}^2$$

avec $\xi_n = x(\theta_n)$. En intégrant le long du flot de $\dot{w} = 2\dot{x}(x - z)$, on obtient :

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - a_n^2 &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} 2\dot{x}(x - z).dt = 2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} x\dot{z}.dt \\ &= 2\varepsilon \int_{t_n}^{t_{n+1}} x^2 dt \leq 2\varepsilon(t_n - t_{n+1}) \end{aligned}$$

Ainsi, si (t_n) converge vers une limite finie, (a_n) et (ξ_n) également. D'autre part, l'intégration le long du flot de $\dot{z} = \varepsilon u$ implique :

$$a_n + a_{n+1} \leq \varepsilon \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\tanh u| dt \leq \varepsilon(t_{n+1} - t_n)$$

Donc la suite (t_n) est nécessairement non bornée.

Montrons, par l'absurde, que la suite (a_n) n'est pas bornée. Si elle l'était, puisque (t_n) tend vers $+\infty$, la fonction w serait bornée le long de l'orbite. Donc les deux fonctions $(x - z)^2$ et $-\ln(1 - x^2)$ également. Il existerait alors une constante α telle que $(1 - x^2) \geq \alpha$ le long de l'orbite et :

$$\dot{w} \geq 2\alpha(x - z)^2 \geq 2\alpha w$$

Ainsi, $e^{-2\alpha t}w(t)$ serait croissante, ce qui est en contradiction avec le fait que w serait bornée.

Enfin, considérons la suite non bornée de points $(0, a_n)$ de l'orbite. D'après le théorème de Tikhonov, il existe une courbe invariante passant dans un voisinage de chacun de ces points. D'après le théorème de Takens, le flot est conjugué à la dynamique rapide le long de cette courbe invariante. Ainsi, pour toute orbite entre $\{x = -1\}$ et $\{x = 1\}$, pour tous δ et T , il existe une partie de l'orbite qui reste à une distance inférieure à δ des parties répulsives $\{-1\} \times \mathbb{R}_-$ et $\{1\} \times \mathbb{R}_+$ pendant un temps supérieur à T . ■

5.2.2 Auto-amplification du retard à la bifurcation

Soit $\gamma(t) = (x(t), z(t))$ la paramétrisation de l'orbite de donnée initiale $(x_0, z_0) \in]0, 1[\times \mathbb{R}$. Alors, si $(x_0, z_0) \neq (0, 0)$, l'orbite explose en oscillant autour de la position d'équilibre instable $(0, 0)$ en approchant alternativement et de plus en plus près les droites $x = -1$ et $x = 1$ comme le montre la figure 5.3.

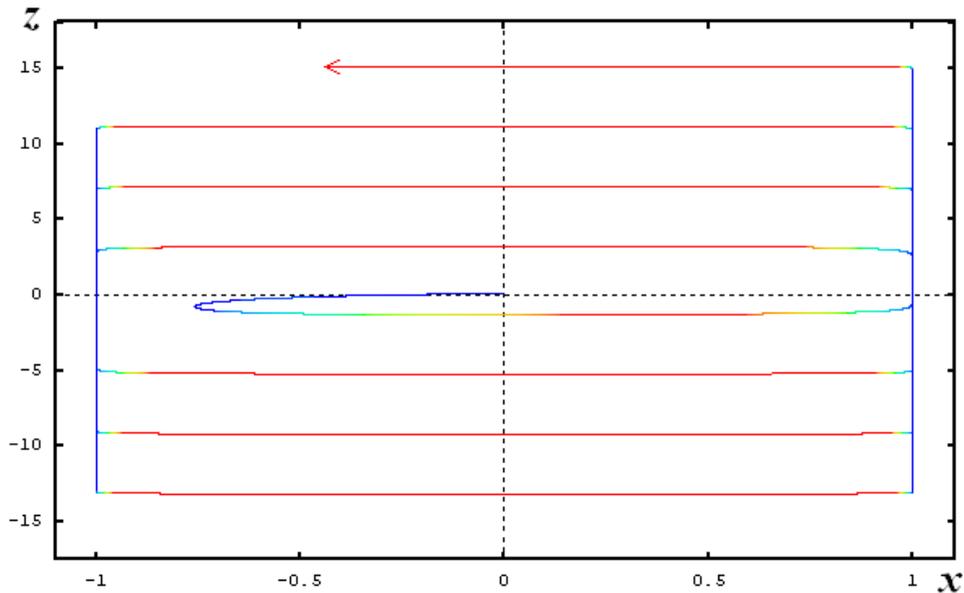


FIG. 5.3 – Orbite du système (DTC_ε) pour $\varepsilon = 0.2$ ayant pour valeur initiale $(0, 0.1)$. L'orbite s'éloigne du foyer répulsif O et rejoint alternativement un voisinage de plus en plus étroit de $\{x = -1\}$ et $\{x = 1\}$ durant un temps de plus en plus grand. La couleur rouge désigne un mouvement rapide de l'orbite et la couleur bleue un mouvement lent.

Ce phénomène nouveau que nous baptisons “auto-amplification du retard à la bifurcation” met en évidence l'aspect moins “contractant” du mécanisme de transition transcritique comme générateur d'un comportement de relaxation. En effet, contraire-

ment à la relaxation classique générée par des bifurcations de type pli, ici l'amplitude de la composante en z de toute orbite ne passant pas par O diverge.

5.3 Courbe \mathcal{T} de bifurcations transcritiques de la dynamique rapide

Nous généralisons le résultat précédent en considérant à présent une dynamique lente-rapide tridimensionnelle à une variable rapide. Nous nous intéressons au cas où apparaît une ligne de bifurcation transcritique de la dynamique rapide et analysons la transition par le flot au voisinage de cette ligne.

5.3.1 Forme normale

Nous considérons :

$$(\mathcal{TC}_\varepsilon^N) : \begin{cases} \dot{x} = x^2 + \alpha x z \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = \varepsilon \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$. L'ensemble critique est constitué des deux plans d'équation $x = 0$ et $x = -\alpha z$ que nous pouvons décomposer en $S_1^- \cup \mathcal{T} \cup S_1^+$ et $S_2^- \cup \mathcal{T} \cup S_2^+$ où S_1^- , S_2^- sont constitués des points singuliers attractifs de la dynamique rapide et S_1^+ , S_2^+ des points répulsifs (voir fig. 5.4).

Chaque plan d'équation $y = cste$ est invariant sous le flot de ce système local. Dans chacun d'eux, la forme normale se réduit à la dynamique étudiée dans le chapitre précédent. Ainsi, pour toutes valeurs de y , nous pouvons utiliser directement la fonction de transition du système de bifurcation transcritique dynamique.

5.3.2 Forme locale perturbée

Nous étudions à présent certaines perturbations de $(\mathcal{TC}_\varepsilon^N)$. Considérons la classe de systèmes suivante :

$$(\mathcal{TC}_\varepsilon^{loc}) : \begin{cases} \dot{x} = x^2 + \alpha x z + O(x^3, xz^2, x^2z, xyz^2, x\bar{\varepsilon}) \\ \dot{y} = \bar{\varepsilon} O(x, z, \bar{\varepsilon}) \\ \dot{z} = \bar{\varepsilon} (1 + O(x, z, \bar{\varepsilon})) \\ \dot{\bar{\varepsilon}} = 0 \end{cases}$$

L'ensemble critique est constitué du plan $x = 0$ et, d'après le théorème des fonctions implicites, d'une variété algébrique qui l'intersecte transversalement. Nous notons \mathcal{T} cette intersection. Localement autour de \mathcal{T} , cette variété est donnée par un graphe

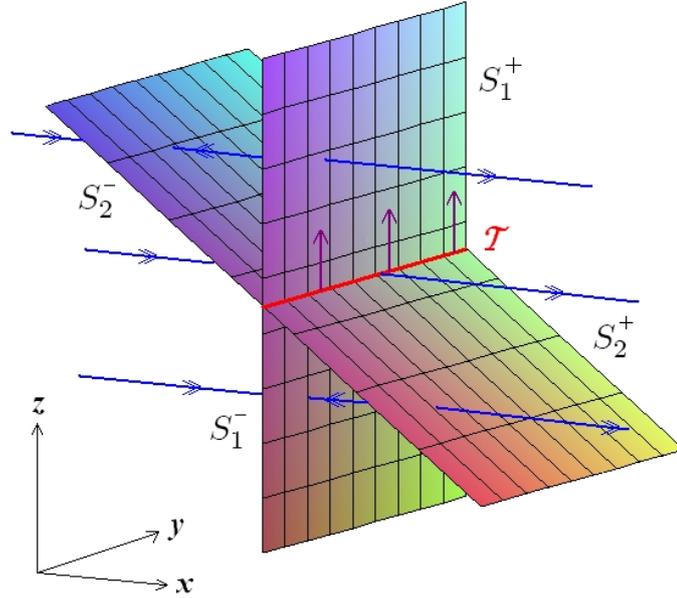


FIG. 5.4 – Décomposition de l'ensemble critique selon la nature des points singuliers de la dynamique rapide. La courbe \mathcal{T} le sépare en les variétés S_1^- , S_1^+ , S_2^- et S_2^+ .

au-dessus de (x, y) pour $y \in I$ intervalle ouvert de \mathbb{R} . Nous pouvons alors supposer, sans perte de généralité que \mathcal{T} est donnée par $\{(0, y, 0) | y \in I\}$.

Nous nommons, à l'instar de la forme normale, $S_1^- \subset \{(0, y, z) | y \in I\}$ et S_2^- les sous-variétés constituées des points singuliers de la dynamique rapide et S_1^+ incluse dans $\{(0, y, z) | y \in I\}$ et S_2^+ celles constituées des points répulsifs. Ces variétés sont normalement hyperboliques et, d'après le théorème de Fénichel, en dehors d'un ouvert arbitrairement petit de \mathcal{T} , elles persistent sous la forme de variétés invariantes pour $(\mathcal{T}C_\varepsilon^{loc})$ normalement hyperboliques.

5.3.3 Analyse de la transition au voisinage de \mathcal{T}

Nous voulons développer la fonction de transition entre deux sections du flot encadrant \mathcal{T} :

$$\begin{aligned} \Sigma^{in} &= \{(x, -\delta, y, \bar{\varepsilon}) \in \mathbb{R}^4 | 0 \leq x \leq \kappa, 0 < \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_0, y \in \hat{I}\} \\ \Sigma^{out} &= \{(x, \delta, y, \bar{\varepsilon}) \in \mathbb{R}^4 | x \geq 0, 0 < \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_0, y \in I\} \end{aligned}$$

où $\delta > 0$ fixé petit et κ et ε_0 également supposés petits et précisés ultérieurement. L'intervalle \hat{I} est inclus dans I et supposé assez petit pour que la fonction de transition induite par (S_0) sur S_1 soit bien définie de $\{(0, y, -\delta) \in \mathbb{R}^3 | y \in \hat{I}\}$ dans $\{(0, y, \delta) \in \mathbb{R}^3 | y \in I\}$.

Nous utilisons le même éclatement à paramètre que dans le chapitre précédent sans éclater la variable y , c'est-à-dire :

$$\Phi : \begin{array}{l} S^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ ((\xi, \zeta, \varepsilon), \eta, r) \rightarrow (r\xi, \eta, r\zeta, r^2\varepsilon) = (x, y, z, \bar{\varepsilon}) \end{array}$$

Ainsi, le segment \mathcal{T} devient, dans ces nouvelles coordonnées, un cylindre $S^2 \times I$ plongé dans $S^2 \times \mathbb{R}^2$.

Carte K_1

Nous nous intéressons en premier lieu à l'éclatement directionnel dans la carte d'entrée $\zeta = -1$:

$$\Phi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\xi_1, r_1, \varepsilon_1) \rightarrow (r_1\xi_1, -r_1, r_1^2\varepsilon_1) \end{cases}$$

Après application du changement de variables à $(\mathcal{TC}_\varepsilon^{loc})$ et division locale par :

$$r_1 [1 + \varphi_1(\xi_1, r_1, \varepsilon_1)]$$

où $\varphi_1(\xi_1, r_1, \varepsilon_1) = O(r_1)$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \varepsilon_1\xi_1 + \xi_1^2 - \alpha\xi_1 + O(r_1) \\ \dot{\eta}_1 = O(r_1^2\varepsilon_1) \\ \dot{r}_1 = -r_1\varepsilon_1 \\ \dot{\varepsilon}_1 = 2\varepsilon_1^2 \end{cases} \quad (5.2)$$

pour lequel le point O est singulier. Les deux hyperplans $\{\varepsilon_1 = 0\}$ et $\{r_1 = 0\}$ sont invariants par le flot.

Dans le premier, le sous-système de (5.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_1(\xi_1 - \alpha) + O(r_1) \\ \dot{\eta}_1 = 0 \\ \dot{r}_1 = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

et dans le deuxième :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \varepsilon_1\xi_1 + \xi_1^2 - \alpha\xi_1 \\ \dot{\eta}_1 = 0 \\ \dot{\varepsilon}_1 = 2\varepsilon_1^2 \end{cases} \quad (5.4)$$

Ainsi, les propriétés géométriques de ces flots se déduisent directement de celles de (4.14) et (4.15). Il existe donc des surfaces $\Delta_{1,I}^-$ et $\Delta_{1,I}^+$ incluses dans $\{\varepsilon_1 = 0\}$ invariantes pour (5.2) normalement hyperboliques contenant respectivement les segments $\{(0, \eta_1, 0, 0) | \eta_1 \in I\}$ et $\{(\alpha, \eta_1, 0, 0) | \eta_1 \in I\}$. Elles sont formées de points singuliers

de (5.2) en lesquels la valeur propre non nulle associée est $-\alpha + O(r_1)$. La surface $\Delta_{1,I}^-$ correspond précisément à la variété S_1^- associée au système $(\mathcal{TC}_\varepsilon^{loc})$. De même, la partie de plan $\{(0, \eta_1, 0, \varepsilon_1) | \eta_1 \in I, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}\}$ est la variété centrale normalement hyperbolique associée au point singulier O de (5.3) invariante sous le flot de (5.2). Un vecteur propre associé à la valeur propre nulle en $(0, 0, 0)$ est $(\xi_1, \eta_1, \varepsilon_1) = (1, 0, 0)$.

Nous obtenons une proposition semblable à celle de l'étude du système plan directement d'après la théorie des variétés invariantes :

Proposition 17 *Il existe une variété centrale attractive \mathcal{V}_1^I de dimension 3 associée au point singulier $(0, 0, 0, 0)$ de (5.2) contenant les variétés $\{(0, \eta_1, 0, \varepsilon_1) | \eta_1 \in I, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}\}$ et Δ_1^I . Pour δ et σ assez petits, dans le voisinage :*

$$\mathcal{N}_1^I = \{(\xi_1, r_1, \eta_1, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq r_1 \leq \delta, \eta_1 \in I, 0 \leq \varepsilon_1 \leq \sigma\}$$

on a :

$$\mathcal{V}_1^I : \xi_1 = h_1^I(\eta_1, r_1, \varepsilon_1) = O(r_1) + O(\varepsilon_1^2)$$

De plus, il existe un feuilletage invariant stable de base \mathcal{V}_1^I et de fibre de dimension 1 tel que, pour tout $k < \alpha$, il existe des constantes δ et σ telles que la contraction le long du feuilletage restreint à \mathcal{N}_1^I soit plus forte que $\exp(-kt)$.

Nous utilisons alors cet argument géométrique pour étudier le flot de (5.2) au voisinage de l'origine et nous développons le temps de transition entre les sections :

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{in} &= \{(\xi_1, \delta, \varepsilon_1) | \xi_1 \in \mathbb{R}, \eta_1 \in I, 0 < \varepsilon_1 \leq \sigma\} \\ \Sigma_1^{out} &= \{(\xi_1, r_1, \sigma) | \xi_1 \in \mathbb{R}, \eta_1 \in I, 0 < r_1 \leq \delta\} \end{aligned}$$

Proposition 18 *Soit :*

$$D_1^I = \left\{ (\xi_1, r_1, \eta_1, \varepsilon_1) \in \mathcal{N}_1^I \left| \begin{array}{l} h_1(r_1, \varepsilon_1) < \xi_1 \leq h_1(r_1, \varepsilon_1) + \beta_1, \\ 0 \leq r_1 \leq \delta, 0 \leq \varepsilon_1 \leq \sigma, \eta_1 \in I \end{array} \right. \right\}$$

Pour tout $0 < \beta_1 < \alpha$, il existe des constantes δ et σ assez petites telles que la fonction de transition $\Pi_1 : \Sigma_1^{in} \cap D_1^I \rightarrow \Sigma_1^{out} \cap D_1^I$ soit bien définie par le système (5.2). Elle admet alors le développement suivant :

$$\Pi_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \delta \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(\eta_1^{out}(\eta_1, \delta, \varepsilon_1), \delta\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\sigma}}, \sigma) + \Psi_1(\xi_1, \varepsilon_1) \\ \eta_1^{out}(\eta_1, \delta, \varepsilon_1) \\ \delta\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\sigma}} \\ \sigma \end{pmatrix}$$

où :

$$h_1 \left(\eta_1^{out}(\eta_1, \delta, \varepsilon_1), \delta \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma} \right)^{1/2}, \sigma \right) = O(\sigma) + O \left(\delta \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma} \right)^{1/2} \right) = O(\sigma) + O(\sqrt{\varepsilon_1})$$

$$\eta_1^{out}(\eta_1, \delta, \varepsilon_1) = \eta_1 + O(\varepsilon_1) + O(\delta^2)$$

et $\Psi_1(\xi_1, \varepsilon_1)$ est exponentiellement petite selon ε_1 , c'est à dire il existe $k^{tc} > 0$ tel que pour ε_1 :

$$\Psi_1(\xi_1, \varepsilon_1) \underset{\varepsilon_1 \rightarrow 0}{=} (\xi_1 - h_1(\delta, \varepsilon_1)) O \left(\exp \left(-\frac{k^{tc}}{\varepsilon_1} \right) \right) \quad (5.5)$$

L'intégration des dynamiques sur ε_1 et r_1 sont similaires à celles de la démonstration dans le cas plan. Cependant, la démonstration diffère du fait de la présence de la dynamique sur η_1 qu'il nous faut contrôler. Nous nous attachons précisément à la composante en η_1 de l'image de $(r_1(0), \eta_1(0), \varepsilon_1(0)) = (\delta, \eta_1^{init}, \varepsilon_1^{init}) \in D_1^I$ par la fonction de transition. A cet effet, nous utilisons le résultat suivant :

Lemme 9 *Le changement de temps suivant :*

$$\varphi : t \rightarrow \varepsilon_1(t).t \quad (5.6)$$

est bien défini sur $[0, \infty[$ le long de chaque orbite du système non perturbé (5.4) pour laquelle $\varepsilon_1 > 0$.

Plus précisément, pour tout $\varepsilon_1^{init} > 0$, en notant $\gamma(t) = (\xi_1(t), \eta_1(t), \varepsilon_1(t))$ la paramétrisation de l'orbite de (5.4) qui passe par $(\xi_1^{init}, \eta_1^{init}, \varepsilon_1^{init})$ en $t = 0$, la fonction φ est un C^1 -difféomorphisme de $[0, \infty[$ sur $[0, \infty[$.

Démonstration. Soit :

$$\tau = \varepsilon_1(t).t$$

Alors, d'après la dynamique (5.4), la paramétrisation $\varepsilon_1(t)$ est différentiable et on a :

$$d\tau = \left[\frac{d}{dt}(\varepsilon_1(t).t) + \varepsilon_1(t) \right].dt$$

On en déduit :

$$d\tau = (\dot{\varepsilon}_1 t + \varepsilon_1).dt = (2\varepsilon_1^2 t + \varepsilon_1).dt = (2\tau + 1)\varepsilon_1 dt$$

Comme $\varepsilon_1 > 0$ et $\tau \geq 0$, la fonction φ définit un C^1 -difféomorphisme de $[0, \infty[$. ■

Démonstration de la Proposition. Par application de (5.6) à (5.2) restreint à \mathcal{V}_1^I , on obtient après division locale :

$$\begin{cases} \xi_1 = h_1^I(\eta_1, r_1, \varepsilon_1) \\ \eta_1' = O(r_1^2) \\ r_1' = -r_1 \\ \varepsilon_1' = 2\varepsilon_1 \end{cases}$$

pour la nouvelle échelle temporelle, le temps de transition de l'orbite passant par $(\xi_1^{init}, \eta_1^{init}, \varepsilon_1^{init})$ entre Σ_1^{in} et Σ_1^{out} est :

$$\varsigma = \ln \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon_1^{init}}}$$

Ainsi, en intégrant la dynamique :

$$\eta_1' = O(r_1^2) = e^{-2\tau} O(\delta^2)$$

on a :

$$\eta_1^{out}(\varsigma) = \eta_1^{init} + \left(1 - \frac{\varepsilon_1^{init}}{\sigma}\right) O(\delta^2) = \eta_1^{init} + O(\delta^2) + O(\varepsilon_1^{init})$$

On déduit directement les autres composantes par intégration comme dans le cas du système plan. ■

Nous obtenons grâce à ce résultat un développement de la fonction de transition bien définie entre $\Sigma_1^{in} \cap D_1$, section d'entrée du flot dans $S^2 \times I \times \mathbb{R}$ et image par Φ_1^{-1} de $\Sigma^{in} = \{(x, y, -\delta, \bar{\varepsilon}) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq \kappa, 0 < \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_0, y \in I\}$, κ et ε_0 étant assez petits, et Σ_1^{out} . Dans la suite, nous analysons le flot dans la carte définie par $\varepsilon = 1$.

Carte K_2

L'éclatement directionnel dans la carte K_2 , définie par $\varepsilon = 1$, s'écrit :

$$x = r_2 \xi_2, \quad y = \eta_2, \quad z = r_2 \zeta_2, \quad \bar{\varepsilon} = r_2^2 \quad (5.7)$$

En l'appliquant à $(\mathcal{TC}_\varepsilon^{loc})$, après division locale par $r_2(1 + \varphi_2(\xi_2, \zeta_2, r_2))$ où $\varphi_2(\xi_2, \zeta_2, r_2) = O(r_2)$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_2 = \xi_2^2 + \alpha \xi_2 \zeta_2 + \xi_2 O(r_2) \\ \dot{\eta}_2 = O(r_2^2) \\ \dot{\zeta}_2 = 1 \\ \dot{r}_2 = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Remarquons que le système non perturbé dans chaque hyperplan $\{\eta_2 = cste \in I\}$ est donné par le système non perturbé du cas plan. Il est dès lors très simple de donner le développement de la fonction de transition dans la carte K_2 du système (5.8) entre les sections :

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{in} &= \left\{ \left(\xi_2, \eta_2, -\sigma^{-1/2}, r_2 \right) \mid (\xi_2, r_2) \in \mathbb{R}^2, \eta_2 \in I \right\} \\ \Sigma_2^{out} &= \left\{ \left(\xi_2, \eta_2, \sigma^{-1/2}, r_2 \right) \mid (\xi_2, r_2) \in \mathbb{R}^2, \eta_2 \in I \right\} \end{aligned}$$

Le calcul direct permet d'obtenir :

Lemme 10 *Les changements de coordonnées entre les cartes K_1 et K_2 sont donnés par :*

$$K_{21}(\xi_1, \eta_1, r_1, \varepsilon_1) \rightarrow \left(\frac{\xi_1}{\varepsilon_1^{1/2}}, \eta_1, -\frac{1}{\varepsilon_1^{1/2}}, r_1 \varepsilon_1^{1/2} \right), \quad \varepsilon_1 > 0 \quad (5.9)$$

$$K_{12}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, r_2) \rightarrow \left(-\frac{\xi_2}{\zeta_2}, \eta_2, -r_2 \zeta_2, \frac{1}{\zeta_2} \right), \quad \zeta_2 < 0 \quad (5.10)$$

Alors, nous obtenons le résultat suivant dont la démonstration est la même que celle du lemme 7 dans 4.2.2.

Lemme 11 *L'image par K_{12} de $\mathcal{V}_1^I \cap \Sigma_1^{\text{out}}$ est donné par un graphe :*

$$\xi_2 = h_2(\eta_2, \zeta_2, r_2), \quad \zeta_2 \leq -\frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \quad 0 \leq r_2 \leq \delta \sqrt{\sigma}, \quad \eta_2 \in I$$

avec :

$$h_2(\eta_2, \zeta_2, r_2) = O\left(r_2 \zeta_2^2, \frac{1}{\zeta_2^3}\right)$$

L'image $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, r_2)$ d'un point de $\Sigma_1^{\text{out}} \cap D_1^I$ au-dessus de \mathcal{V}_1^I vérifie :

$$h_2(\zeta_2, \eta_2, r_2) < \xi_2 < h_2(\zeta_2, \eta_2, r_2) + \beta_2 h_2(\zeta_2, \eta_2, r_2)$$

où $\beta_2 > 0$ peut-être choisi aussi petit qu'on veut en prenant $\beta_1 > 0$ assez petit.

Ainsi, l'image de $K_{21} \circ \Pi_1$ est une partie de :

$$\left\{ \left(\xi_2, \eta_2, -\sigma^{1/2}, r_2 \right) \in \mathbb{R}^3 \mid h_2(\eta_2, \zeta_2, r_2) \leq \xi_2 \leq h_2(\eta_2, \zeta_2, r_2) + \beta_2, \eta_2 \in I \right\}$$

et pour $\delta \rightarrow 0$, $K_{21}(\mathcal{V}_1 \cap \Sigma_1^{\text{out}})$ tend vers $\{(0, \eta_2, 0, 0) \mid \eta_2 \in I\}$.

Proposition 19 *Soit :*

$$D_2 = \left\{ (\xi_2, \eta_2, \zeta_2, r_2) \in \mathbb{R}^3 \mid h_2(\eta_2, \zeta_2, r_2) \leq \xi_2, 0 \leq r_2 \leq \delta \sigma^{1/2}, \eta_2 \in I \right\}$$

Alors, il existe σ, δ, β_2 des constantes strictement positives assez petites telles que :

- (1) $K_{21}(\Sigma_1^{\text{out}} \cap D_1) \subset \Sigma_2^{\text{in}} \cap D_2$
- (2) le flot du système (5.8) induit une fonction de transition bien définie de $\Sigma_2^{\text{in}} \cap D_2$ dans Σ_2^{out} :

$$\Pi_2 \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2^{\text{out}}(\xi_2, \eta_2, \sigma, r_2) \\ \eta_2^{\text{out}}(\xi_2, \eta_2, \sigma, r_2) \\ \sigma^{-1/2} \\ r_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}\xi_2^{out}(\xi_2, \eta_2, \sigma, r_2) &= h_2(\sigma^{-1/2}, \eta_2, r_2) + (\xi_2 - h_2(-\sigma^{1/2}, r_2))O(r_2) \\ h_2(\sigma^{-1/2}, \eta_2, r_2) &= \xi_2 \left[\left(1 + 2\frac{\sqrt{\sigma}}{\alpha}\xi_2 \right) + \xi_2^2 O(\sigma) \right] \\ \eta_2^{out}(\xi_2, \eta_2, \sigma, r_2) &= \eta_2 + O(r_2^2)\end{aligned}$$

Démonstration. La première assertion s'obtient sans difficulté par le calcul en utilisant (5.9). Les composantes en ξ_2, ζ_2, r_2 du système non perturbé se déduisent de la même démonstration que dans le cas plan. Le résultat final provient directement de la théorie des perturbations régulières. ■

Carte K_3

Dans la carte K_3 , définie par $\zeta = 1$, l'éclatement directionnel Φ_3 s'obtient par le changement de variable :

$$x = r_3 \xi_3, \quad y = \eta_3, \quad z = r_3, \quad \bar{\varepsilon} = r_3^2 \varepsilon_3$$

Après division locale par $r_3 [1 + \varphi_3(\xi_3, \eta_3, r_3, \varepsilon_3)]$ où $\varphi_3(\xi_3, \eta_3, r_3, \varepsilon_3) = O(r_3)$, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_3 = \varepsilon_3 \xi_3 + \xi_3^2 + \alpha \xi_3 + O(r_3) \\ \dot{\eta}_3 = O(r_3^2 \varepsilon_3) \\ \dot{r}_3 = r_3 \varepsilon_3 \\ \dot{\varepsilon}_3 = -2\varepsilon_3^2 \end{cases} \quad (5.11)$$

Ainsi, il existe dans $\{\varepsilon_3 = 0\}$ une variété centrale de dimension 2 normalement hyperbolique Δ_3^I passant par $(0, 0, 0)$ et formée de points singuliers instables pour lesquels la valeur propre non nulle est proche de α . La variété Δ_3^I est précisément la variété S_1^+ associée au système (TC_ε^{loc}) . Dans $\{r_3 = 0\}$, $\{(0, \eta_3, 0, \varepsilon_3) | \eta_3 \in I, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}\}$ est la variété centrale instable, invariante sous le flot de (5.11), associée au point singulier $(0, 0, 0)$ du sous-système pour $r_3 = 0$. On obtient la proposition équivalente à celle dans K_1 grâce à la théorie des variétés invariantes :

Proposition 20 *Il existe une variété centrale répulsive \mathcal{V}_3^I de dimension 3 associée au point singulier $(0, 0, 0, 0)$ de (5.11) contenant les variétés Δ_3^I et $\{(0, \eta_3, 0, \varepsilon_3) | \eta_3 \in I, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}\}$.*

Pour δ et σ assez petits, dans le voisinage :

$$\mathcal{N}_3 = \{(\xi_3, \eta_3, r_3, \varepsilon_3) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq r_3 \leq \delta, 0 \leq \varepsilon_3 \leq \sigma, \eta_3 \in I\}$$

on a :

$$\mathcal{V}_3^I : \xi_3 = h_3(\eta_3, r_3, \varepsilon_3) = O(r_3) + O(\varepsilon_3^2)$$

Il existe un feuilletage invariant instable de base \mathcal{V}_3^I et de fibre de dimension 1 telle que, pour tout $k > \alpha$, il existe des constantes δ et σ telles que la dilatation le long du feuilletage soit moins forte que $\exp(kt)$.

Par un calcul direct, on obtient :

Lemme 12 Les changements de coordonnées entre les cartes K_2 et K_3 sont donnés par :

$$K_{32}(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, r_2) \rightarrow \left(\frac{\xi_2}{\zeta_2}, \eta_2, r_2 \zeta_2, \frac{1}{\zeta_2} \right), \quad \zeta_2 > 0$$

$$K_{23}(\xi_3, \eta_3, r_3, \varepsilon_3) \rightarrow \left(\frac{\xi_3}{\varepsilon_3^{1/2}}, \eta_3, \frac{1}{\varepsilon_3^{1/2}}, r_3 \varepsilon_3^{1/2} \right), \quad \varepsilon_3 > 0$$

Par suite, nous étudions le flot de (5.11) au voisinage de $(0, 0, 0, 0)$ et nous développons le temps de transition entre les sections :

$$\Sigma_3^{in} = \{(\xi_3, \eta_3, r_3, \sigma) \mid (\xi_3, r_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \eta_3 \in I\}$$

$$\Sigma_3^{out} = \{(\xi_3, \eta_3, \delta, \varepsilon_3) \mid (\xi_3, \varepsilon_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \eta_3 \in I\}$$

Proposition 21 Soit :

$$D_3 = \left\{ (\xi_3, \eta_3, r_3, \varepsilon_3) \in \mathcal{N}_3^I \mid \begin{array}{l} h_3(\eta_3, r_3, \varepsilon_3) \leq \xi_3 \leq h_3(\eta_3, r_3, \varepsilon_3) + \beta_3, \\ \eta_3 \in I, 0 \leq r_3 \leq \delta, 0 \leq \varepsilon_3 \leq \sigma \end{array} \right\}$$

Pour tout $0 < \beta_3 < \alpha$, il existe des constantes δ et σ assez petites telles que la fonction de transition $\Pi_3 : \Sigma_3^{in} \cap D_3 \rightarrow \Sigma_3^{out}$ soit bien définie par le système (5.11). Elle admet alors le développement suivant :

$$\Pi_3 \begin{pmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ r_3 \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_3 \left(\eta_3^{out}(\eta_3, \delta, \varepsilon_3), \sigma \left(\frac{r_3}{\delta} \right)^2, \delta \right) + \Psi_3(\xi_3, \eta_3, r_3) \\ \eta_3^{out}(\xi_3, \eta_3, \delta, \varepsilon_3) \\ \delta \\ \sigma \left(\frac{r_3}{\delta} \right)^2 \end{pmatrix}$$

où :

$$h_3 \left(\eta_3^{out}(\eta_3, \delta, \varepsilon_3), \sigma \left(\frac{r_3}{\delta} \right)^2, \delta \right) = O(\delta) + O \left(\sigma \left(\frac{r_3}{\delta} \right)^2 \right) = O(\sigma) + O(r_3^2)$$

$$\eta_3^{out}(\xi_3, \eta_3, \delta, \varepsilon_3) = \eta_3 + O(r_3^2) + O(\delta^2)$$

et il existe $k^{out} > 0$ dépendant de δ, σ, β tel que, pour tout $\eta_3 \in I$:

$$\Psi_3(\xi_3, \varepsilon_3) \underset{\varepsilon_3 \rightarrow 0}{=} (\xi_3 - h_3(\eta_3, \delta, \varepsilon_3)) O \left(\exp \left(\frac{k^{tc}}{\varepsilon_3} \right) \right)$$

Lemme 13 *Le changement de temps suivant :*

$$\varphi : t \rightarrow \varepsilon_3(t).t \quad (5.12)$$

est bien défini sur $[0, \infty[$ le long de chaque orbite du système non perturbé (5.4) pour laquelle $\varepsilon_3 > 0$.

Plus précisément, pour tout $\varepsilon_3^{init} > 0$, en notant $\gamma(t) = (\xi_3(t), \eta_3(t), \varepsilon_3(t))$ la paramétrisation de l'orbite de (5.4) qui passe par $(\xi_3^{init}, \eta_3^{init}, \varepsilon_3^{init})$ en $t = 0$, la fonction φ est un C^1 -difféomorphisme de $[0, \infty[$ sur $] - \infty, 0]$.

Démonstration. Soit $\varepsilon_1(t)$ la paramétrisation de la composante en ε_1 d'une orbite de (5.4). En supposant une condition initiale strictement positive sur ε_1 , la dynamique montre que $\varepsilon_1(t)$ ne s'annule jamais et reste dans $\varepsilon_1 > 0$. En outre, la paramétrisation $\varepsilon_3(t)$ est différentiable. Ainsi, en posant :

$$\tau = -\varepsilon_3(t).t$$

on obtient :

$$d\tau = - \left[\frac{d}{dt}(\varepsilon_3(t).t) + \varepsilon_3(t) \right] .dt$$

On en déduit :

$$d\tau = -(\dot{\varepsilon}_3.t + \varepsilon_3).dt = -(-2\varepsilon_3^2.t + \varepsilon_3).dt = (2\tau - 1)\varepsilon_3.dt$$

Comme $\varepsilon_3 > 0$ et $\tau \leq 0$, la fonction φ définit un C^1 -difféomorphisme de $[0, \infty[$ sur $] - \infty, 0]$. ■

Démonstration de la Proposition. Par application de (5.12) à (5.2) restreint à \mathcal{V}_3^I , on obtient après division locale :

$$\begin{cases} \xi_3 = h_3^I(\eta_3, r_3, \varepsilon_3) \\ \eta_3' = O(r_3^2) \\ r_3' = r_3 \\ \varepsilon_3' = -2\varepsilon_3 \end{cases}$$

pour la nouvelle échelle temporelle, le temps de transition de l'orbite passant par $(\xi_3^{init}, \eta_3^{init}, r_3^{init})$ entre Σ_3^{in} et Σ_3^{out} est :

$$\varsigma = -\ln \frac{\delta}{r_3^{init}} < 0$$

Ainsi, en intégrant la dynamique :

$$\eta_3' = O(r_3^2) = (r_3^{init})^2 e^{-2\tau} O(1)$$

on a :

$$\eta_3^{out}(\varsigma) = \eta_3^{init} + (r_3^{init})^2 \left(1 - \left(\frac{\delta}{r_3^{init}} \right)^2 \right) O(1) = \eta_3^{init} + O\left((r_3^{init})^2\right) + O(\delta^2)$$

On déduit directement les autres composantes par intégration comme dans le cas du système plan. ■

5.3.4 Développement asymptotique de la fonction de transition

Afin de connaître le comportement des orbites passant dans un voisinage d'une courbe de bifurcation transcritique selon les valeurs de ε , nous donnons une caractérisation asymptotique de la fonction de transition selon ε . Nous nous appuyons sur l'analyse effectuée dans la sous-section précédente afin de démontrer :

Théorème 5.2 *Il existe $\delta > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\kappa > 0$ et \hat{I} un intervalle inclus dans I tels que pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, et en posant :*

$$\Sigma_{\hat{I}}^{-\delta} = \{(x, -\delta, \bar{\varepsilon}) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq \kappa, y \in \hat{I}, 0 \leq \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_0\}$$

la fonction de transition $\Pi : \Sigma_{\hat{I}}^{-\delta} \mapsto \Sigma^{\delta}$ induite par le flot de $(\mathcal{TC}_{\varepsilon}^{loc})$ soit bien définie. Elle admet alors le développement suivant :

$$\Pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^{out}(x, y^{out}(x, y, \varepsilon), \varepsilon) \\ y^{out}(x, y, \varepsilon) \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

où :

$$\begin{aligned} x^{out}(x, y^{out}(x, y, \varepsilon), \varepsilon) &= \lambda_0(x, y_0^{out}(y)) + xO(\varepsilon) \\ y^{out}(x, y, \varepsilon) &= y_0^{out}(y) + O(\varepsilon) \\ y_0^{out}(y) &= y + O(\delta^2) \end{aligned}$$

avec $\lambda_0(x, y_0^{out}(y)) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$ pour tout $y \in \hat{I}$ et λ_0 est indépendante de ε .

Démonstration. D'après les études dans les cartes K_1 , K_2 et K_3 de la section précédente, nous savons que l'application de transition induite par le champ éclaté est bien définie de $\Sigma_1^{in} \cap D_1$ dans Σ_3^{out} en choisissant des constantes β_1 , δ et σ strictement positives assez petites. L'image par Φ_1 de $\Sigma_1^{in} \cap D_1^{\hat{I}}$ est incluse dans :

$$\Sigma_{\hat{I}}^{-\delta} = \left\{ (x, y, -\delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < \kappa, y \in \hat{I} \right\}$$

On développe la fonction de transition $\Pi : \Sigma_I^{-\delta} \rightarrow \Sigma_I^\delta$ pour le flot induit par $(\mathcal{TC}_\varepsilon^{loc})$ en utilisant la transition induite par le champ élargi :

$$\Pi = \Phi_3^{-1} \circ \Pi_3 \circ K_{32} \circ \Pi_2 \circ K_{21} \circ \Pi_1 \circ \Phi_1$$

Le calcul est semblable à celui de la démonstration du théorème 4.1 qui, en particulier, montre :

$$\langle K_{32} \circ \Pi_2 \circ K_{21} \circ \Pi_1 \circ \Phi_1(x, y, -\delta, \varepsilon), r_3 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma}}$$

Or :

$$\eta_3^{out}(\eta_3, \delta, \varepsilon_3) = \eta_3 + O(r_3^2) + O(\delta^2)$$

Ainsi, en choisissant \hat{I} assez petit, l'application de transition est bien définie de $\Sigma_{\hat{I}}^{-\delta}$ dans $\Sigma_{\hat{I}}^\delta$. Enfin, l'application de Φ_3 donne la composante en y de $\Pi(x, y, -\delta, \varepsilon)$. ■

5.3.5 Transition transcritique d'un système global

Dans cette sous-section, nous rapprochons de la forme normale étudiée précédemment une classe de systèmes lents-rapides de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ à une variable rapide et deux variables lentes, pour lesquels apparaît une bifurcation transcritique de la dynamique rapide dans chaque plan $y = y_0 \in I$ où I est un intervalle borné de \mathbb{R} . Il s'agit de la première généralisation à la dimension 3 de la transition au voisinage d'un point de bifurcation transcritique. Nous posons dans un premier temps les hypothèses nécessaires sur le système :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, z) \\ \dot{z} = \varepsilon h(x, y, z) \end{cases}$$

pour qu'il exhibe ce type de transition. Nous utilisons alors les résultats du chapitre précédent afin de donner le développement de la fonction de transition au voisinage de la ligne de points singuliers non hyperboliques de la dynamique rapide.

$\mathbf{H}_1^{\mathcal{T}}$: L'ensemble critique de (P_ε) est l'union de deux variétés S_1 et S_2 de dimension 2 d'intersection non vide. On suppose qu'il existe un compact K tel que l'intersection de $S_1 \cap K$ et $S_2 \cap K$ est transverse et définit une variété avec bord \mathcal{T} connexe de dimension 1 plongée dans \mathbb{R}^3 donnée par un graphe $\{(x_{\mathcal{T}}(y), y, z_{\mathcal{T}}(y)) \mid y \in I\}$ où I est un intervalle de \mathbb{R} .

$\mathbf{H}_2^{\mathcal{T}}$: \mathcal{T} sépare S_1 et S_2 en deux parties respectivement :

$$\begin{aligned} S_1 \cap K &= S_1^- \cup \mathcal{T} \cup S_1^+ \\ S_2 \cap K &= S_2^+ \cup \mathcal{T} \cup S_2^- \end{aligned}$$

On suppose S_1^- et S_2^- sont formés de points attractifs pour la dynamique rapide et S_1^+ , S_2^+ de points répulsifs (voir fig. 5.5). Les points de \mathcal{T} sont alors des points de

bifurcation transcritique de la dynamique rapide, quand z évolue. Nous les supposons non dégénérés, i.e. :

$$\forall (x, y, z) \in \mathcal{T}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \neq 0$$

En outre, on suppose que le flot du système critique (S_0), restreint à la variété S_1 , est transverse à \mathcal{T} et dirigé de S_1^- vers S_1^+ .

Nous remarquerons que sous ces hypothèses, S_1 et S_2 sont, localement dans un compact K autour de \mathcal{T} , donnés par des graphes au-dessus de (y, z) . Nous envisageons donc le système localement dans le compact K . D'après le théorème de Fénichel, en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de \mathcal{T} , les variétés S_1^- , S_1^+ , S_2^- et S_2^+ persistent sous la forme de variétés invariantes $S_{1,\varepsilon}^-$, $S_{1,\varepsilon}^+$, $S_{2,\varepsilon}^-$ et $S_{2,\varepsilon}^+$ pour ε assez petit.

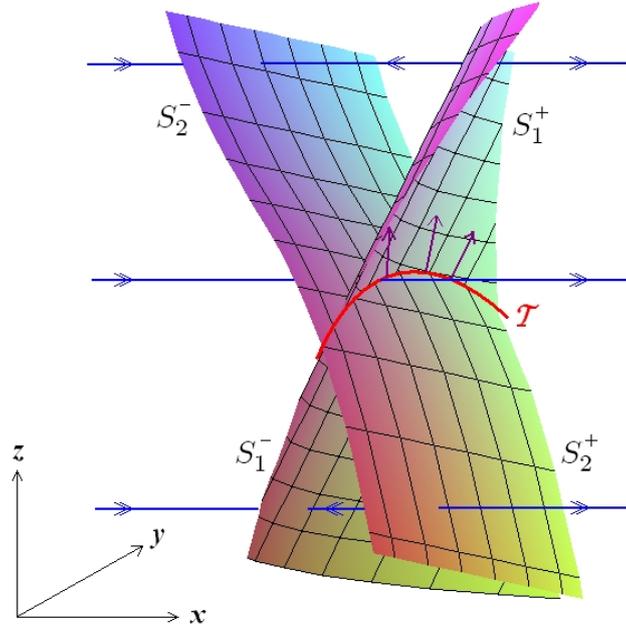


FIG. 5.5 – Ensemble critique du système (P_ε) constitué de deux variétés S_1 et S_2 , d'intersection \mathcal{T} , graphe au-dessus de y ($\mathbf{H}_1^\mathcal{T}$). \mathcal{T} sépare S_1 (resp. S_2) en une variété S_1^- (resp. S_2^-) de points attractifs de la dynamique rapide, et une variété S_1^+ (resp. S_2^+) de points répulsifs ($\mathbf{H}_2^\mathcal{T}$). Le flot du système critique est transverse à \mathcal{T} (en violet) ($\mathbf{H}_3^\mathcal{T}$). Les trajectoires de la dynamique rapide sont représentées en bleu.

$\mathbf{H}_3^\mathcal{T}$: Pour ε assez petit, les prolongements par le flot de (P_ε) de $S_{1,\varepsilon}^-$ et $S_{1,\varepsilon}^+$ coïncident. Ceci équivaut à supposer que la variété S_1 entière persiste en une variété $S_{1,\varepsilon}$ invariante sous le flot de (P_ε) et qui sépare l'espace des phases en deux parties invariantes. Nous limitons alors l'espace des phases à celle qui contient $S_{2,\varepsilon}^+$.

Ces hypothèses permettent d'exclure certaines dégénérescence du système pour lesquelles (P_ε) ne peut être conjugué localement à la forme canonique de la section précédente. En particulier, l'hypothèse \mathbf{H}_1^T donnant S_1 et S_2 comme graphe au-dessus de (y, z) permet d'éviter que les dynamiques sur x et z ne subisse une bifurcation de type fonce quand le paramètre y varie. L'hypothèse \mathbf{H}_2^T implique que le flot du système (P_ε) , $\varepsilon > 0$, ne suit pas la variété perturbée $S_{1,\varepsilon}^-$ au voisinage de la ligne de points non hyperboliques \mathcal{T} . Enfin, à l'instar du cas plan, l'hypothèse \mathbf{H}_3^T est nécessaire afin de contrôler l'instabilité structurelle de la bifurcation transcritique. Remarquons que la variété S_ε ne peut en aucun cas être normalement hyperbolique. Il existe donc une courbe \mathcal{T}_ε dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de \mathcal{T} qui sépare le prolongement S_ε en deux sous-variétés normalement hyperboliques.

Proposition 22 *Sous les hypothèses \mathbf{H}_1^T , \mathbf{H}_2^T , \mathbf{H}_3^T il existe un changement de variables \mathcal{C}^∞ qui conjugue localement autour de \mathcal{T} le système (P_ε) , $\varepsilon > 0$, à :*

$$\left(\mathcal{T}C_\varepsilon^{loc}\right) : \begin{cases} \dot{x} = x^2 + \alpha xz + O(x^3, xz^2, x^2z, xyz^2, x\varepsilon) \\ \dot{y} = \varepsilon O(x, z, \varepsilon) \\ \dot{z} = \varepsilon(1 + O(x, z, \varepsilon)) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

Démonstration. D'après les hypothèses \mathbf{H}_2^T et \mathbf{H}_3^T , nous pouvons choisir un nouveau système de coordonnées locales pour lequel la variété $S_{1,\varepsilon}$ a pour équation $\hat{x} = 0$ et \mathcal{T}_ε est la partie de l'axe des \hat{y} restreinte à un intervalle I . Nous utilisons le développement de Taylor de \hat{f} selon (\hat{x}, \hat{z}) en tout point $\hat{y}_0 \in I$. D'après l'hypothèse \mathbf{H}_3^T , seuls des termes contenant x apparaissent dans ce développement. Ainsi, en renormant la coordonnée \hat{x} , (S_ε) devient localement dans ce nouveau système de coordonnées :

$$\begin{cases} \hat{x}' = \hat{x}^2 + \alpha \hat{x} \hat{z} + O(\hat{x}^3, \hat{x} \hat{z}^2, \hat{x}^2 \hat{z}, \hat{x} \hat{y} \hat{z}^2, x\varepsilon) \\ \hat{y}' = \varepsilon \hat{g}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \varepsilon) \\ \hat{z}' = \varepsilon \hat{h}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \varepsilon) \end{cases}$$

On a alors, pour tout $\hat{y} \in I$, $\hat{g}_2(0, \hat{y}, 0, 0) = 0$. Le choix de l'orientation de y et de z permet alors de supposer $\alpha > 0$. Dans ce cas, nous obtenons, d'après l'hypothèse \mathbf{H}_2^T , $\hat{h} > 0$ dans un voisinage de \mathcal{T}_ε qui reste dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de \mathcal{T} . Ainsi, on peut poser $\hat{h}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \varepsilon) = \hat{h}_1(\hat{y}) + \hat{h}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \varepsilon)$ où $\hat{h}_1 > 0$. On utilise enfin le changement de coordonnées :

$$\begin{cases} \hat{x} = x \sqrt{\hat{h}_1(\hat{y})} \\ \hat{y} = y \sqrt{\hat{h}_1(\hat{y})} \\ \hat{z} = z \end{cases}$$

pour obtenir :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{\hat{h}_1} [x^2 + \alpha xz + O(x^3, xz^2, x^2z, xyz^2, x\varepsilon)] \\ y' = \varepsilon \sqrt{\hat{h}_1} \hat{g}(x, y, z, \varepsilon) \\ z' = \varepsilon \sqrt{\hat{h}_1} \hat{h}(x, y, z, \varepsilon) \end{cases}$$

Finalement, on conjugue ce système à $(\mathcal{T}C_\varepsilon^{loc})$ par le changement de variable temporelle :

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{\hat{g}_1}}$$

bien défini dans un voisinage de \mathcal{T} sur lequel $\hat{h}_1 > 0$ et en posant une dynamique nulle sur le paramètre ε ■

5.4 Système de relaxation transcritique-pli dans l'espace

Nous nous intéressons aux systèmes :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = \varepsilon g(x, y, z) \\ \dot{z} = \varepsilon h(x, y, z) \end{cases}$$

$f, g \in C^3(\mathbb{R}^3)$

susceptibles de présenter des oscillations de relaxation présentant une transition de type pli d'un côté et de type col-noeud transcritique de l'autre. Nous appliquons les résultats précédents à une classe de systèmes lents-rapides tridimensionnels à une variable rapide présentant un comportement d'hystérèse.

5.4.1 Description de la classe de systèmes

Nous posons les hypothèses suivantes sur (P_ε) :

$\mathbf{H}_3^{\mathcal{T}, \mathcal{P}}$: L'ensemble critique est l'union de deux variétés S_1 et S_2 dont l'intersection est une courbe \mathcal{T} pour laquelle (P_ε) vérifie $\mathbf{H}_1^{\mathcal{T}}$, $\mathbf{H}_2^{\mathcal{T}}$ et $\mathbf{H}_3^{\mathcal{T}}$. S_2 est en forme de \cup (voir fig. 5.6) telle que :

$$S_2 = S_2^- \cup \mathcal{T} \cup S_2^+ \cup \mathcal{P} \cup S_3^-$$

et (P_ε) vérifie les hypothèses $\mathbf{H}_1^{\mathcal{P}}$ et $\mathbf{H}_2^{\mathcal{P}}$.

Nous sommes amenés, afin de définir convenablement le graphique de (P_0) adapté à (P_ε) donnant naissance par perturbation à une orbite périodique de (P_ε) , d'analyser la fonction de sortie du flot après passage au voisinage de la courbe de bifurcation transcritique. Sous l'hypothèse $\mathbf{H}_3^{\mathcal{T}, \mathcal{P}}$, nous définissons \mathcal{Q} la projection de \mathcal{P} sur la variété S_1^- le long des trajectoires rapides. Nous considérons alors le changement de

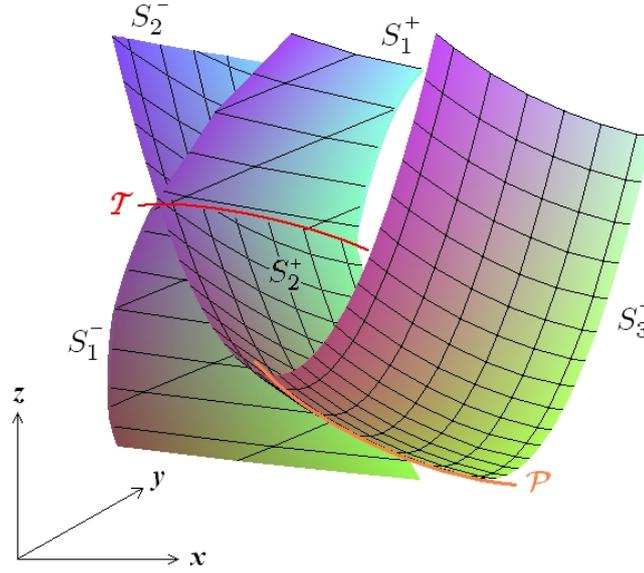


FIG. 5.6 – Ensemble critique du système (P_ε) constitué de deux variétés d'intersection \mathcal{T} et sa décomposition selon la nature des points singuliers de la dynamique rapide. La courbe de transition transcritique \mathcal{T} et la courbe \mathcal{P} de bifurcation pli sont des graphes au-dessus de y .

coordonnées locales autour de \mathcal{T} défini dans la proposition 22 (voir 5.3.5) et conjuguant localement le système (P_ε) à la forme canonique transcritique. En nommant $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ le nouveau système de coordonnées, il existe un intervalle J , tel que \mathcal{Q} est un graphe au-dessus de la nouvelle coordonnée \hat{y} sur cet intervalle, soit :

$$\mathcal{Q} : (\hat{x}, \hat{z}) = q(\hat{y}) = (q_x(\hat{y}), q_z(\hat{y})), \quad \hat{y} \in J$$

A présent, pour $\hat{y}_0 \in J$, soit la section :

$$\Sigma_{\hat{y}_0}^{out} = \{(\hat{x}, \hat{y}, -q_z(\hat{y}_0)) \in \mathbb{R}^2 \mid \hat{x} \geq 0, \hat{y} \in J\}$$

On appelle $\Theta(\hat{y}_0)$ le point d'intersection de l'orbite de (S_0^{loc}) définie sur S_1 partant du point $(q_x(\hat{y}_0), \hat{y}_0, q_z(\hat{y}_0)) \in \mathcal{Q}$ avec $\Sigma_{\hat{y}_0}^{out}$. Il est bien défini d'après les hypothèses \mathbf{H}_1^T et \mathbf{H}_2^T et le théorème 5.2. On définit alors :

$$\mathcal{Q}' = \{\Theta(\hat{y}_0) \mid \hat{y}_0 \in J\}$$

la courbe incluse dans S_1^+ . Nous posons alors l'hypothèse supplémentaire :

$\mathbf{H}_4^{\mathcal{T}, \mathcal{P}}$: Il existe un graphique Γ de (P_0) adapté à (P_ε) de la forme :

$$\Gamma = [P, A] \cup \gamma_{A-B} \cup [B, Q] \cup \gamma_{Q-P}$$

où $P \in \mathcal{P}$, $A = q(\hat{y}_A) \in \mathcal{Q}$ la projection de P sur S_1^- selon la trajectoire de la dynamique rapide, $B = \Theta(\hat{y}_A) \in \mathcal{Q}'$, Q la projection de B sur S_3^- le long de la trajectoire rapide et γ_{A-B} (resp. γ_{Q-P}) la trajectoire de (S_0) définie sur S_1 (resp. S_3) reliant A et B (resp. Q et P).

5.4.2 Application de Poincaré

Nous pouvons alors définir une application de premier retour π_0 induite par (S_0) sur un voisinage de A dans \mathcal{Q} de la manière suivante. Puisque Γ est un graphique adapté à (P_ε) , pour un point ϱ de \mathcal{Q} proche de $\Gamma \cap \mathcal{Q}$, nous pouvons définir le point d'intersection q de l'orbite de (S_0) passant par ϱ avec \mathcal{Q}' . Soit q' la projection de q sur S_3^- le long de la dynamique rapide puis p le point d'intersection de l'orbite de (S_0) passant par q' avec \mathcal{P} . Enfin, soit $\pi_0(\varrho)$ la projection de p sur S_1^- qui appartient à \mathcal{Q} . Cette application de retour du système hybride est alors bien définie sur un voisinage de $\Gamma \cap \mathcal{Q}$ dans \mathcal{Q} . On pourra trouver dans [39], une étude plus détaillée de ce type de fonction de retour (« Singularly perturbed map ») montrant alors l'existence d'une variété invariante munie d'un feuilletage invariant associé. La définition de cette application nous permet de donner le résultat suivant sur la fonction globale de premier retour :

Théorème 5.3 *On suppose que (P_ε) vérifie $\mathbf{H}_3^{\mathcal{T}, \mathcal{P}}$ et $\mathbf{H}_4^{\mathcal{T}, \mathcal{P}}$. Soit Σ_A une section transverse au flot proche de S_1^- contenant un point de Γ . Il existe un voisinage ouvert V de ce point dans $\Sigma_{\mathcal{P}}$ tel que, pour ε assez petit, l'application Π de premier retour de (P_ε) soit bien définie de $V \subset \Sigma_A$ dans Σ_A . Il existe alors un système de coordonnées locales sur $\Sigma_{\mathcal{P}}$ pour lequel :*

$$\Pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi^x(x, y, \varepsilon) \\ \Pi^y(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

où $\Pi^x(x, y, \varepsilon)$ est exponentiellement contractante et $\Pi^y(x, y, \varepsilon) = \pi_0(y) + O(\varepsilon \ln \varepsilon)$ avec π_0 l'application de premier retour induite par le système hybride (S_0) .

Démonstration. Nous utilisons une décomposition de l'application de Poincaré afin de montrer qu'elle est bien définie et de donner son développement.

Nous considérons le difféomorphisme $\Psi_{\mathcal{T}}$ (resp. $\Psi_{\mathcal{P}}$) transformant localement (P_ε) en la forme canonique $(\mathcal{TC}_\varepsilon^{loc})$ au voisinage de \mathcal{T} (resp. $(\mathcal{P}li_\varepsilon^{loc})$ au voisinage de \mathcal{P}) définie dans la proposition 22 dans 5.3.5 (resp. proposition 5 dans 3.2.2). D'après le théorème 5.2, l'application de transition induite par (P_ε) est bien définie, pour ε assez petit, entre des sections $\Sigma_{\mathcal{T}}^{in}$ et $\Sigma_{\mathcal{T}}^{out}$ et nous en connaissons le développement. Il existe alors une section $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{in}$ (resp. $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{out}$) qui est la pré-image par $\Psi_{\mathcal{T}}$ de $\Sigma_{\mathcal{T}}^{in}$ (resp. $\Sigma_{\mathcal{T}}^{out}$).

D'un autre côté, d'après le théorème 3.2, l'application de transition de $(\mathcal{P}li_\varepsilon^{loc})$ est bien définie, pour ε assez petit, entre une section $\Sigma_{\mathcal{P}}^{in}$, proche de \mathcal{P} et transverse à S_3^- , et une section $\Sigma_{\mathcal{P}}^{out}$, proche de \mathcal{P} transverse au flot de la dynamique rapide. Il existe alors une section $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{in}$ (resp. $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{out}$) qui est la pré-image par $\Psi_{\mathcal{P}}$ de la section $\Sigma_{\mathcal{P}}^{in}$ (resp. $\Sigma_{\mathcal{P}}^{out}$). Remarquons que $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{Q}}^{in}$, $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{Q}}^{out}$, $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{in}$ (resp. $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{out}$) ne sont pas nécessairement planes, mais restent des graphes au-dessus de (x, y) (resp. (y, z)).

Soit Σ_B une section transverse au flot rapide proche de S_1^- et de S_1^+ respectivement et ayant des points d'intersection avec Γ . D'après le théorème de Fénichel, l'application de transition $\Pi_{S_3^-}$ induite par le flot entre Σ_A et $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{in}$ est bien définie. Nous choisissons un système de coordonnées locales dans $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{in}$ pour lequel $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{in} \cap S_{1,\varepsilon}^-$ est l'axe $y = 0$. Alors :

$$\Pi_{S_1^-} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{S_1^-}^x(y, z, \varepsilon) \\ \Pi_{S_1^-}^y(y, z, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Pi_{S_1^-}^x(y, z, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{k_{\mathcal{T}}}{\varepsilon}z\right)\right) \\ \Pi_{S_1^-}^y(y, z, \varepsilon) &= \Pi_{S_{1,0}^-}^y(y) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

où l'application de transition $\Pi_{S_{3,0}^-}^x(x)$ induite par le flot de (S_0) entre \mathcal{Q} et $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{in}$ est bien définie d'après l'hypothèse $\mathbf{H}_4^{\mathcal{T},\mathcal{P}}$ et $k_{\mathcal{T}} > 0$. Cette application admet pour image un voisinage exponentiellement petit par rapport à ε de $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{Q}}^{in} \cap S_{1,\varepsilon}^-$. En outre, pour ε assez petit, $\Sigma_A \cap S_{1,\varepsilon}^- = \emptyset$ donc l'image de $\Pi_{S_1^-}(\Sigma_A) \cap S_{1,\varepsilon}^- = \emptyset$. Pour ε assez petit, d'après le théorème 5.2, l'application de transition $\Pi_{\mathcal{T}}$ induite par (P_ε) est bien définie entre l'image de Σ_A par $\Pi_{S_1^-}$ et $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{out}$ pour ε assez petit. Nous choisissons un système de coordonnées dans $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{out}$ pour lequel $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{out} \cap S_{1,\varepsilon}^+$ est l'axe $y = 0$. Alors :

$$\Pi_{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0(x, y_0^{out}(y)) + xO(\varepsilon) \\ y_0^{out}(y) + O(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{T}}^x(x, y, \varepsilon) &= \lambda_0(x, y_0^{out}(y)) + xO(\varepsilon) \\ \Pi_{\mathcal{Q}}^y(x, y, \varepsilon) &= y_0^{out}(x, y, \varepsilon) = y_0^{out}(y) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

$y_0^{out}(y)$ est induite par le flot de (S_0) sur S_1 entre $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{in} \cap S_{1,\varepsilon}^-$ et $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{out} \cap S_{1,\varepsilon}^-$. Remarquons que, d'après l'hypothèse $\mathbf{H}_3^{\mathcal{T}}$, puisque $\Sigma_A \cap S_{1,\varepsilon}^+ = \emptyset$, l'image de Σ_A par $\Pi_{\mathcal{Q}} \circ \Pi_{S_1^-}$ ne contient pas de point de $S_{1,\varepsilon}^+$ variété invariante sous le flot de (P_ε) .

L'application de transition $\Pi_{S_1^+}$ induite par le flot entre $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{T}}^{out} \setminus S_1^\varepsilon$ et Σ_B est donc bien définie. Soit \mathcal{Q}'' la projection de \mathcal{Q}' sur Σ_B le long des trajectoires rapides de

(P_ε) . \mathcal{Q}'' est un graphe au-dessus de y . Nous choisissons un système de coordonnées locales dans Σ_B pour lequel \mathcal{Q}'' coïncide l'axe $y = 0$. Alors :

$$\Pi_{S_1^+} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{S_1^+}^y(x, y, \varepsilon) \\ \Pi_{S_1^+}^z(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Pi_{S_1^+}^y(x, y, \varepsilon) &= \Pi_{S_1^+,0}^y(y) + O(\varepsilon) \\ \Pi_{S_1^+}^z(x, y, \varepsilon) &= O(\varepsilon \ln x) \end{aligned}$$

où l'application de transition $\Pi_{S_1^+,0}^y(x)$ induite par le flot de (S_0) entre $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{Q}}^{out}$ et \mathcal{Q} est bien définie d'après l'hypothèse $\mathbf{H}_4^{\mathcal{T},\mathcal{P}}$. Ces développements nous permettent alors de connaître l'image de Σ_A par la fonction de transition $\Pi_{S_1^+} \circ \Pi_{\mathcal{T}} \circ \Pi_{S_1^-}$. En particulier, nous savons que l'image d'un voisinage de la projection de A sur Σ_A le long de la variable rapide est un voisinage de \mathcal{Q}'' de l'ordre de V à $O(\varepsilon)$ près. Nous pouvons donc choisir l'image V'_ε de V par $\Pi_{S_1^+} \circ \Pi_{\mathcal{T}} \circ \Pi_{S_1^-}$ aussi petite qu'on veut en prenant V et ε assez petit.

Choisissons à présent Σ_Q une section transverse à S_3^- parallèle aux fibres rapides contenant un point de Γ . Nous choisissons V telle que l'application de transition induite par (P_ε) entre $\Pi_{S_1^+} \circ \Pi_{\mathcal{T}} \circ \Pi_{S_1^-}(V)$ et Σ_Q soit bien définie. Définissons dans Σ_Q un système de coordonnées locales tel que $S_{3,\varepsilon}^-$ coïncide avec $x = 0$. D'après le théorème de Fénichel, le développement de cette fonction provient de l'attractivité de $S_{3,\varepsilon}^-$:

$$\Pi_{B-S_3^-} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O\left(\exp\left(-\frac{k_{S_3} z}{\varepsilon}\right)\right) \\ y + O(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

avec $k_{S_3} > 0$.

La variété S_3^- étant un graphe au-dessus de (y, z) , il en est de même pour la variété invariante perturbée $S_{3,\varepsilon}^-$ pour ε assez petit. Donc, nous pouvons choisir un nouveau système de coordonnées locales dans $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{in}$ tel que $S_{3,\varepsilon}^-$ corresponde à l'axe des y . Alors, d'après le théorème de Fénichel, l'application de transition $\Pi_{S_3^-}$ induite par le flot entre V et $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{in}$ s'écrit :

$$\Pi_{S_3^-} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{S_3^-}^x(x, y, \varepsilon) \\ \Pi_{S_3^-}^y(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Pi_{S_3^-}^x(x, y, \varepsilon) &= O\left(\exp\left(-\frac{k_{\mathcal{P}} z}{\varepsilon}\right)\right) \\ \Pi_{S_3^-}^y(x, y, \varepsilon) &= \Pi_{S_3^-,0}^y(y) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

où $\Pi_{S_3^-,0}^x(x)$ est induite par le flot de (S_0) entre $\Sigma_{\mathcal{P}}$ et $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{in}$ et $k_{\mathcal{P}} > 0$. Comme dans les cas précédents, la contraction de cette application permet de majorer les expansions dues aux autres fonctions de transition.

D'après le théorème 3.2, l'intersection de la variété lente $S_{3,\varepsilon}^-$ avec $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{out}$ est un graphe $\hat{x}^{out} = \hat{h}_a^{out}(\hat{y}^{out}, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2/3})$. Nous choisissons de nouvelles coordonnées dans $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{out}$ pour lesquelles la variété lente est l'axe des y . D'après le théorème 3.2, le flot induit une application de transition bien définie entre $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{in}$ et $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{out}$:

$$\Pi_{\mathcal{P}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{\mathcal{P}}^y(x, y, \varepsilon) \\ \Pi_{\mathcal{P}}^z(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

où :

$$\Pi_{\mathcal{P}}^y(x, y, \varepsilon) = \Pi_{\mathcal{P},0}^y(y) + O(\varepsilon \ln \varepsilon)$$

et $\Pi_{\mathcal{P},0}^y(y)$ est induite par le flot de (S_0) entre $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{in}$ et \mathcal{P} .

Enfin, la fonction de transition Π_R entre $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{out}$ et Σ_A est bien définie et nous en déduisons le développement par perturbation régulière de la dynamique rapide.

Finalement, par composition des applications de transition intermédiaires, nous pouvons choisir V assez petit tel que, pour ε assez petit, l'application de retour de V dans Σ_A soit bien définie. En outre, la composante en z de cette application est exponentiellement contractante – de l'ordre de $O\left(\exp\left(-\frac{k_{\mathcal{P}}}{\varepsilon} z\right)\right)$. ■

Remarque 5.3 *Outre la contraction exponentielle de la composante z , cette analyse nous permet de contrôler la variation de la composante y dans l'application de premier retour.*

5.4.3 Existence et unicité de l'orbite périodique attractive

Nous posons l'hypothèse supplémentaire suivante :

$\mathbf{H}_5^{\mathcal{T},\mathcal{P}}$: Posons p_{Γ} le point d'intersection de Γ avec Σ_A . Nous supposons que :

$$\frac{d\pi_0}{dy}(p_{\Gamma}) \neq 1$$

où π_0 est l'application de premier retour induite par (S_0) sur Σ et dont p_{Γ} est un point fixe.

Nous pouvons à présent démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.4 *Sous les hypothèses $\mathbf{H}_4^{\mathcal{T},\mathcal{P}}$ à $\mathbf{H}_5^{\mathcal{T},\mathcal{P}}$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, (P_{ε}) admet localement au voisinage de Γ une unique orbite périodique hyperbolique Γ_{ε} . Le graphique Γ est l'ensemble limite-périodique de la famille $(\Gamma_{\varepsilon})_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]}$.*

Démonstration. Il existe un voisinage compact $K \subset V$ de p_Γ tel que l'application de retour π_0 restreinte à K induite par le système hybride admette une variété attractive \mathcal{W}_ε localement invariante et un feuilletage invariant stable (voir [39]). Le théorème 5.3 montre alors que la restriction de Π à cette variété est bien définie d'un intervalle $I_K \subset I$ dans I et admet le développement :

$$\Pi|_{\mathcal{W}_\varepsilon}(y) = \pi_0(y) + O(\varepsilon)$$

En outre, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, l'application induite par Π est une contraction exponentielle uniformément le long des fibres du feuilletage. Nous pouvons donc réduire l'analyse de Π à celle de sa restriction π_ε à \mathcal{W}_ε qui est alors une perturbation en $O(\varepsilon \ln \varepsilon)$ de π_0 . Le point fixe p_Γ étant un point fixe hyperbolique de π_0 , il persiste sous la perturbation en un point fixe hyperbolique p_Γ^ε de π_ε , localement unique près de p_Γ . Il existe donc, localement, une unique orbite périodique hyperbolique de (P_ε) pour ε assez petit.

Enfin, cette famille d'orbites périodiques $(\Gamma_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]}$ définit, à la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$, des trajectoires rapides entre $\tilde{\Sigma}_{\mathcal{P}}^{out}$ et Σ_A d'une part et entre Σ_B et toute section arbitrairement proche de Q transverse aux fibres rapides et contenant un point de Γ . Or, puisque l'orbite Γ_ε passe dans un $O(\varepsilon^{2/3})$ -voisinage de P et des voisinages exponentiellement petits de A , de B et de Q respectivement, ces trajectoires rapides sont $[P, A]$ et $[B, Q]$. La convergence et la limite des parties lentes se déduisent de l'attractivité de $S_{1,\varepsilon}^-$ et de $S_{3,\varepsilon}^-$ restant dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de S_1^- et de S_3^- respectivement. Finalement, il existe une famille $(U_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]}$ de $O(\varepsilon^{2/3})$ -voisinages de Γ pour la topologie de Hausdorff, telle que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $\gamma_\varepsilon \subset U_\varepsilon$. Ainsi, (Γ_ε) converge vers l'ensemble limite-périodique Γ qui est un graphique de (P_0) adapté à (P_ε) . ■

Remarque 5.4 *L'orbite est attractive si :*

$$\left| \frac{d\pi_0}{dy}(p) \right| < 1$$

et de type col si :

$$\left| \frac{d\pi_0}{dy}(p) \right| > 1$$

Chapitre 6

Oscillations en salves

Dans ce chapitre, nous nous attachons à décrire le phénomène d’“oscillations en salves”. Il s’agit d’un comportement spécifique à certains systèmes lents-rapides en présence d’au moins deux variables rapides, donc dans un espace de phases de dimension supérieure à 3. Nous introduisons ce phénomène en utilisant les résultats précédemment démontrés sur les systèmes de relaxation. Nous décrivons ensuite le principe de “bistabilité” sur les systèmes tridimensionnels à 2 variables rapides en prenant pour exemple un modèle physiologique. Enfin, pour pouvoir étudier le comportement des orbites de tels systèmes au voisinage d’une variété invariante formée de cycles limites rapides, nous généralisons la notion de phase asymptotique.

6.1 De la relaxation aux oscillations en salves

Nous considérons le couplage de deux systèmes de Van der Pol. Si ce système est à 4 variables, il montre plus clairement l’apparition des oscillations en salves puisque, du point de vue lent-rapide, nous pouvons séparer les mouvements oscillatoires de deux sous-systèmes. L’idée de créer des oscillations en salves de ce type apparaît également dans [15].

Il ne s’agit pas ici de donner une étude complète du système pour lequel nous devrions alors considérer d’autres paramètres et d’autres fonctions (voir en particulier la discussion dans Conclusion et Perspectives). Nous nous limitons ici à décrire l’apparition d’oscillations en salves à partir de systèmes de relaxation.

6.1.1 Couplage de deux systèmes de Van der Pol

Nous construisons ce système grâce à deux oscillateurs de Van der Pol couplés :

$$(VdP_{\varepsilon,\delta}) \begin{cases} \dot{x} = -y + f(x) \\ \dot{y} = \varepsilon(x + 1 + z) \\ \dot{z} = \varepsilon(-u + f(z)) \\ \dot{u} = \varepsilon\delta(z + 1) \end{cases} \quad (6.1)$$

où :

$$f : x \rightarrow -x^3 + 4x, \quad 0 < \varepsilon, \delta \ll 1$$

Un cas particulier de ce système a été étudié dans [10].

Remarquons, préalablement, que nous avons choisi la même échelle de temps pour la dynamique lente du premier système de Van der Pol et pour la dynamique rapide du second – le même ε devant \dot{y} et \dot{z} . Ainsi est-on en présence d'un système à 3 échelles de temps ; nous nommerons “dynamique rapide” la dynamique sur x , “dynamiques intermédiaires” sur y et z et “dynamique lente” sur u . Afin d'étudier ce système, comme δ est considéré petit, nous sommes amenés à geler la dynamique lente pour étudier les points singuliers et les ensembles invariants de :

$$(VdP_{\varepsilon}^u) : \begin{cases} \dot{x} = -y + f(x) \\ \dot{y} = \varepsilon(x + 1 + z) \\ \dot{z} = \varepsilon(-u + f(z)) \end{cases}$$

en fonction du paramètre u . La variété critique de ce système est alors la nappe d'équation $y = f(x)$.

Le lieu des points singuliers de (VdP_{ε}^u) quand u varie est alors la courbe de \mathbb{R}^3 incluse dans cette nappe :

$$C = \{(-1 - z, f(-1 - z), z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Pour une même valeur de u , on trouve 1, 2 ou 3 points singuliers pour (VdP_{ε}^u) . La courbe C est donc la variété critique de $(VdP_{\varepsilon,\delta})$. Posons :

$$\begin{aligned} C_- &= \left\{(-1 - z, f(-1 - z), z) \mid z < -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right\} \\ C_0 &= \left\{(-1 - z, f(-1 - z), z) \mid -\frac{2}{3}\sqrt{3} < z < \frac{2}{3}\sqrt{3}\right\} \\ C_+ &= \left\{(-1 - z, f(-1 - z), z) \mid \frac{2}{3}\sqrt{3} < z\right\} \end{aligned}$$

6.1.2 Etude des points singuliers et bifurcations

Nous décrivons les points singuliers du système (VdP_ε^u) et les bifurcations qu'ils subissent pour u décroissant. L'évolution du portrait de phase au travers de ces bifurcations selon les valeurs de u dans la figure 6.1.

Pour $u > \frac{16}{9}\sqrt{3}$, (VdP_ε^u) admet un unique point singulier attractif $M_-(u)$ qui appartient à C_- . Pour $u = \frac{16}{9}\sqrt{3}$, apparaît un autre point singulier non hyperbolique par bifurcation col-noeud :

$$(x_{CN}, y_{CN}, z_{CN}) = \left(-1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}, 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3} \right) \in C$$

Ainsi, pour $-\frac{16}{9}\sqrt{3} < u < \frac{16}{9}\sqrt{3}$, $f(z) = u$ admet 3 solutions que nous nommerons $z_-(u) < z_0(u) < z_+(u)$. Les deux plans d'équation $z = z_-(u)$ et $z = z_+(u)$ sont invariants et stables sous le flot de (VdP_ε^u) alors que le plan $z = z_0(u)$ est invariant instable. Dans chacun de ces plans il existe un point singulier : $M_-(u)$, $M_+(u)$ et $M_0(u)$.

Pour $-\frac{16}{9}\sqrt{3} < u < \frac{16}{9}\sqrt{3}$, le point singulier $M_+(u)$ est attractif. Le point $M_0(u)$ admet une valeur propre réelle positive et deux valeurs propres complexes conjuguées à parties réelles négatives. Pour $u = 1 - \frac{2}{9}\sqrt{3}$, $M_0(u)$ subit une bifurcation de Hopf plane surcritique \mathcal{H}_0 qui le rend répulsif. La partie réelle des valeurs propres complexes est d'abord négative – d'où $M_0(u)$ admet pour variété attractive le plan invariant $z = z_0(u)$ – et devient positive pour $-\frac{16}{9}\sqrt{3} < u < 1 - \frac{2}{9}\sqrt{3}$. Pour $u > 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}$, $M_-(u)$ est attractif et il subit également une bifurcation de Hopf plane surcritique \mathcal{H}_- pour $u = 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}$. Ainsi, pour $-\frac{16}{9}\sqrt{3} < u < 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}$, il admet une valeur propre réelle négative et deux valeurs propres complexes conjuguées pour lesquelles la variété répulsive est l'espace propre associé $z = z_0(u)$. Enfin, pour $u = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$, les points $M_-(u)$ et $M_0(u)$ disparaissent par bifurcation col-foyer et, pour $u < -\frac{16}{9}\sqrt{3}$, (VdP_ε^u) admet l'unique point singulier attractif $M_+(u)$.

La bifurcation de Hopf \mathcal{H}_- donne naissance à un cycle limite attractif inclus dans $z = z_-(u)$ entourant $M_-(u)$ pour tout $u \in]-\frac{16}{9}\sqrt{3}, 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}[$ et \mathcal{H}_0 engendre un cycle limite de type col inclus dans $z = z_-(u)$ entourant $M_-(u)$ pour tout $u \in]-\frac{16}{9}\sqrt{3}, 1 - \frac{2}{9}\sqrt{3}[$. Ces bifurcations donnent naissance à des cycles limites devenant rapidement grands (cycles limites de relaxation). Elles sont exactement du type décrit pour le système de relaxation dans 3.4. Notons alors que la bifurcation col-foyer entre $M_-(u)$ et $M_0(u)$ pour $u = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$ fait également disparaître les deux cycles limites entourant ces points singuliers.

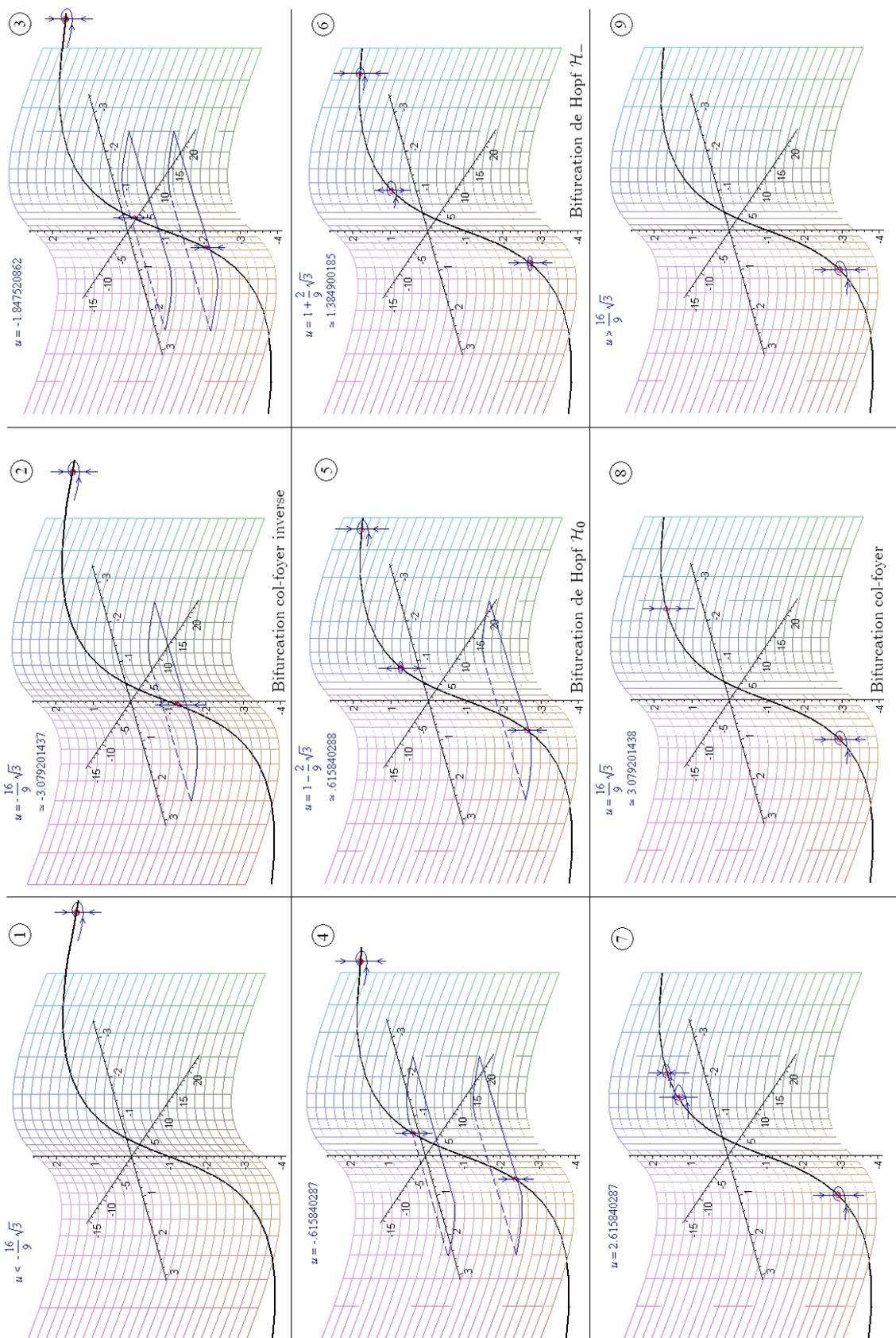


FIG. 6.1 – Points singuliers et cycles limites de (VdP_e^u) et les bifurcations qu'ils subissent selon les valeurs de u .

6.1.3 Description du flot et projection des orbites dans (x, y, z)

La figure 6.2 présente le flot et les bifurcations subies par les points singuliers de (VdP_ε^u) projeté sur $\{y = 0\}$ selon les valeurs de u .

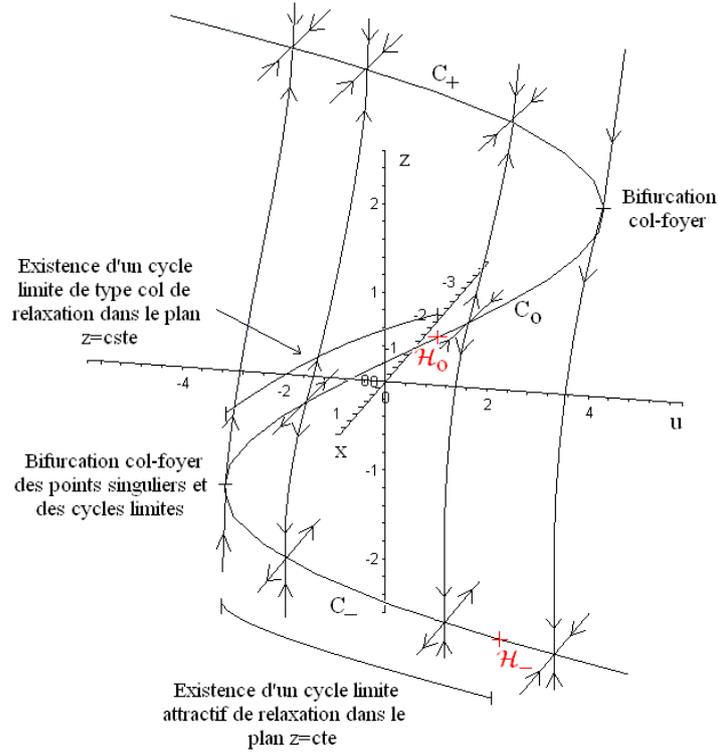


FIG. 6.2 – Flot de (VdP_ε^u) et les bifurcations subies par ses points singuliers selon les valeurs de u en projection sur $y = 0$.

La figure 6.3 montre la projection de la séparatrice de la dynamique sur u . Elle sépare l'espace des phases \mathbb{R}^4 en $\{z < -1\}$ sur lequel \dot{u} est négatif et $\{z > -1\}$ sur lequel \dot{u} est positif. Or le cycle limite entourant $M_-(u)$ est inclus dans le premier pour tout $u \in]-\frac{16}{9}\sqrt{3}, 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}[$, tandis que le point $M_+(u)$ reste dans le second pour tout $u < \frac{16}{9}\sqrt{3}$. D'après l'étude du chapitre précédent sur les oscillateurs de relaxation plan, nous savons que la dynamique lente-rapide sur (z, u) admet une orbite périodique attractive entourant le point singulier $(-1, 0)$. Ainsi, la dynamique des variables z et u du système $(VdP_{\varepsilon, \delta})$ est oscillante selon la projection représentée dans la figure suivante.

Nous partageons alors le cycle en 4 parties : les deux mouvements rapides \mathcal{R}_+ et \mathcal{R}_- et les deux mouvements lents \mathcal{L}_+ et \mathcal{L}_- . En partant d'un point (z_0, u_0) un peu en dessous du point de jonction $P_- = (-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{16}{9}\sqrt{3})$, \dot{u} est presque nul et z croît. Or

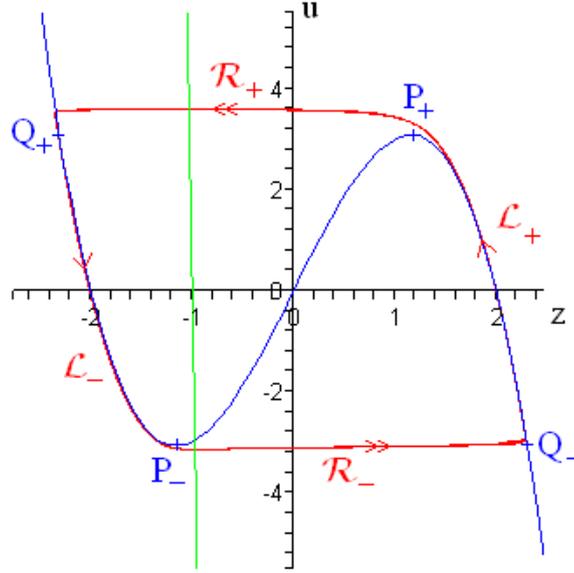


FIG. 6.3 – Orbite périodique attractive du sous-système sur z, u de (VdP_ε^u) de type Van der Pol et décomposition en phases lentes $\mathcal{L}_-, \mathcal{L}_+$ et phases rapides $\mathcal{R}_-, \mathcal{R}_+$. Les points de décrochage correspondant sont appelés P_-, P_+ et les point d'accrochage Q_- et Q_+ .

pour une telle valeur de u , le système (VdP_ε^u) admet un unique point singulier $M_+(u)$ globalement attractif. Donc, quelles que soient les valeurs initiales (x_0, y_0) choisies, l'orbite de $(VdP_{\varepsilon, \delta})$ s'approche du point $(M_+(u_0 + O(\varepsilon\delta)), u_0 + O(\varepsilon\delta))$, (z, u) suivant la trajectoire \mathcal{R}_- . Au passage près du point d'accrochage Q_- , la dynamique sur (u, z) suit la trajectoire \mathcal{L}_+ : u croît lentement jusque $\frac{16}{9}\sqrt{3}$, z décroît lentement jusque $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ et l'orbite de $(VdP_{\varepsilon, \delta})$ reste au voisinage de la courbe de points singuliers attractifs de (VdP_ε^u) :

$$\left\{ M_+(u) \mid u \in \left[-\frac{16}{9}\sqrt{3}, \frac{16}{9}\sqrt{3} \right] \right\}$$

Puis, pour $u = \frac{16}{9}\sqrt{3}$, $M_+(u)$ disparaît par bifurcation col-foyer avec $M_0(u)$. La dynamique sur (u, z) suit la trajectoire \mathcal{R}_+ , u est presque constant, z décroît et (x, y) reste au voisinage de la nappe $\{y = f(x)\}$. Quand (z, u) passe par le voisinage du point d'accrochage Q_+ , u décroît et la dynamique sur (x, y, z) approche le point singulier attractif $M_-(u)$. Quand u devient inférieur à $1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}$, le système (VdP_ε^u) admet un cycle limite de relaxation attractif né de la bifurcation de Hopf de $M_-(u)$ et inclus dans $\{z = z_-(u)\}$. L'orbite de $(VdP_{\varepsilon, \delta})$ tourne, en montant, autour de la variété de dimension 2 plongée dans l'espace des phases et formée des cycles limites entourant $M_-(u)$ pour $u \in \left[-\frac{16}{9}\sqrt{3}, 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3} \right]$. On a alors une alternance de mouvement rapides

(dynamique de x) et intermédiaire (dynamique sur y) quand (z, u) évolue lentement près de \mathcal{L}_- , jusqu'à ce que (z, u) passe au voisinage de P_- . Pour $u = -\frac{16}{9}\sqrt{3}$, les points singuliers $M_-(u)$ et $M_0(u)$ disparaissent par bifurcation col-foyer et les cycles limites de relaxation les entourant également. L'orbite passe alors par un point dont la projection sur (z, u) est un peu en dessous du point de jonction $P_- = (-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{16}{9}\sqrt{3})$, montrant ainsi le caractère périodique du phénomène.

Ce dernier que nous venons de mettre en évidence sur cet exemple typique attire toute notre attention dans la suite de ce chapitre. Nous en donnons une définition générale mettant en relief la particularité des orbites du système $(VdP_{\varepsilon, \delta})$ (voir fig. 6.4).

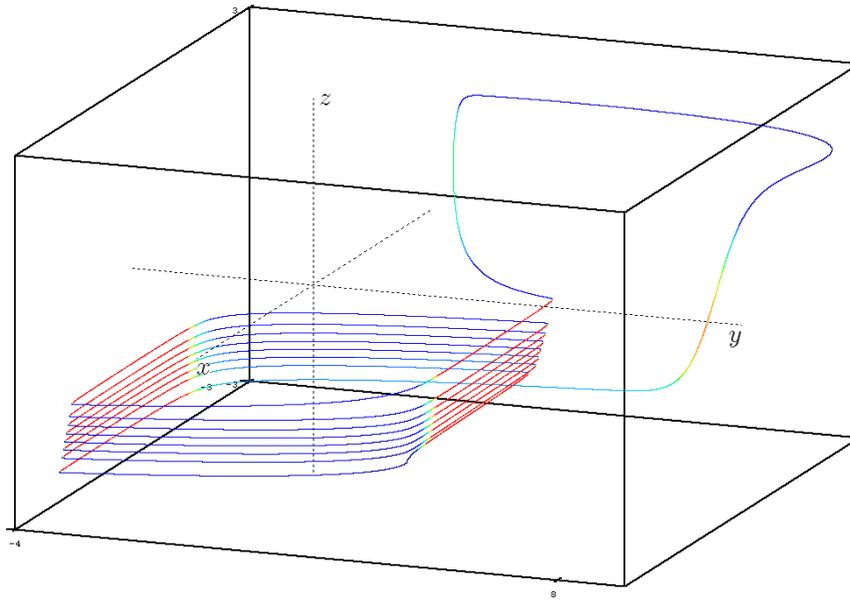


FIG. 6.4 – Orbite périodique d'une oscillation en salves du champ de vecteur $(VdP_{\varepsilon, \delta})$.

Définition 6.1 Une oscillation en salves d'un système lent-rapide (P_ε) est la donnée d'une suite d'orbites périodiques stable (γ_{ε_i}) de (P_{ε_i}) avec $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite décroissante de limite nulle et qui, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, s'approche arbitrairement près alternativement d'une variété connexe de points singuliers stables (durant la phase dite "silencieuse") et d'une variété formée de cycles limites attractifs de la dynamique rapide (durant la phase dite d'"excitation").

Dans toute la suite, nous nous attachons à étudier des comportements d'oscillations en salves pour des champs de vecteurs à deux échelles de temps pour lesquelles le nombre de variables rapides est plus grand que le nombre de variables lentes. En

particulier, nous étudions en détail les différents types d'orbites périodiques en salves d'un système lent-rapide de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ dont la dynamique rapide subit une bifurcation transcritique.

6.2 Oscillations en salves et bistabilité : le système de Hindmarsh-Rose

Les premiers travaux sur les oscillations en salves ont été entrepris par des physiologistes, du fait de l'omniprésence du phénomène dans les modèles des influx neuronaux et des oscillations de cellules. Ainsi, beaucoup de systèmes lents-rapides nés de la modélisation peuvent être pris en exemple de la description suivante : nous avons choisi le modèle de Hindmarsh-Rose pour donner une idée intuitive du phénomène que nous étudierons précisément par la suite dans des cas spécifiques.

Il s'agit d'une simplification du modèle de Hodgkin-Huxley (comportant 4 variables) qui modélise le potentiel d'action ionique dans la membrane des neurones (voir [33]). Nous traitons cet exemple d'un point de vue purement dynamique et le considérons comme un système lent-rapide. Soit :

$$(HR_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 + bx^2 + I - z \\ \dot{y} = c - dx^2 - y \\ \dot{z} = \varepsilon (s(x - x_1) - z) \end{cases}$$

où $0 < \varepsilon \ll 1$. Dans les premiers travaux de Hindmarsh et Rose sur ce système, I représente une impulsion de courant vouée à produire une unique salve d'oscillations avant que le système ne retourne à son état d'équilibre stable. Nous retrouvons ici la notion d'excitabilité exposée à la section 3.4 qui, ici encore, est due à la présence d'une bifurcation de Hopf de la dynamique rapide. Nous considérons dans cette description le deuxième cas traité par les auteurs afin de générer un mouvement périodique d'oscillations en salves. Ainsi, nous attribuons à I une valeur fixe. Nous utilisons, pour les simulations et les schémas (fig. 6.5), les valeurs originelles utilisées par Hindmarsh et Rose :

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad d = 5, \quad s = 4, \quad x_1 = -1.6, \quad I = 2, \quad \varepsilon = 10^{-3} \quad (6.2)$$

La variété critique de (HR_ε) est définie par :

$$\mathcal{C} = \{(x, -dx^2 + c, -ax^3 + (b-d)x^2 + c + I) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Pour les valeurs des paramètres (6.2), nous obtenons la décomposition suivante de la variété critique suivant la nature des points singuliers pour la dynamique rapide que

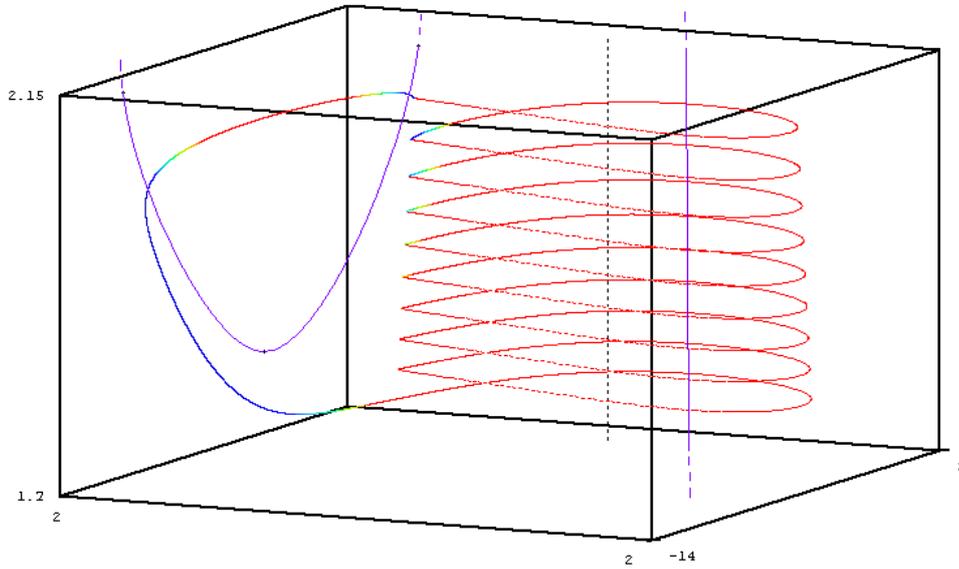


FIG. 6.5 – Orbite périodique de (HR_ε) présentant un comportement d’oscillations en salves dû à la bistabilité. Les constantes choisies sont données par (6.2) et $\varepsilon = 10^{-3}$.

nous décrivons pour z croissant. Une bifurcation de Hopf fait naître un cycle limite attractif autour d’une branche de \mathcal{C} . Puis une bifurcation col-noeud fait apparaître deux autres points singuliers. Le cycle limite disparaît par bifurcation homocline du cycle limite avec le col. Il réapparaît ensuite par bifurcation homocline inverse pour disparaître à nouveau par bifurcation de Hopf, le foyer devenant stable. Il se transforme ensuite en noeud stable qui disparaît avec le col par bifurcation col-noeud. Pour les valeurs supérieures de z , il ne reste alors plus que le point singulier stable sur l’autre branche.

En outre, pour ces valeurs des paramètres, le plan $\dot{z} = 0$ coupe la variété critique en un point de sa branche centrale (constituée de cols de la dynamique rapide). Nous n’étudions pas plus avant le signe de \dot{z} près de la variété de cycles limites. Nous supposons dans cette description que, $\dot{z} > 0$ près de cette variété et $\dot{z} < 0$ près de la branche stable. Ces conditions sont vérifiées pour les valeurs des paramètres (6.2) au moins dans la partie de l’espace des phases à laquelle nous nous restreignons. Une analyse poussée de la variété de cycles limites et, en particulier, de la moyenne de \dot{z} (cf 6.3) serait nécessaire pour connaître le comportement des orbites pour d’autres valeurs des paramètres.

Sous cette condition, si on prend une donnée initiale du système (HR_ε) proche de la branche attractive de la variété critique, l’orbite associée est tout d’abord attirée fortement vers la variété lente persistante et qui est proche de \mathcal{C}_- . Elle se colle à

cette courbe qu'elle parcourt en descendant sous l'effet de la dynamique lente jusqu'au point de décrochage. Sous l'effet de la dynamique rapide, elle rejoint un voisinage de la surface formée des cycles limites de la dynamique rapide en traversant le plan $\dot{z} = 0$. Elle remonte en spirale autour de cette surface, jusqu'à son bord où le cycle limite disparaît par bifurcation homocline. L'orbite peut alors rejoindre un voisinage de la branche attractive de la variété critique et reprendre le cycle d'hystérèse. Dans un autre cas, l'orbite peut suivre la branche formée de cols pendant un temps (éventuellement long) avant de "décrocher" vers la branche stable. Ce comportement local est étudié en détail au chapitre 8.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons particulièrement au comportement d'une orbite d'un système lent-rapide proche d'une variété invariante du système couche-limite formée de cycles limites de la dynamique rapide (hors d'un voisinage d'une éventuelle connexion homocline).

6.3 Analyse le long d'une variété persistante de cycles limites rapides

Nous utilisons et généralisons la notion de phase asymptotique aux systèmes lents-rapides. A cet effet, nous rappelons le cadre de définition et les propriétés de cette notion.

6.3.1 Phase asymptotique

Théorème 6.1 *Soit Γ une orbite périodique de période T d'un champ de vecteurs définissant le flot ϕ_t sur \mathbb{R}^k . On désigne par λ_j les valeurs propres de la matrice B associée par la théorie de Floquet à Γ ($\lambda_n = 1$). On suppose que k , $0 \leq k \leq n - 1$, exposants caractéristiques λ_j sont de parties réelles négatives et $m - k$ de parties réelles positives et $n - m - 1$ de parties réelles nulles. On note W^s et W^u les variétés stable et instable de l'orbite Γ respectivement de dimension $k + 1$ et $m - k + 1$.*

Alors, il existe α et K tels que :

$$\begin{aligned} \forall j \in \{1, \dots, k\}, \operatorname{Re} \lambda_j &< -\alpha \\ \forall j \in \{k + 1, \dots, m\}, \operatorname{Re} \lambda_j &> -\alpha \end{aligned}$$

et pour tout $u \in W^s$, il existe t_s tel que, pour tout $t \geq 0$:

$$|\phi_t(u) - \gamma(t - t_s)| < K \exp\left(-\alpha \frac{t}{T}\right)$$

De même, pour tout $u \in W^u$, il existe t_u tel que, pour tout $t \leq 0$:

$$|\phi_t(u) - \gamma(t - t_u)| < K \exp\left(-\alpha \frac{t}{T}\right)$$

t_s (resp. t_u) est appelé la phase asymptotique stable (resp. instable).

Démonstration. En se restreignant à la variété stable, on peut supposer que l'orbite est attractive. En outre, on peut supposer que $\gamma(0) = 0$ sans perte de généralité. Soit Σ une section transverse au flot passant par O . Il existe alors une application de premier retour :

$$\Pi : u \in \Sigma \rightarrow \Pi(u) = A.u + D(u)$$

où $a = \|A\| < e^{-\alpha}$ et où D s'annule ainsi que toutes ses dérivées en O . Ainsi, pour η assez petit, $\|u\| < \eta \implies \|\Pi(u)\| < e^{-\alpha} \|u\|$ et plus généralement :

$$\|\Pi^n(u)\| < e^{-\alpha n} \|u\|$$

ce qui démontre en particulier la stabilité orbitale de u .

Pour η fixé, par continuité du flot le long d'un compact inclus dans la variété invariante stable, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que si $d(\Gamma, u) < \delta(\eta)$, il existe une plus petite valeur positive $\tau_0(u)$ tel que le flot $\phi_t(u)$ existe pour $0 \leq t \leq \tau_0(\eta)$, $\phi_{\tau_0(\eta)}(u) \in \Sigma$ et $\|\phi_{\tau_0(\eta)}(u)\| < \eta$. On pose τ la fonction temps de premier retour et la suite :

$$\tau_1 = \tau(u_0), \quad \tau_n = \tau_{n-1} + \tau(u_n)$$

τ étant \mathcal{C}^1 et $u_n \rightarrow 0$, il existe M_0 tel que :

$$|\tau(u_{n-1}) - T| < M_0 \cdot \|u_{n-1}\| < M_0 \exp[-\alpha(n-1)] \|u\|$$

Ainsi, la série :

$$\sum_{n>0} [(\tau_n - nT) - (\tau_{n-1} - (n-1)T)]$$

est normalement convergente, et $(\tau_n - nT)_n$ converge vers t_s . En prenant une somme partielle de la série, on obtient en outre :

$$|\tau_n - (nT + t_s)| \leq M_1 \exp(-\alpha n) \|u\|$$

où :

$$M_1 = \frac{M_0}{1 - e^{-\alpha}}$$

On en déduit :

$$\|\phi_{t+\tau_n}(u) - \phi_{t+nT+t_s}(u)\| \leq M_3 \exp(-\alpha n) \|u\|$$

Et :

$$\|\phi_{t+\tau_n}(u) - \gamma(t)\| = \|\phi_t(u_n) - \phi_t(0)\| \leq M_2 \cdot \|u_n\| \leq M_2 \exp(-\alpha n) \|u\|$$

Finalement :

$$\|\phi_{t+nT+t_s}(u) - \gamma(t)\| \leq (M_2 + M_3) \exp(-\alpha n) \|u\|$$

Et en changeant t en $t + nT$:

$$\|\phi_{t+t_s}(u) - \gamma(t)\| \leq K \exp\left(-\alpha \frac{t}{T}\right) \|u\|$$

■

Corollaire 2 *L'ensemble $V(u)$ des points ayant la même phase asymptotique que u est une courbe qui intersecte transversalement le cycle limite, appelée l'“isochrone” passant par u .*

Démonstration. Ceci découle directement du théorème de Fénichel, en remarquant que $V(u)$ est un élément de la famille de variétés stables intersectant transversalement la variété centrale. ■

L'idée d'utiliser les isochrones pour l'étude de la synchronisation des oscillateurs faiblement couplés est due à J. Demongeot (voir, par exemple, [14] et les travaux plus récents [13]).

6.3.2 Perturbation de l'application de retour

Nous nous intéressons dans cette section aux comportements des orbites d'un système lent-rapide (P_ε) tridimensionnel à deux variables rapides quand le système (P_0) admet des cycles limites attractifs pour toutes valeurs de la variable lente – considéré comme paramètre – appartenant à un intervalle.

Soit :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = \varepsilon \cdot h(x, y, z) \end{cases}$$

$$f, g, h \in C^k(\mathbb{R}^3), \quad k \geq 1$$

Nous supposons que, pour $z_1 \leq z \leq z_2$, le sous-système rapide :

$$(R_z) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \end{cases}$$

admet un cycle limite C_z . Nous noterons :

$$\mathcal{M}^{z_1, z_2} = \bigcup_{z_1 < z < z_2} C_z$$

$$\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2} = \bigcup_{z_1 \leq z \leq z_2} C_z$$

Sous la condition de dépendance C^k de f et g par rapport à la variable z , \mathcal{M}^{z_1, z_2} est une variété et $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$ une variété compacte à bord dont les bords sont les cycles limites C_{z_1} et C_{z_2} . Par ailleurs, elle entoure une courbe \mathcal{L}^+ de foyers répulsifs pour la dynamique rapide. Dans cette section, nous analysons la nature du flot (P_ε) près de ce type de variétés formées de cycles limites de la dynamique rapide et le comportement asymptotique des trajectoires. Dans la suite, nous notons ϕ_t le flot du système couche-limite (P_0) et ϕ_t^ε le flot du système (P_ε) .

Afin de détailler les estimations sur le flot de (P_ε) , nous considérons naturellement l'application de retour suivante. Soit $\Sigma_{\mathcal{M}}$ une section de dimension 2 transverse à \mathcal{M}_0 (voir fig. 6.6). Remarquons que $\Sigma_{\mathcal{M}}$ intersecte $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$ selon une courbe C^k que nous nommerons Λ_0 qui peut être paramétrisée par z pour $z_1 \leq z \leq z_2$. Nous rappelons le résultat suivant, application directe de la définition de l'hyperbolicité d'un cycle limite :

Proposition 23 *Si, pour tout $z \in [z_1, z_2]$, le cycle limite C_z est hyperbolique, alors la variété $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$ est une variété compacte à bord normalement hyperbolique pour (P_0) .*

Dans toute la suite, nous supposons que les cycles limites sont attractifs. Ainsi, la variété $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$ est normalement contractante pour (P_0) . D'après le deuxième théorème de Fénichel, il existe $\bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{z_1, z_2}$ variété compacte à bord invariante normalement contractante sous le flot de (P_ε) contenue dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$. Cette dernière propriété nous permet de définir $\Sigma_{\mathcal{M}} \cap \mathcal{M}_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon$. Alors le flot (P_ε) induit une application de Λ_ε dans Λ_ε et, par projection sur l'axe des z , une application $\pi_\varepsilon(z)$ d'un sous-ensemble de $[z_1, z_2]$ dans cet intervalle. Nous pouvons d'ailleurs choisir le domaine de définition D_ε de cette application aussi proche de $[z_1, z_2]$ qu'on veut en prenant ε assez petit.

Si $\varepsilon = 0$, on a $\pi_0(z) = z$ et il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\pi_\varepsilon(z) &= z + \varepsilon\mu(z, \varepsilon) \\ \mu(z, \varepsilon) &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} O(1)\end{aligned}$$

Le lemme suivant est un résultat classique dont on pourra trouver la démonstration dans [31]

Lemme 14 *Pour tout $z \in [z_1, z_2]$, soit $C_z(t)$ une paramétrisation du cycle limite C_z de (R_z) et $T(z)$ sa période. Alors :*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(z, \varepsilon) = \int_0^{T(z)} h(\gamma_z(t), z). dt = T(z)\bar{h}(z) \quad (6.3)$$

où $\bar{h}(z)$ est la moyennisation de h sur l'orbite $C_z(t)$.

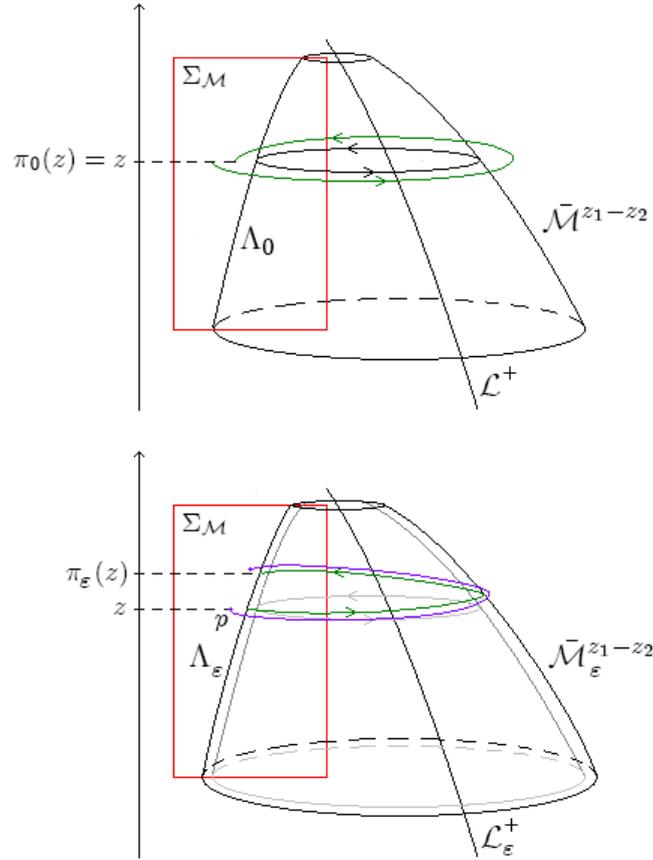


FIG. 6.6 – Perturbation de la variété normalement hyperbolique et de l’application de premier retour.

Nous pouvons alors borner le taux d’expansion des trajectoires près de $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$:

Proposition 24 *Il existe des constantes K_1 et K_2 indépendantes de ε telles que si $z, z', \pi_\varepsilon^n(z), \pi_\varepsilon^n(z') \in D_\varepsilon$ alors :*

$$K_1 |z - z'| \leq |\pi_\varepsilon^n(z) - \pi_\varepsilon^n(z')| \leq K_2 |z - z'|$$

Démonstration. D’après le lemme, on a clairement :

$$m(z, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(z, \varepsilon) > K$$

uniformément sur $[-z_P, z_H - \delta_H]$ pour une certaine constante $K > 0$. Soient z et z' dans D_ε ; d’après le lemme, il existe une constante de Lipschitz k telle que :

$$|\mu(z, \varepsilon) - \mu(z', \varepsilon)| \leq k |z - z'|$$

pour ε assez petit. D'où :

$$|\pi_\varepsilon(z) - \pi_\varepsilon(z')| \leq (1 + k\varepsilon) |z - z'|$$

Puis en itérant n fois :

$$|\pi_\varepsilon^n(z) - \pi_\varepsilon^n(z')| \leq (1 + k\varepsilon)^n |z - z'|$$

Comme la dynamique de z est un $O(\varepsilon)$ alors que la dynamique rapide ne dépend pas de ε , il existe une constante c indépendante de n et ε telle que :

$$\pi_\varepsilon^n(z), \pi_\varepsilon^n(z') \in D_\varepsilon \implies n < \frac{c}{\varepsilon}$$

Ainsi :

$$|\pi_\varepsilon^n(z) - \pi_\varepsilon^n(z')| \leq (1 + k\varepsilon)^{c/\varepsilon} |z - z'|$$

Or :

$$(1 + k\varepsilon)^{c/\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} K = \exp(kc)$$

D'où :

$$|\pi_\varepsilon^n(z) - \pi_\varepsilon^n(z')| \leq K_2 |z - z'|$$

où K est indépendante de ε .

La minoration découle du même principe en inversant le temps. ■

Ce résultat permet de contrôler l'expansion sur la variable lente des orbites apparaissant pendant une révolution autour de la variété invariante. Cependant, ceci ne permet pas de contrôler les variables rapides. Nous utilisons donc l'attractivité de la variété afin de contrôler l'expansion des orbites durant un temps fini.

6.3.3 Généralisation

Nous pouvons alors déduire un résultat réunissant simultanément le contrôle de l'expansion le long de la variété stable normalement hyperbolique et la phase asymptotique de la trajectoire du système lent-rapide en son voisinage. A cet effet, nous utilisons l'existence du feuilletage stable de la variété centrale. Ceci mène à la proposition suivante définissant la phase isochrone du système perturbé :

Proposition 25 *Soit un voisinage U de $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$. Il existe des constantes ε_0 , K et α strictement positives telles que, pour tout point $q \in U$, pour tout $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, il existe $q_\varepsilon \in \bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{z_1, z_2}$ tel que :*

$$|\phi_t^\varepsilon(q) - \phi_t^\varepsilon(q_\varepsilon)| \leq K \exp\left(-\alpha \frac{t}{\varepsilon}\right)$$

pour $t \in [0, \tau(\varepsilon)]$ et $\tau(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Si deux points q et q_ε vérifie cette propriété, nous dirons qu'ils ont même phase isochrone pour (P_ε) .

En particulier, pour $\varepsilon = 0$, $q_0 \in \bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$ a la même phase asymptotique que q au sens classique du théorème 6.1.

Démonstration. Soit $q \in \{z_1 < z < z_2\}$ un point proche de $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$. Soit ε_0 assez petit tel que la variété perturbée $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$ soit incluse dans U . Soit $\mathcal{V}_\varepsilon^s(q)$ la fibre du feuilletage stable de la variété stable définie par le théorème de Fénichel appliqué à la variété compacte de cycles limites $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$. Alors, d'après le théorème de Fénichel, $\mathcal{V}_\varepsilon^s(q)$ intersecte transversalement la variété $\bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{z_1, z_2}$ en un unique point q_ε . De plus, soit $\alpha > 0$ inférieur aux modules des parties réelles des exposants de Floquet de C_z pour $z_1 \leq z \leq z_2$. Il existe alors une constante $K' > 0$ indépendante de ε tel que pour tout $p \in \mathcal{V}^s(q)$, pour tout t tel que $\phi_{[0, \tau]}^\varepsilon(p) \in \bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{z_1, z_2}$:

$$|\phi_t^\varepsilon(p), \phi_t^\varepsilon(q)| < K' \exp\left(-\alpha \frac{t}{\varepsilon}\right) d(p, q)$$

Ceci est donc vrai en particulier pour q_ε . Puisque p et q sont alors dans le voisinage U , il existe K indépendant de ε et q tel que :

$$|\phi_t^\varepsilon(q_\varepsilon), \phi_t^\varepsilon(q)| < K \exp\left(-\alpha \frac{t}{\varepsilon}\right)$$

pour tout $t > 0$ tel que $\phi_t^\varepsilon(q_\varepsilon), \phi_t^\varepsilon(q) \in U$. Ainsi, puisque l'orbite de (P_ε) de condition initiale q_ε quitte la variété compacte invariante par son bord, le temps $\tau(\varepsilon)$ tel que $\phi_{[0, \tau(\varepsilon)]}^\varepsilon(q_\varepsilon) \in \bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{z_1, z_2}$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$ et on a pour $\varepsilon = 0$ la définition classique de phase asymptotique. ■

Nous avons ainsi un bon contrôle de la dilatation des orbites durant leur révolution autour de $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$. Nous utilisons ces résultats par la suite afin de développer la fonction de Poincaré associée à un système présentant des oscillations en salves.

Chapitre 7

Oscillations en salves et transition col-noeud transcritique

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux systèmes tridimensionnels pour lesquels un des mécanismes d'éjection résulte d'une bifurcation col-noeud transcritique de la dynamique rapide. Le type de transition qui en résulte est voisin du cas plan et peut être utilisé de la même manière afin de créer un comportement d'hystérèse. Pour ce faire, nous créons des conditions de bistabilité de la dynamique rapide en supposant l'existence d'une bifurcation de Hopf faisant naître, pour certaines valeurs de la variable lente, un cycle limite attractif. Le système qui résulte de cette construction géométrique présente alors toutes les propriétés pour faire apparaître des oscillations en salves. La question que nous adressons concerne alors la distribution d'éventuelles orbites périodiques et la forme de l'ensemble limite-périodique vers lequel une famille de telles orbites peut converger.

Nous étudions dans un premier temps la forme normale de la bifurcation col-noeud transcritique dynamique en utilisant directement la théorie des perturbations régulières. Nous sommes alors en mesure de donner un développement de la fonction de transition d'un système global dont la dynamique rapide subit une telle bifurcation. Nous appliquons ensuite ces résultats à une classe de systèmes particulière. Enfin, nous montrons un résultat d'existence et unicité d'orbite périodique pour de tels systèmes lents-rapides pour toutes valeurs assez petites du paramètre ε .

7.1 Bifurcation col-noeud transcritique

Pour obtenir un échange col-noeud de deux points singuliers d'une dynamique plane, il suffit de poser une dynamique attractive sur la deuxième variable dans le

système (TC_ε^N) . La forme normale naturelle à considérer en dimension 2 s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \alpha x \mu \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

où $\alpha > 0$ est fixé et $\mu \in \mathbb{R}$ est le paramètre de bifurcation. Nous obtenons alors deux points singuliers O et $(-\alpha\mu, 0)$. Nous vérifions que, pour $\mu < 0$, le premier est un noeud attractif et le second un col alors que, pour $\mu > 0$, O est un col et $(-\alpha\mu, 0)$ est un noeud attractif. Nous avons donc un échange de stabilité col-noeud entre les deux points singuliers en $\mu = 0$. Etudions plus avant la bifurcation dynamique associée. Remarquons de plus que les variétés stable et instable du col $(0, 0)$ pour $\mu > 0$ sont respectivement $x = 0$ et $y = 0$.

7.1.1 Forme normale de la bifurcation col-noeud transcritique dynamique

Nous ajoutons une dynamique lente sur le paramètre de bifurcation afin d'obtenir la forme normale suivante :

$$(CNTC_\varepsilon^N) : \begin{cases} \dot{x} = x^2 + \alpha x z \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = \varepsilon \end{cases}$$

pour lequel $\varepsilon \ll 1$ est le paramètre de la dynamique lente sur z . Remarquons, en premier lieu, que le plan $x = 0$ est invariant sous le flot de $(CNTC_\varepsilon^N)$. Nous restreignons alors le flot au demi-espace stable $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nous considérons $\alpha > 0$ et nous nous intéressons à la transition de la dynamique dans un voisinage U de O . Ainsi, le plan $y = 0$ étant invariant stable, nous pouvons rapprocher cette dynamique de celle étudiée dans le cas plan au chapitre 4.

Nous utilisons des notations similaires pour la décomposition de l'ensemble critique en notant :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x(x + \alpha z) = 0\} = \Delta \cup \mathcal{L} \\ \Delta &= \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{L} = \{(-\alpha z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Nous décomposons donc Δ et \mathcal{L} selon la nature de ces points par rapport à la dynamique rapide :

$$\begin{aligned} \Delta^- &= \Delta \cap \{z < 0\}, & \Delta^S &= \Delta \cap \{z > 0\} \\ \mathcal{L}^- &= \mathcal{L} \cap \{x < 0\}, & \mathcal{L}^S &= \mathcal{L} \cap \{x > 0\} \end{aligned}$$

Le point O est singulier pour la dynamique rapide, non hyperbolique, et les valeurs propres associées au système rapide sont 0 et -1 . La donnée précédente des variétés stable et instable des points singuliers de la dynamique rapide montre qu'une orbite du système couche-limite $(CNTC_0^N)$ ayant pour donnée initiale $(x_0, y_0, z_0) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}$ est attirée par le point singulier $(0, 0, z_0) \in \Delta^-$ si $x_0 < -\alpha z_0$, $z_0 < 0$ et repoussée par le point singulier de $(0, 0, z_0) \in \Delta_S$ si $z_0 > 0$. Remarquons cependant que, dans ce dernier cas, l'orbite approche la demi-droite $\{(x, 0, z_0) | x > 0\}$.

Ainsi, la dynamique lente intégrable faisant croître z , nous avons le comportement suivant pour l'orbite passant en $t = 0$ par un point $M = (x_0, y_0, z_0)$ tel que $0 < x_0 < \kappa$ assez petit et $z_0 < 0$. La variable z croît linéairement en fonction du temps et la dynamique rapide est fortement attirée par la demi-droite Δ^- . L'orbite passe donc au voisinage de O , traverse le plan $z = 0$ et est alors repoussée par la demi-droite $\Delta \cap \{z > 0\}$ tout en subissant l'attraction exponentielle du plan $y = 0$.

La fonction de transition induite par $(CNTC_\varepsilon^N)$ peut alors se déduire facilement du cas plan (TC_ε^N) grâce à un argument de perturbation régulière. Ce résultat est un cas particulier de celui démontré dans la sous-section suivante sur une forme locale plus générale.

7.1.2 Forme locale perturbée

Soit :

$$(CNTC_\varepsilon^{loc}) : \begin{cases} \dot{x} = x^2 + \alpha x z + O(x^3, x^2 z, x z^2, x y z, x^2 y, x \varepsilon) \\ \dot{y} = y(-1 + O(x, y, z, \varepsilon)) \\ \dot{z} = \varepsilon(1 + O(x, y, z)) \\ \dot{\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$.

Le flot de $(CNTC_\varepsilon^{loc})$ est essentiellement le même que celui de la forme normale décrite dans la sous-section précédente. Avec les notations de cette dernière, nous remarquons que la variété Δ est incluse dans l'ensemble critique. Il existe un voisinage compact K de O tel que :

$$\Delta^- = \Delta \cap K \cap \{z < 0\}$$

soit constituée de noeuds attractifs de la dynamique rapide et :

$$\Delta^S = \Delta \cap K \cap \{z > 0\}$$

de cols. Pour tout $\delta > 0$, les variétés invariantes compactes à bord $\Delta^- \cap \{z \leq -\delta\}$ et $\Delta^S \cap \{z \geq \delta\}$ sont normalement hyperboliques. Nous noterons alors Δ_ε^- et Δ_ε^S les variétés persistantes invariantes pour $(CNTC_\varepsilon^{loc})$. Par le théorème des fonctions

implicites, il existe aussi localement une variété \mathcal{L} incluse dans l'ensemble critique et passant par O . Nous décomposons alors cette variété, de la même manière que pour la forme normale, selon la nature des points singuliers de la dynamique rapide. Nous pouvons donc réduire le voisinage compact de O afin que :

$$\mathcal{L}^- = \mathcal{L} \cap K \cap \{x < 0\}$$

soit constituée de noeuds attractifs de la dynamique rapide et :

$$\mathcal{L}^S = \mathcal{L} \cap K \cap \{x > 0\}$$

de cols.

Le plan $x = 0$ étant invariant sous le flot de $(CNTC_\varepsilon^{loc})$, nous réduisons notre étude au demi-espace $x \geq 0$.

Théorème 7.1 *Pour $\delta > 0$, notons :*

$$\Sigma^{-\delta} = \{(x, y, -\delta) | 0 \leq x < \kappa, |y| \leq \nu\}$$

$$\Sigma^\delta = \{(x, y, \delta) | x \geq 0\}$$

Il existe des constantes $\delta, \varepsilon_0, \kappa, \nu$ strictement positives telles que, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, la fonction de transition induite par le flot de $(CNTC_\varepsilon^{loc})$ entre $\Sigma^{-\delta}$ et Σ^δ soit bien définie. Elle admet alors le développement suivant :

$$\Pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{out}(x, y^{out}(x, y, \varepsilon), \varepsilon) \\ y^{out}(x, y, \varepsilon) \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

où :

$$x^{out}(x, y, \delta, \varepsilon) = \lambda(x, y) + xO(y, \varepsilon)$$

avec $y^{out}(x, y, \varepsilon)$ exponentiellement petite par rapport à ε , $\lambda(x, y)$ indépendante de ε et, pour tout $|y| \leq \nu$, $\lambda(x, y) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$.

Démonstration. Dans le plan invariant $y = 0$, le système se réduit à (TC_ε^{loc}) (cf. chapitre 4). En outre, on peut réduire le voisinage compact K tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, $(CNTC_\varepsilon^{loc})$ n'admette aucun point singulier. Pour $\delta > 0, \kappa > 0$ assez petit, nous savons que l'application de transition est bien définie entre les sections $\Sigma^{-\delta} \cap \{y = 0\}$ et $\Sigma^\delta \cap \{y = 0\}$ et admet le développement :

$$\Pi_{y=0} : \begin{pmatrix} x \\ -\delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_0(x) + xO(\varepsilon) \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

où $\lambda_0(x)$ est indépendant de ε et $\lambda_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$. Ainsi, par perturbation régulière du flot, il existe un $\nu > 0$ assez petit tel que l'application Π soit bien définie sur $\Sigma^{-\delta}$. Le plan $y = 0$ invariant pour $(CNTC_\varepsilon^{loc})$ étant attractif, nous en déduisons le développement recherché. ■

7.1.3 Transition col-noeud transcritique d'un système global

Nous utilisons la forme locale étudiée dans la sous-section précédente pour analyser les systèmes lents-rapides, pour lesquels apparaît une bifurcation col-noeud transcritique de la dynamique rapide. Nous posons dans un premier temps les hypothèses nécessaires sur le système :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = \varepsilon h(x, y, z) \end{cases}$$

$$f, g, h \in C^3(\mathbb{R}^3)$$

pour qu'il exhibe ce type de transition. Les hypothèses que nous formons à cet effet sont proches de celles du cas plan.

$\mathbf{H}_{1, cntc}^T$: Nous supposons que l'ensemble critique de (P_ε) :

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$$

est l'union de deux courbes Δ et \mathcal{L} d'intersection transverse $\{T\}$. On suppose alors que Δ et \mathcal{L} sont, localement dans un compact K autour de T , donnés par des graphes au-dessus de z . Nous envisageons donc le système localement dans le compact K .

$\mathbf{H}_{2, cntc}^T$: T sépare alors Δ et \mathcal{L} en deux parties respectivement :

$$\begin{aligned} \Delta \cap K &= \Delta^- \cup T \cup \Delta^S \\ \mathcal{L} \cap K &= \mathcal{L}^S \cup T \cup \mathcal{L}^- \end{aligned}$$

On suppose que Δ^- et \mathcal{L}^- sont formées de noeuds attractifs pour la dynamique rapide tandis que Δ^S et \mathcal{L}^S sont constitués de cols. T est donc un point de bifurcation col-noeud transcritique de la dynamique rapide que nous supposons non dégénéré. Plus précisément, soit J la jacobienne associée à la dynamique rapide en O et u (resp. v) un vecteur propre associé à la valeur propre nulle de J (resp. ${}^t J$). On suppose :

$$\left\langle v, \partial_z \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \Big|_O \right\rangle \neq 0 \text{ et } \left\langle v, \partial_{(x,y)}^2 \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \Big|_O (u, u) \right\rangle \neq 0 \quad (7.1)$$

En outre, on suppose que T n'est pas un point singulier du système critique associé et le flot de (S_0) défini sur Δ est dirigé de Δ^- vers Δ^+ .

Ainsi, d'après le théorème de Fénichel, en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de T , les variétés Δ^- , Δ^S , \mathcal{L}^- et \mathcal{L}^S persistent sous la forme de variétés invariantes Δ_ε^- , Δ_ε^S , $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ et $\mathcal{L}_\varepsilon^S$ pour ε assez petit.

$\mathbf{H}_{3,ctc}^T$: Pour ε assez petit, les prolongements par le flot de (P_ε) de Δ_ε^- et Δ_ε^S coïncident. La variété Δ persiste donc en une variété Δ^ε non normalement hyperbolique. Cependant, il existe, dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de T , un point T_ε de Δ_ε séparant cette variété en deux variétés normalement hyperbolique.

Nous obtenons ainsi une bifurcation transcritique de la dynamique rapide en T . Imposer la direction du flot sur Δ revient à connaître le signe de h au voisinage de T . Nous pouvons alors rapprocher cette classe de systèmes de la forme locale étudiée dans la section précédente.

Proposition 26 *Sous les hypothèses $\mathbf{H}_{1,ctc}^T$, $\mathbf{H}_{2,ctc}^T$, $\mathbf{H}_{3,ctc}^T$, il existe un changement de variables \mathcal{C}^∞ qui conjugue localement en T le système (P_ε) à $(CNTC_\varepsilon^{loc})$.*

Démonstration. Par translation, ramenons tout d'abord le point T_ε à l'origine. Les points de Δ^S étant des cols pour la dynamique rapide, Δ_ε^- admet une variété centrale stable $\mathcal{W}_\varepsilon^s$ et une variété centrale instable $\mathcal{W}_\varepsilon^u$ dont l'intersection est transverse. En considérant les prolongements de ces variétés (que nous noterons de la même manière) par le flot inverse de (P_ε) , d'après l'hypothèse $\mathbf{H}_{3,ctc}^T$, nous pouvons choisir un système de coordonnées locales pour lequel $\mathcal{W}_\varepsilon^s$ est donnée localement par $\hat{x} = 0$ et $\mathcal{W}_\varepsilon^u$ par $\hat{y} = 0$. Nous utilisons le développement de Taylor de \hat{f} selon (\hat{x}, \hat{z}) en T . D'après l'hypothèse $\mathbf{H}_{2,ctc}^T$, en renormant les coordonnées \hat{x} et \hat{y} , (P_ε) devient localement :

$$\begin{cases} \hat{x}' = \hat{x}^2 + \alpha \hat{x} \hat{z} + O(\hat{x}^3, \hat{x} \hat{z}^2, \hat{x}^2 \hat{z}, \hat{x} \varepsilon) \\ \hat{y}' = \hat{y} (-1 + O(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \varepsilon)) \\ \hat{z}' = \varepsilon \hat{h}(\hat{x}, \hat{z}) \end{cases}$$

Le choix de l'orientation de z permet alors de supposer $\hat{h} > 0$ dans un voisinage de T et $\alpha > 0$. D'après l'hypothèse $\mathbf{H}_{2,ctc}^T$ sur le flot de (S_0) au voisinage de T , en renormant la coordonnées z , et en ajoutant une dynamique nulle sur ε , on obtient localement dans un voisinage de T :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \hat{x}' = \hat{x}^2 + \alpha \hat{x} \hat{z} + O(\hat{x}^3, \hat{x} \hat{z}^2, \hat{x}^2 \hat{z}, \hat{x} \varepsilon) \\ \hat{y}' = \hat{y} (-1 + O(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \varepsilon)) \\ \hat{z}' = \varepsilon \hat{h}(\hat{x}, \hat{z}) \\ \varepsilon' = 0 \end{cases}$$

■

Grâce à cette proposition, nous conjugurons les systèmes dont la dynamique rapide subit une bifurcation col-noeud transcritique non dégénérée de la forme locale pour

laquelle nous avons développé la fonction de transition au voisinage du point de bifurcation. Ainsi, il existe deux sections transverses à Δ^- et Δ^S respectivement entre lesquelles, pour ε assez petit, l'application de transition induite par (P_ε) est bien définie. En utilisant le changement de variables locales de la proposition 26, le théorème 7.1 en donne un développement.

7.2 Position du problème

Considérons une dynamique lente-rapide de l'espace :

$$(P_\varepsilon) : \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, z) \\ \dot{y} = g(x, y, z) \\ \dot{z} = \varepsilon h(x, y, z) \end{cases}$$

$$f, g, h \in C^3(\mathbb{R}^3)$$

Nous poserons dans chaque section les hypothèses adéquates en vue de démontrer le résultat principal (théorème 7.2).

Supposons, en premier lieu, que l'ensemble critique de (P_ε) est l'union de deux variétés Δ et L se coupant en l'origine. On suppose, en outre, que Δ est un graphe au-dessus de z , que la variété \mathcal{L} est en forme de \cap et que Δ et \mathcal{L} ont un unique point commun que nous prenons pour origine du repère (voir fig. 7.1). On décompose les deux variétés respectivement en :

$$\Delta = \Delta^- \cup \{O\} \cup \Delta^S$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_* \cup \{O\} \cup \mathcal{L}^S \cup \{P\} \cup \mathcal{L}^- \cup \{H\} \cup \mathcal{L}^+$$

On suppose alors que, pour la dynamique rapide :

- les points de Δ^- et \mathcal{L}_* sont des noeuds attractifs,
- les points de \mathcal{L}^- sont des noeuds (resp. foyers) attractifs près de P (resp. H),
- les points de Δ^S et de \mathcal{L}^S sont des cols,
- les points de \mathcal{L}^+ sont des foyers répulsifs.

Nous associons à ces variétés en dehors d'un voisinage de O , les variétés persistantes $\Delta_\varepsilon^-, \Delta_\varepsilon^S, \mathcal{L}_\varepsilon^-, \mathcal{L}_\varepsilon^+$ de la théorie de Fénichel.

Nous supposons, de plus, que la dynamique rapide subit une bifurcation de Hopf surcritique pour $z = z_H$, où $H = (x_H, y_H, z_H)$, donnant naissance à un cycle limite attractif C_z pour $z < z_H$. Nous supposons par la suite que ce cycle persiste pour toutes valeurs de $z \leq z_H$. Dans le cas particulier $z = z_H$, le cycle limite est réduit au point singulier H . Ainsi pour tous z_1, z_2 tels que $z_1 < z_2 < z_H$, nous pouvons définir la

variété invariante pour (P_0) de dimension 2 formée de ces cycles limites rapides :

$$\mathcal{M}^{z_1, z_2} = \bigcup_{z_1 < z < z_2} C_z$$

Nous supposons en outre que \mathcal{N} définie par $h(x, y, z) = 0$ est une surface lisse qui coupe \mathcal{L}^S , sépare Δ et $\mathcal{M}^{-\infty, z_H} \cup \mathcal{L}^-$ et, enfin, que $h < 0$ près de Δ^- et $h > 0$ près de $\mathcal{M}^{-\infty, z_H} \cup \mathcal{L}^-$. Alors, pour tout $z_1 < z_2 < z_H$, il existe une variété compacte à bord $\bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{z_1, z_2}$ invariante normalement contractante sous le flot de (P_ε) contenue dans un $O(\varepsilon)$ -voisinage de $\bar{\mathcal{M}}^{z_1, z_2}$.

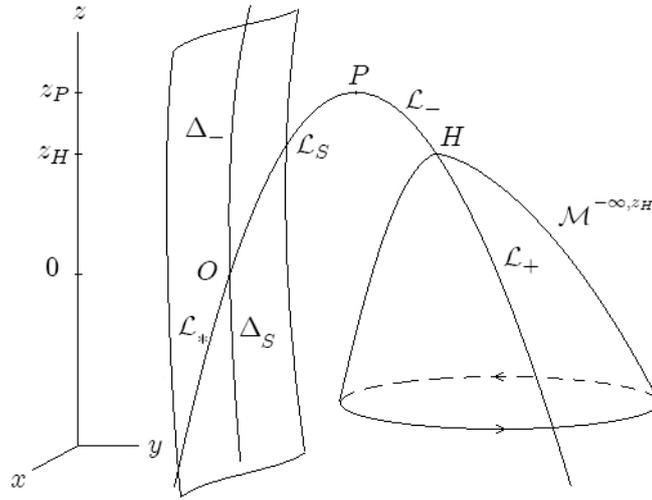


FIG. 7.1 – Ensemble critique de (P_ε) et sa décomposition selon la nature des points singuliers de la dynamique rapide. Le prolongement de la variété centrale stable $\mathcal{V}_\varepsilon^s$ de Δ_ε^- par le flot inverse de (P_ε) sépare l'espace des phases en deux parties invariantes.

Nous supposons qu'à l'origine, (P_ε) vérifie les hypothèses $\mathbf{H}_{1,ctnc}^O$, $\mathbf{H}_{2,ctnc}^O$, $\mathbf{H}_{2,ctnc}^O$. Ainsi, le prolongement de la variété centrale stable $\mathcal{W}_\varepsilon^s$ de Δ_ε^- par le flot inverse de (P_ε) sépare l'espace des phases en deux parties invariantes (voir figure 7.1). Par la suite, nous réduisons celui-ci à la partie contenant $\mathcal{L}_\varepsilon^S$.

Soit J la jacobienne associée à la dynamique rapide en P . Nous posons, en outre, les hypothèses suivantes sur $P = (x_P, y_P, z_P)$, $z_P > z_H$, pour qu'il soit un point de bifurcation col-noeud non dégénéré de la dynamique rapide :

1. J admet une valeur propre négative et une valeur propre nulle.
2. Soit u (resp. v) un vecteur propre associé à la valeur propre nulle de J (resp. ${}^t J$).

On suppose :

$$\left\langle v, \partial_z \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \Big|_P \right\rangle \neq 0 \text{ et } \left\langle v, \partial_{(x,y)}^2 \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \Big|_P (u, u) \right\rangle \neq 0 \quad (7.2)$$

Donc, il existe une trajectoire $\gamma_P(t)$ du système rapide dont l' α -limite est $\{P\}$.

7.2.1 Comportement qualitatif du flot

Nous décrivons, tout d'abord, le comportement des orbites du système couche-limite selon les différentes valeurs de z . Pour $z > z_P$, les orbites sont globalement attirés par le point sur Δ^- , noeud attractif pour la dynamique rapide. Rappelons que les points de \mathcal{L}^S sont des cols pour la dynamique rapide. Dans chaque plan $z = cste \in]0, z_P[$, la variété stable du col sépare ce plan en deux parties invariantes. Dans l'une, les orbites rejoignent le noeud situé sur Δ^- et, dans l'autre, le noeud situé sur \mathcal{L}^- pour $z > z_H$ ou le cycle limite attractif C_z . Pour $z < 0$, toutes les orbites rejoignent le cycle limite attractif C_z .

Ainsi, pour le système (P_ε) complet, il apparaît un comportement d'oscillations en salves dû à la bistabilité entre la variété de cycles limites de (P_0) et la variété invariante stable Δ^- . De fait, une orbite débutant près de O mais qui n'appartient pas à la variété centrale stable de Δ^S suit sa variété centrale instable et rejoint le voisinage de la variété invariante formée de cycles limites persistant par la bifurcation de Hopf. Alors, comme z croît près de $\mathcal{M}^{-\infty, z_H}$, l'orbite (P_ε) spirale en montant autour de cette variété à une allure en $O(\varepsilon)$. Puis elle suit la branche \mathcal{L}^- formée de points singuliers stables de (R_z) pour $z < z_H < z_P$. L'orbite passant alors au voisinage du point de décrochage P , sous l'influence de la dynamique rapide, approche à nouveau Δ^- . Enfin, comme $\dot{z} \leq 0$ à gauche de \mathcal{N} , z décroît près de Δ . L'orbite descend alors vers un voisinage de l'origine.

Il apparaît donc un comportement d'"oscillations en salves" présentant une phase "silencieuse" près de Δ et d'oscillations rapides autour de la variété invariante formée de cycles limites. Cependant, à l'instar du système pli-transcritique plan décrit dans le chapitre 5 dont nous nous inspirerons, il est nécessaire de comprendre l'influence du passage près du point de bifurcation col-noeud transcritique sur la compression subie par les orbites. Ainsi, le point-clé de l'étude du système pour les petites valeurs de ε réside dans l'existence et la localisation d'un point de décrochage sur Δ^S .

7.2.2 Connexions hétéroclines de la dynamique rapide

Certaines propriétés concernant la dynamique rapide sont des généralisations simples du cas plan, nous ne nous attarderons donc pas sur leur démonstration. Cependant,

le résultat suivant est nécessaire afin de décrire le comportement asymptotique des trajectoires rapides du système (P_ε) .

Lemme 15 *Pour toute valeur du paramètre z dans $]0, z_P]$, il existe une orbite hétérocline γ_z pour le système couche-limite (P_0) entre le point singulier de type col pour la dynamique rapide appartenant à \mathcal{L}^S et le noeud attractif appartenant à Δ^- .*

Pour tout $z < 0$, le système couche-limite (P_0) admet une orbite hétérocline γ_z qui connecte le point singulier sur Δ^S de type col pour la dynamique rapide au cycle limite attractif C_z .

Démonstration. La propriété résulte directement de l'attractivité globale des points de Δ^- (resp. du cycle limite C_z) pour la dynamique rapide et de la nature col des points de \mathcal{L}^S . Pour $z = z_P$, l'existence de la connexion hétérocline résulte de l'hypothèse de non dégénérescence du point de bifurcation pli (7.2). ■

7.3 Décomposition de l'application de Poincaré

Soit A le point d'intersection de Δ^- avec le plan $z = z_P$. Soit Σ_A une section transverse au flot proche de Δ^- . Considérons le difféomorphisme Ψ_T qui conjugue localement le système (P_ε) à la forme locale $(CNTC_\varepsilon^{loc})$. Puisque Δ est donné par un graphe au dessus de (x, y) , ce difféomorphisme est bien défini sur un voisinage de toute partie compacte Δ contenant O . Il définit ainsi un nouveau système de coordonnées pour lequel Δ est l'axe de la variable \hat{z} et $A = (0, 0, \hat{z}_A)$. Soit alors $B = (0, 0, -\hat{z}_A) \in \Delta^S$. En revenant au système de coordonnées originel, nous posons z_B la coordonnée en z de B .

Nous nous attachons à présent, sous les hypothèses posées dans la section 7.2, à montrer la bonne définition et donner le développement en ε de l'application de premier retour induite par (P_ε) sur une section transverse au flot proche de Δ^- .

Théorème 7.2 *Soit Σ_A une section transverse au flot proche de Δ^- et ayant un point d'intersection p_0 avec γ_P , connexion hétérocline entre les point P et A de la dynamique rapide. Il existe un voisinage ouvert V de p_0 dans Σ_A tel que, pour ε assez petit, l'application Π_ε de premier retour de (P_ε) est bien définie de $V \subset \Sigma_A$ dans Σ_A . Il existe alors un système de coordonnées locales sur Σ_A pour lequel Π_ε est exponentiellement contractante sur V par rapport à ε .*

Nous décomposons l'application de Poincaré en utilisant des fonctions de transition entre des sections intermédiaires adéquates. La figure (7.2) résume cette décomposition.

Démonstration. Soit p_ε le point d'intersection du prolongement de $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ par le flot avec Σ_A . Nous choisissons un système de coordonnées locales dans Σ_A centré en p_ε .

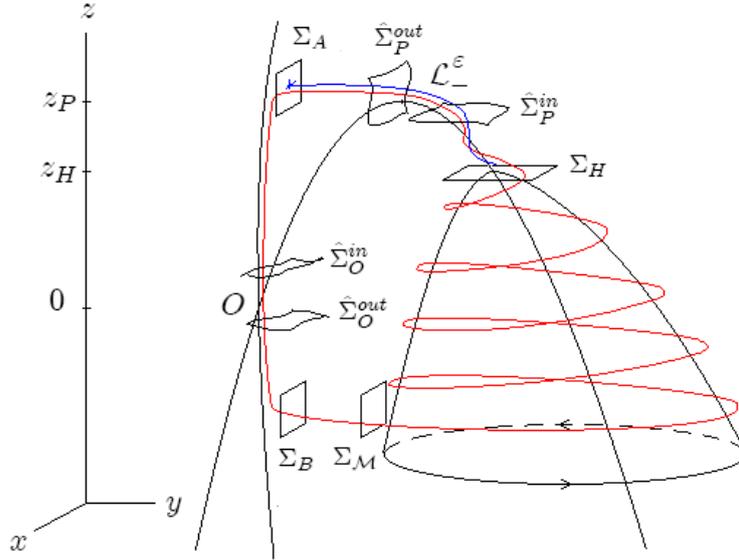


FIG. 7.2 – Décomposition de l'application de Poincaré induite par (P_ε) d'un voisinage V de Σ_A dans lui-même.

Ψ_T conjugue localement le système (P_ε) à la forme locale $(CNTC_\varepsilon^{loc})$ dans un voisinage de Δ . Alors, il existe des sections $\hat{\Sigma}_O^{in}$ et $\hat{\Sigma}_O^{out}$ transverses au flot qui sont les pré-images par Ψ_T de $\Sigma^{-\delta}$ et Σ^δ du théorème 7.1. L'application de transition Π_{Δ^-} induite par le flot entre Σ_A et $\hat{\Sigma}_O^{in}$ est bien définie pour ε assez petit. Nous choisissons un système de coordonnées locales dans $\hat{\Sigma}_O^{in}$ centré en $\Delta_\varepsilon^- \cap \hat{\Sigma}_O^{in}$. Alors, d'après l'attractivité de Δ^- :

$$\Pi_{\Delta^-}(y, z) = O\left(\exp\left(-\frac{k_O}{\varepsilon}z\right)\right)$$

avec $k_O > 0$. Nous choisissons ensuite un système de coordonnées dans $\hat{\Sigma}_O^{out}$ pour lequel l'intersection de la variété centrale stable associée à Δ_ε^- est l'axe $y = 0$. Alors, d'après le théorème 7.1, l'application de transition est bien définie pour ε assez petit et :

$$\Pi_O\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_O^x(x, \Pi_O^y(x, y, \varepsilon), \varepsilon) \\ \Pi_O^y(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Pi_O^x(x, y, \varepsilon) &= \lambda(x, y) + xO(\varepsilon) \\ \forall y, \quad \lambda(x, y) &\underset{x \rightarrow 0}{=} O(x) \end{aligned}$$

$\lambda(x, y)$ indépendante de ε et $\Pi_O^y(x, y, \varepsilon)$ exponentiellement petite par rapport à ε . Ainsi, l'image de $\Pi_O \circ \Pi_{\Delta^-}$ est exponentiellement petite. En outre, remarquons que,

d'après l'hypothèse $\mathbf{H}_{3,ctc}^T$, puisque pour ε assez petit $\Sigma_A \cap \{f = 0\} = \emptyset$, l'image de Σ_A par $\Pi_O \circ \Pi_{\Delta^-}$ ne contient pas de point de $\{f = 0\}$ variété invariante sous le flot de (P_ε) . Soit Σ_B une section transverse au flot proche de Δ^S ayant un point d'intersection avec la connexion hétérocline de la dynamique rapide entre B et C_{z_B} . Nous pouvons alors réduire le voisinage V tel que l'application de transition Π_{Δ^S} induite par le flot entre l'image de V par $\Pi_O \circ \Pi_{\Delta^-}$ et Σ_B soit bien définie pour ε assez petit. Soit alors q_ε l'image par la fonction de transition $\Pi_{\Delta^S} \circ \Pi_O \circ \Pi_{\Delta^-}$ de p_ε . Nous choisissons un système de coordonnées locales dans Σ_B pour lequel l'intersection de la variété centrale stable associée à Δ_ε^S est l'axe $z = 0$ et q_ε appartient à $z = 0$. Alors :

$$\Pi_{\Delta^S} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{\Delta^S}^y(x, y, \varepsilon) \\ \Pi_{\Delta^S}^z(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

avec :

$$\Pi_{S_1^+}^z(x, y, \varepsilon) = O(\varepsilon \ln x)$$

et $\Pi_{S_1^+}^y(x, y, \varepsilon)$ est exponentiellement petite. Nous obtenons donc la bonne définition de $\Pi_{\Delta^+} \circ \Pi_O \circ \Pi_{\Delta^-}$ pour ε assez petit et :

$$\Pi_{\Delta^S} \circ \Pi_O \circ \Pi_{\Delta^-} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{\Delta^+}^y(x, y, \varepsilon) \\ \Pi_{\Delta^+}^z(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

avec $\Pi_{\Delta^+}^y(x, y, \varepsilon)$ exponentiellement petite en ε et $\Pi_{\Delta^+}^z(x, y, \varepsilon) = O(z) + O(\varepsilon^2)$.

Nous choisissons à présent une section $\Sigma_{\mathcal{M}}$ transverse au flot proche de $\mathcal{M}^{-\infty, z_H}$. L'application de transition $\Pi_{B-\mathcal{M}}$ entre Σ_B et $\Sigma_{\mathcal{M}}$ est bien définie par redressement de la dynamique rapide. Pour ε assez petit :

$$\left(\bigcup_{z < z_H} \gamma_z \right) \cap \Sigma_{\mathcal{M}}$$

est une courbe donnée par un graphe au-dessus de y . Nous choisissons alors un système de coordonnées dans $\Sigma_{\mathcal{M}}$ tel que cette courbe coïncide avec $y = 0$ et que la coordonnée z sur Σ_B soit conservé dans $\Sigma_{\mathcal{M}}$. Alors :

$$\Pi_{\Delta-\mathcal{M}} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{\Delta-\mathcal{M}}^y(x, y, \varepsilon) \\ \Pi_{\Delta-\mathcal{M}}^z(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

où $\Pi_{\Delta-\mathcal{M}}^y(x, y, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ et $\Pi_{\Delta-\mathcal{M}}^z(x, y, \varepsilon) = z + O(\varepsilon)$.

Soit une section Σ_H transverse à \mathcal{L}^- . Alors d'après la proposition 25 et le théorème de Fénichel, l'application $\Pi_{\mathcal{M}-H}$ induite par le flot entre $\Sigma_{\mathcal{M}}$ et Σ_H est bien définie. En choisissant un système de coordonnées locales dans Σ_H centré au point d'intersection de $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ avec Σ_H , $\Sigma_{\mathcal{M}-H}(y, z)$ est exponentiellement petite en ε . Enfin, d'après l'hypothèse sur la nature du point de décrochage P pour la dynamique rapide, nous savons

que l'application Π_{H-A} de Σ_H dans Σ_A est bien définie et dans les coordonnées locales choisies initialement dans Σ_A , Π_{H-A} est exponentiellement contractante en ε . Nous ne détaillerons pas plus avant ce point, très similaire à celui du cas à une variable rapide. Nous pouvons montrer en utilisant les fonctions de transition à travers des sections $\hat{\Sigma}_P^{in}$ et $\hat{\Sigma}_P^{out}$ que la contraction exponentielle au voisinage de $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ suffit à provoquer une contraction exponentielle de l'application Π_{H-A} . Pour plus de précisions sur ce développement local, nous nous référons à [54].

En conclusion, il existe un voisinage V de p_0 dans Σ_A telle que l'application de premier retour soit bien définie et soit exponentiellement contractante. ■

7.4 Existence et unicité de l'orbite périodique

Le résultat précédent nous permet de donner la distribution des orbites périodiques.

Théorème 7.3 *Sous les hypothèses posées dans 7.2, il existe ε_0 tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, (P_ε) admet une unique orbite périodique attractive Γ_ε .*

Posons :

$$\Delta^{A-B} = \Delta \cap \{z_B \leq z \leq z_A = z_P\}$$

et le graphique généralisé :

$$\Gamma_0 = \Delta^{A-B} \cup \gamma_{z_A} \cup \tilde{\mathcal{M}}^{z_B, z_H} \cup \mathcal{L}^- \cup \gamma_{z_P}$$

où γ_P (resp. γ_B) est la connexion hétérocline définie par le Lemme 15 entre P et A (resp. B et C_{z_B}).

Alors la famille à un paramètre (Γ_ε) converge au sens de la distance de Hausdorff vers l'ensemble limite-périodique Γ_0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration. D'après le théorème 7.2, l'application de retour est bien définie sur un voisinage de p_0 pour ε assez petit et exponentiellement contractante. Ceci montre l'existence d'un unique point fixe attractif p_ε^* de l'application proche de p_ε , point d'intersection de $\mathcal{L}_\varepsilon^-$ prolongé par le flot de (P_ε) avec Σ_A . Ce point fixe correspond à une orbite périodique attractive Γ_ε de (P_ε) .

Nous rappelons que p_ε est dans un $O(\varepsilon^{2/3})$ -voisinage de p_0 . Ainsi, d'après le développement de $\Pi_\Delta^z = \Pi_{\Delta^+} \circ \Pi_O \circ \Pi_{\Delta^-}$, p_ε^* tend vers un point $p_1 \in \Sigma_{\Delta^-}$. L'orbite Γ_ε rencontre un voisinage exponentiellement petit par rapport à ε de B et s'approche à $O(\varepsilon)$ près de la connexion hétérocline γ_B . De plus, elle passe dans un $O(\varepsilon^{2/3})$ -voisinage de P et rencontre un voisinage exponentiellement petit par rapport à ε de A . Nous en déduisons que les trajectoires rapides définies par la famille Γ_ε sont γ_B et γ_P . Or, l'orbite Γ_ε rencontre un voisinage exponentiellement petit par rapport à ε de A (resp.

de B). D'autre part, Γ_ε passe dans un voisinage exponentiellement petit par rapport à ε de $\bar{\mathcal{M}}^{z_B, z_H}$. Enfin, la dynamique sur z étant de l'ordre de $O(\varepsilon)$, la famille d'orbite approche arbitrairement près tout cycle limite de $\bar{\mathcal{M}}^{z_B, z_H}$. Finalement Γ_0 est l'ensemble limite-périodique de (Γ_ε) . ■

Remarquons qu'une partie de Δ^+ est incluse dans Γ_0 . Nous avons donc, une nouvelle fois, montré l'existence d'un canard – l'ensemble limite-périodique Γ_0 – pour une classe de systèmes lents-rapides (P_ε) ne dépendant que du paramètre ε . En outre, l'ensemble limite-périodique associé à (P_ε) est l'union de variétés de dimension 1 et 2. Ceci est caractéristique des oscillations en salves.

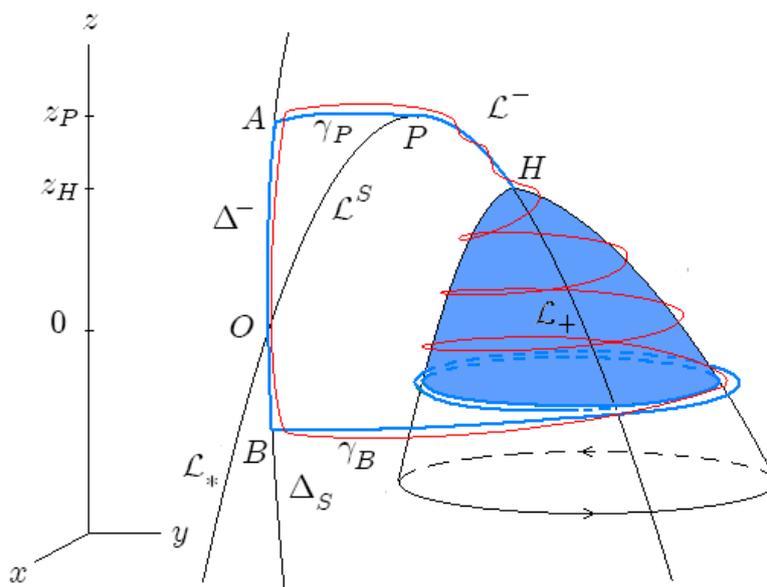


FIG. 7.3 – Ensemble limite-périodique Γ_0 (en bleu), limite de la famille d'orbites périodiques $(\Gamma_\varepsilon)_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0}$ de (P_ε) pour la distance de Hausdorff.

Chapitre 8

Rupture d'oscillations par bifurcation homocline

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux systèmes vérifiant les mêmes propriétés géométriques que dans le chapitre précédent, mais pour lesquels apparaissent deux bifurcations homoclines du système rapide pour des valeurs du paramètre z comprises entre 0 et z_H . Il apparaît alors une rupture de l'oscillation rapide quand l'orbite passe au voisinage du point de connexion homocline. Cependant, le comportement des orbites dans ce cas se révèle plus complexe du fait de l'existence d'orbites suivant une variété centrale.

Nous nous attachons, dans un premier temps, à décrire le comportement du flot global et les comportements possibles d'une orbite passant dans un voisinage du point de bifurcation homocline. Nous procédons ensuite à une analyse du flot local au voisinage de cette connexion homocline afin de caractériser l'application de transition associée. Nous décomposons alors l'application de retour induite par le flot sur une section transverse à celui-ci. Nous discutons ensuite les différents comportements des orbites. Enfin, nous appliquons les résultats des chapitres 7 et 8 à un système issu de la modélisation des dynamiques de populations.

8.1 Bifurcations homoclines du cycle limite rapide

8.1.1 Comportement qualitatif du flot

Nous considérons à présent les mêmes hypothèses sur (P_ε) que dans la section 7.2, mais nous supposons en outre que la dynamique rapide (R_z) subit deux connexions homoclines, l'une dite directe pour $z = z_{H_1}$, l'autre dite inverse pour $z = z_{H_2}$ (voir fig. 8.1). Nous nommerons ces connexions homoclines avec la même notation que les cycles

limites de la dynamique rapide, soit $C_{z_{H_1}}$ et $C_{z_{H_2}}$. Dans cette situation, les orbites du système (P_ε) peuvent adopter des comportements différents lors du passage près de la connexion homocline directe. Afin de décrire le flot en ce voisinage, nous sommes amenés à considérer les variétés centrale stable et instable de \mathcal{L}^S et la position de l'orbite par rapport à celles-ci.

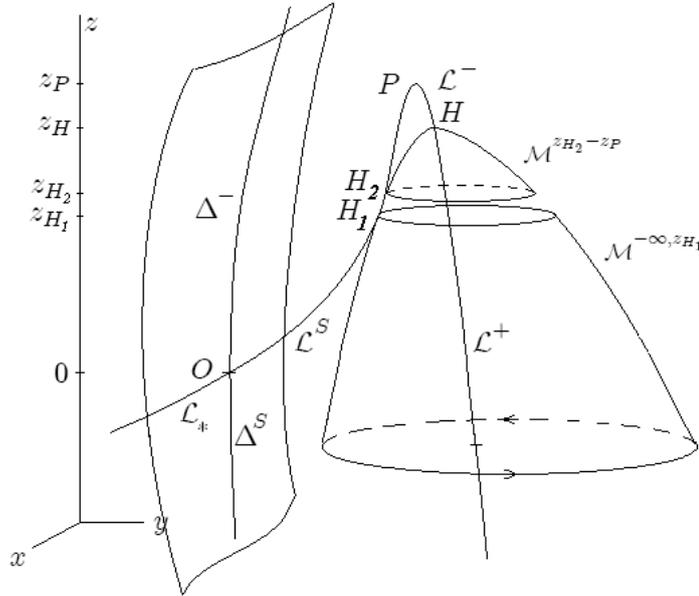


FIG. 8.1 – Ensemble critique de (P_ε) et sa décomposition selon la nature des points singuliers de la dynamique rapide. Variété \mathcal{M} constituée des cycles limites de la dynamique rapide. Connexions homoclines de la dynamique rapide pour $z = z_{H_1}$ et $z = z_{H_2}$. Le prolongement de la variété centrale stable $\mathcal{W}_\varepsilon^s$ de Δ_ε^S par le flot inverse de (P_ε) sépare l'espace des phases en deux parties invariantes.

Soient $\mathcal{W}_\varepsilon^c$, $\mathcal{W}_\varepsilon^s$ et $\mathcal{W}_\varepsilon^u$ les variétés centrale, centrale stable et centrale instable nées de la perturbation de \mathcal{L}^S pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Remarquons que $\mathcal{W}_\varepsilon^s$ sépare $\mathcal{W}_\varepsilon^u$ en deux parties, l'une rejoignant directement le voisinage de Δ^- , l'autre entourant les points de \mathcal{L}^+ avant de rejoindre ce même voisinage. Ainsi, selon la position de l'orbite par rapport à $\mathcal{W}_\varepsilon^s$, elle peut tourner une nouvelle fois autour \mathcal{L}^+ ou rejoindre directement le voisinage de Δ^- , ou enfin, si elle est très proche de $\mathcal{W}_\varepsilon^s$, l'orbite peut monter lentement en suivant $\mathcal{W}_\varepsilon^c$ pendant un certain temps. Dans ce dernier cas, l'orbite peut rejoindre un voisinage de la variété supérieure $\mathcal{M}^{z_{H_2}, z_H}$. Nous caractérisons ces deux types de comportements en analysant le flot au voisinage du point homocline H_1 .

8.1.2 Analyse au voisinage du point homocline

Il existe un système de coordonnées locales centré au point de bifurcation homocline H_1 pour lequel le système (P_ε) admet le linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_x x \\ \dot{y} = -\lambda_y y \\ \dot{z} = \lambda_z \varepsilon \end{cases} \quad (8.1)$$

où λ_x , λ_y et λ_z sont des constantes positives. Puisque l'orbite homocline bifurque en un cycle limite stable, nous pouvons supposer $\lambda_y > \lambda_x$.

Nous analysons alors le flot du système (8.1) dans le voisinage rectangulaire de H_1 :

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq \alpha, |y| \leq \beta, |z| \leq \gamma_\varepsilon\}$$

où α , β sont des constantes indépendantes de ε . Il sera suffisant de considérer $\gamma_\varepsilon = O(\varepsilon)$ assez grand pour pouvoir analyser l'application de premier retour de Σ_F dans Σ_R . Soient les faces supérieure, frontale, arrière et droite de ce rectangle (voir la figure 8.2) :

$$\begin{aligned} \Sigma_T &= \{(x, y, z) \in \mathcal{R} \mid z = \gamma_\varepsilon\}, & \Sigma_F &= \{(x, y, z) \in \mathcal{R} \mid x = \alpha\} \\ \Sigma_U &= \{(x, y, z) \in \mathcal{R} \mid x = -\alpha\}, & \Sigma_R &= \{(x, y, z) \in \mathcal{R} \mid y = \beta\} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Alors chaque orbite passant par la face droite Σ_R entre à l'intérieur de \mathcal{R} puis ressort par Σ_T , Σ_F ou Σ_U . Si l'orbite ressort par Σ_F , elle suit la variété centrale instable du col et donne naissance à une autre oscillation autour de la variété de cycles limites ; si elle ressort par Σ_U , elle rejoint le voisinage de Δ^- sous l'influence de la dynamique rapide. Ainsi, un bon choix de γ_ε permettra de caractériser les orbites qui quittent \mathcal{R} au travers de Σ_T comme celles suivant $\mathcal{W}_\varepsilon^c$.

Intégrons le système linéarisé (8.1) pour une donnée initiale $(x_0, \beta, z_0) \in \Sigma_R$:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \exp(\lambda_x t) \\ y(t) = \beta \exp(-\lambda_y t) \\ z(t) = z_0 + \lambda_z \varepsilon t \end{cases}$$

Nous obtenons directement :

Lemme 16 *L'orbite de (8.1) ayant pour donnée initiale $(x_0, \beta, z_0) \in \Sigma_R$ quitte \mathcal{R} à travers Σ_T si et seulement si :*

$$|x_0| < \alpha \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \frac{\lambda_x}{\lambda_z} (\gamma_\varepsilon - z_0)\right)$$

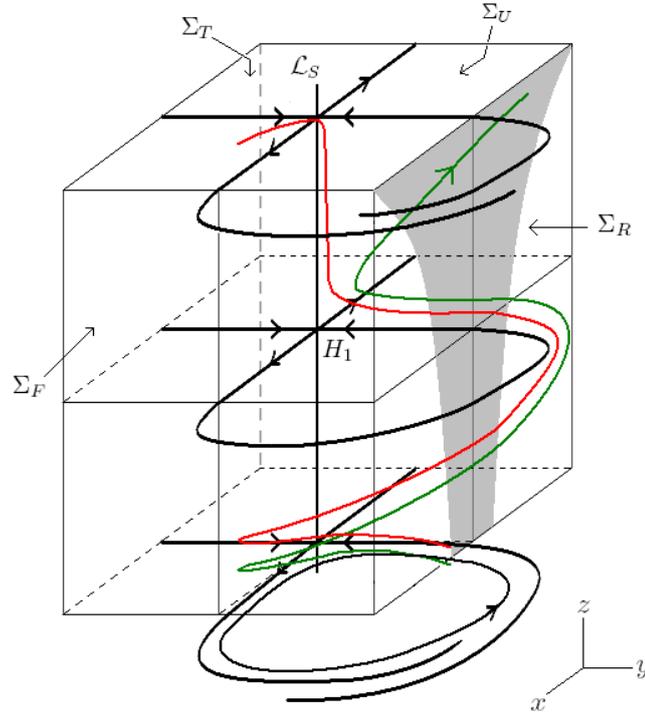


FIG. 8.2 – Voisinage rectangulaire \mathcal{R} de la connexion homocline. L'ensemble \mathcal{U}_ε est représenté en gris. Une orbite rencontrant \mathcal{U}_ε (en rouge) suit la variété centrale pour ressortir de \mathcal{R} par Σ_T . Une orbite passant par $\Sigma_R \setminus \mathcal{U}_\varepsilon$ par Σ_U ou Σ_F .

Nous définissons alors :

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \left\{ (x, y, \gamma_\varepsilon) \in \Sigma_R \mid |x| < \alpha \exp \left(-\frac{1}{\varepsilon} \frac{\lambda_x}{\lambda_z} (\gamma_\varepsilon - z) \right) \right\}$$

et $k_\varepsilon = \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \gamma_\varepsilon$. Ainsi \mathcal{U}_ε est un $O(\exp(-\frac{k_\varepsilon}{\varepsilon}))$ -voisinage de $\{(0, \beta, z) \in \mathcal{R} \mid |z| < \gamma_\varepsilon\}$ dans Σ_R . Cependant, remarquons que l'hypothèse $\gamma_\varepsilon = O(\varepsilon)$ ne permet pas de conserver la contraction exponentielle de \mathcal{U}_ε . Ainsi, la dilatation des orbites sortant par Σ_U selon la composante y au passage près de la connexion homocline est au plus $O(\exp(\frac{k_\varepsilon}{\varepsilon}))$.

8.1.3 Construction de l'application de retour au voisinage de $C_{z_{H_1}}$

Nous ne pouvons appliquer le théorème de Fénichel à la variété formée de cycles limites qu'en dehors d'un voisinage de la connexion homocline. Ainsi, nous analysons directement l'application de retour au voisinage de cette connexion en généralisant une construction élaborée par E. Lee et D. Terman dans [47].

Les trajectoires débutant en un point de :

$$\Sigma_R^+ = \{(x, \beta, z) \in \Sigma_R | x > 0\}$$

sorte de \mathcal{R} à travers Σ_F ou Σ_T . En posant $\mathcal{D}(\phi_\varepsilon) = \Sigma_R^+ \setminus \mathcal{U}_\varepsilon$, l'ensemble des points de Σ_R^+ par lesquels passent les trajectoires qui sortent de \mathcal{R} par Σ_F , on a :

$$\mathcal{D}(\phi_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Sigma_R^+$$

Soit $\phi_\varepsilon : \mathcal{D}(\phi_\varepsilon) \rightarrow \Sigma_F$ la fonction définie par le flot linéarisé. Alors :

$$\phi_\varepsilon : (x, \beta, z) \rightarrow \left(\alpha, \beta \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\frac{\lambda_y}{\lambda_x}}, z + \varepsilon \frac{\lambda_z}{\lambda_x} \ln \frac{\alpha}{x} \right)$$

Ainsi le calcul direct montre :

Lemme 17 *Soit $u(z)$ une fonction C^1 décroissante telle que :*

$$\hat{u} = \{(x, \beta, z) \in \Sigma_R^+ | x = u(z)\} \subset \mathcal{D}(\phi_\varepsilon)$$

Alors $\phi_\varepsilon(\hat{u})$ est une courbe C^1 incluse dans Σ_F :

$$\phi_\varepsilon(\hat{u}) = \{(\alpha, y, z) \in \Sigma_F | y = \varkappa(z)\}$$

avec $\varkappa'(z) < 0$ pour tout z .

L'orbite homocline $C_{z_{H_1}}$ de la dynamique rapide rencontre Σ_F en $(\alpha, 0, 0)$ et Σ_R en $(0, \beta, 0)$. Ainsi, quand $\varepsilon = 0$, le flot définit un difféomorphisme d'un voisinage de $(\alpha, 0, 0)$ dans Σ_F sur un voisinage de $(0, 0, \gamma_\varepsilon)$ dans Σ_R . On peut trouver un ensemble $\mathcal{D}(\psi)$ indépendant de ε inclus dans Σ_F et contenant $(\alpha, 0, 0)$ tel que la fonction $\psi_\varepsilon : \mathcal{D}(\psi) \rightarrow \Sigma_R$ est un difféomorphisme d'un sous-ensemble Σ_F sur Σ_R pour tout ε assez petit. Posons :

$$\psi_\varepsilon(y, z) \rightarrow (\psi_\varepsilon^x(y, z), \psi_\varepsilon^z(y, z))$$

Comme ψ_ε est une perturbation régulière de ψ_0 , nous calculons en premier lieu $D\psi_0$. Puisque $\psi_0^z(y, z) = z$, on a, sur tout $\mathcal{D}(\psi)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_0^z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \psi_0^z}{\partial z} &= 1 \end{aligned}$$

En outre, \mathcal{W}_0^s et \mathcal{W}_0^u s'intersectent transversalement ; on peut donc écrire :

$$\psi_0(\alpha, 0, z) = (\tilde{x}(z), \beta, z)$$

où $\tilde{x}(z)$ est une fonction C^1 telle que $\tilde{x}(0) = 0$ et :

$$\tilde{x}'(0) = \frac{\partial \psi_0^x}{\partial z}(0, 0) < 0$$

Finalement, posons :

$$\frac{\partial \psi_0^x}{\partial y}(0, 0) = \mu > 0$$

alors :

$$D\psi_0(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & \tilde{x}'(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors puisque ψ_ε est une perturbation régulière de ψ_0 , nous obtenons le résultat suivant :

Lemme 18 *Soit $v(z)$ une fonction C^1 décroissante telle que :*

$$\hat{v} = \{(\alpha, y, z) \in \Sigma_F | y = v(z)\} \subset \mathcal{D}(\psi)$$

Alors $\psi_\varepsilon(\hat{v})$ est une courbe C^1 incluse dans Σ_R :

$$\psi_\varepsilon(\hat{v}) = \{(x, \beta, z) \in \Sigma_F | x = \varkappa(z)\}$$

avec, pour tout z :

$$\varkappa'(z) < \frac{\tilde{x}'(0)}{2}$$

Nous pouvons finalement définir la fonction de retour suivante :

$$\pi_\varepsilon = \psi_\varepsilon \circ \phi_\varepsilon : \mathcal{D}(\phi_\varepsilon) \subset \Sigma_R \rightarrow \Sigma_R$$

telle que :

$$\pi_\varepsilon(\hat{u}) = \psi_\varepsilon(\hat{v}) = \{(\alpha, \beta, z) \in \Sigma_R^+ | x = \varkappa(z)\}$$

Soit $K > 0$ fixé assez grand. D'après le théorème de Fénichel, $\bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{-K, (z_{H_1} - \gamma_\varepsilon/2)} \cap \Sigma_R$ est une courbe bien définie donnée par un graphe $x = u(z)$ avec u est C^1 et décroissante. Par hypothèse, $\dot{z} > 0$ près de $\bar{\mathcal{M}}_\varepsilon$, nous pouvons donc, en utilisant les itérées de π_ε , prolonger cette courbe par le flot afin qu'elle contienne des points de $\Sigma_R \cap \{z > 0\}$ (voir figure 8.3). Alors, cette courbe \hat{m}_ε est donnée par un graphe :

$$x = \tilde{x}_\varepsilon(z), \quad z < z_\varepsilon^{\text{sup}} = O(\varepsilon)$$

dans Σ_R avec, pour tout $z < z_\varepsilon^{\text{sup}}$:

$$\tilde{x}'_\varepsilon(z) < \frac{\tilde{x}'(0)}{2}$$

Ainsi, \hat{m}_ε coupe transversalement $\mathcal{W}_\varepsilon^s \cap \Sigma_R$.

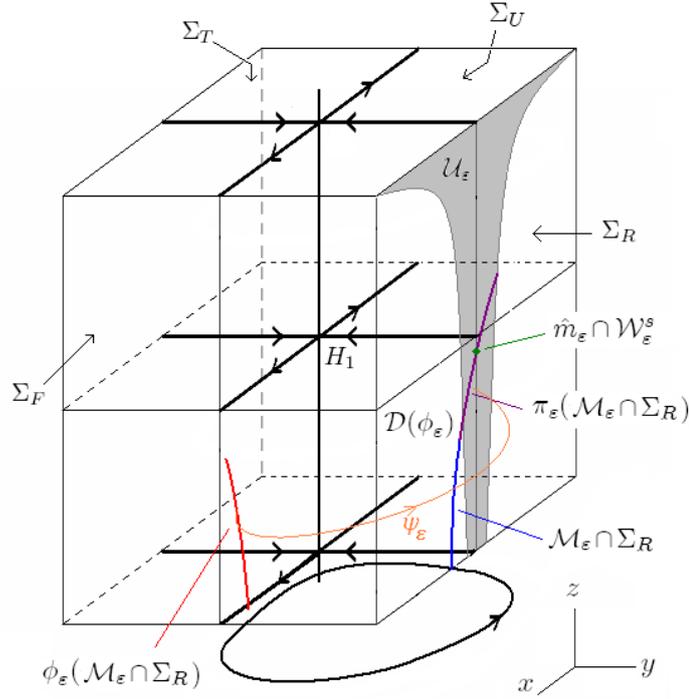


FIG. 8.3 – La courbe $\bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{-K, (z_{H_1} - \gamma_\varepsilon/2)} \cap \Sigma_R$ (en bleu), incluse dans $\mathcal{D}(\phi_\varepsilon)$ pour ε assez petit est prolongée par les itérées de $\pi_\varepsilon = \psi_\varepsilon \circ \phi_\varepsilon$ en \hat{m}_ε . Cette courbe coupe transversalement $\mathcal{W}_\varepsilon^s \cap \Sigma_R$ (en vert). La courbe $\hat{m}_\varepsilon \cap \mathcal{U}_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon$ est de longueur $O\left(\exp\left(-\frac{k_\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right)$.

8.1.4 Caractérisation des orbites suivant la variété $\mathcal{W}_\varepsilon^c$

Nous utilisons la généralisation de la notion de phase asymptotique (cf proposition 25) pour caractériser les orbites de (P_ε) suivant $\mathcal{W}_\varepsilon^c$ et ressortant de \mathcal{R} par Σ_T . Pour $p \in \bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{-K, (z_{H_1} - \gamma_\varepsilon/2)}$, soit $\mathcal{V}_\varepsilon(p)$ la courbe des points ayant même phase asymptotique que p pour (P_ε) . D'après la proposition 25, $\mathcal{V}_\varepsilon(p)$ est une courbe proche de $z = z_p$. Soit $T_\varepsilon(p)$ le temps tel que :

$$\forall t \in [0, T_\varepsilon(p)], \phi_t^\varepsilon(p) \in \bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{z_p, (z_{H_1} - \gamma_\varepsilon/2)}$$

où ϕ_t^ε est le flot de (P_ε) . Nous savons alors que $T_\varepsilon(p) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Alors $\phi_{[0, T_\varepsilon(p)]}^\varepsilon(p)$ est l'ensemble des points approchant asymptotiquement l'orbite de (P_ε) passant par p .

Considérons à présent le flot inverse de (P_ε) . Posons $\hat{m}_\varepsilon \cap \mathcal{U}_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon$. Puisque \hat{m}_ε coupe transversalement $\mathcal{W}_\varepsilon^s \cap \Sigma_R$ et \mathcal{U}_ε est un $O\left(\exp\left(-\frac{k_\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right)$ -voisinage de $\{(0, \beta, z) \in \mathcal{R} \mid |z| < \gamma_\varepsilon\}$ dans Σ_R , Λ_ε est une courbe de longueur $O\left(\exp\left(-\frac{k_\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right)$. D'après la proposition 24, la surface :

$$\mathcal{S}_\varepsilon = \left\{ \phi_{[-\infty, 0]}^\varepsilon(p) \mid p \in \Lambda_\varepsilon \right\}$$

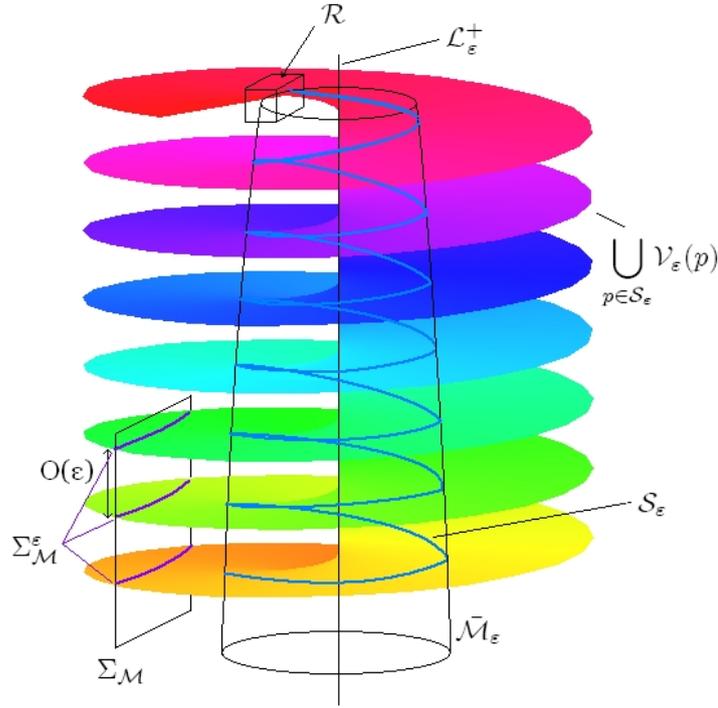


FIG. 8.4 – Volume constitué de la surface \mathcal{S}_ε et des fibres de phase isochrone associée à chacun de ses points pour (P_ε) . Les points de même phase sont représentés par la même couleur. L'intersection $\Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ de ce volume avec la section $\Sigma_{\mathcal{M}}$ est constituée de bandes de largeur $O(\exp(-\frac{k_\varepsilon}{\varepsilon}))$ (largeur de \mathcal{S}_ε) et espacées de $O(\varepsilon)$.

est une surface spiralant autour de $\bar{\mathcal{M}}_\varepsilon$ et dont la largeur est $O(\exp(-\frac{k_\varepsilon}{\varepsilon}))$.

Nous sommes à présent en mesure de caractériser les points d'une section $\Sigma_{\mathcal{M}}$ transverse au flot proche de $\mathcal{M}^{-\infty, z_{H_1}}$ pour lesquels l'orbite de (P_ε) associée suit $\mathcal{W}_\varepsilon^s$ au voisinage de la connexion homocline. Soit $q \in \Sigma_{\mathcal{M}}$ et supposons que le point d'intersection q_1 de l'orbite de (P_ε) passant par q appartient à \mathcal{U}_ε . D'après la proposition 25, il existe un point p de $\bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{-K, z_{H_1}}$ (en choisissant K assez grand) qui a la même phase asymptotique que p et, en notant p_1 le point d'intersection de l'orbite passant par p avec \mathcal{U}_ε , la distance de q_1 à p_1 est $O(e^{-l/\varepsilon})$, $l > 0$. Ainsi, il nous suffit donc de considérer les points q ayant la même phase asymptotique qu'un point de Λ_ε pour connaître les orbites qui rencontre \mathcal{U}_ε .

Par le flot inverse de (P_ε) , les orbites partant de \mathcal{U}_ε restent sur \mathcal{S}_ε qui spirale autour de $\bar{\mathcal{M}}_\varepsilon^{-K, z_{H_1}}$. Considérons alors l'ensemble :

$$\bigcup_{p \in \mathcal{S}_\varepsilon} \mathcal{V}_\varepsilon(p)$$

Il s'agit d'un volume en forme de "tire-bouchon", constitué de la surface \mathcal{S}_ε et des fibres

telles que, sur chacune d'elles, tous les points ont même phase asymptotique pour (P_ε) que le point de base p sur \mathcal{S}_ε (voir figure 8.4). Alors l'intersection de ce volume avec $\Sigma_{\mathcal{M}}$ est constituée de bandes de largeur $O\left(\exp\left(-\frac{k\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right)$. Enfin, la dynamique lente en $O(\varepsilon)$ implique que la distance entre deux bandes consécutives est $O(\varepsilon)$.

Nous posons, pour toutes valeurs de ε assez petites :

$$\Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon = \Sigma_{\mathcal{M}} \cap \left(\bigcup_{p \in \mathcal{S}_\varepsilon} \mathcal{V}_\varepsilon(p) \right)$$

qui est donc l'ensemble des points de $\Sigma_{\mathcal{M}}$ tels que les orbites de (P_ε) associées suivent la variété centrale $\mathcal{W}_\varepsilon^c$ durant un temps assez long pour qu'elles sortent de \mathcal{R} par Σ_T .

Remarque 8.1 Dans [47], les auteurs ont montré que la vitesse de déplacement des bandes constituant $\Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ selon la composante z constituant $\Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ est $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Nous ne reprenons pas cette démonstration technique mais nous utilisons ce résultat dans la section suivante pour connaître les valeurs de ε pour lesquelles l'image de l'application de retour globale est disjointe de $\Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon$.

8.2 Distribution des orbites périodiques

8.2.1 Alternance de comportement

Nous sommes à présent en mesure de discuter une alternative décidant du comportement des orbites. Nous suivons celles-ci en développant les fonctions de transition intermédiaires comme dans les démonstrations précédentes.

Considérons Σ_U définie par (8.2) et une section Σ_{Δ^-} transverse au flot proche de Δ^- . Par perturbation régulière de la dynamique rapide, nous savons que l'application de transition $\Pi_{H_1-\Delta^-}$ induite par le flot de (P_ε) est bien définie entre Σ_U et Σ_{Δ^-} . Nous choisissons le système de coordonnées utilisé dans 8.1.2 dans Σ_U et un système de coordonnées locales centré en $\gamma_{z_{H_1}} \cap \Sigma_{\Delta^-}$ dans Σ_{Δ^-} tel que l'intersection de $\mathcal{W}_\varepsilon^u$ avec Σ_{Δ^-} soit $y = 0$. Il nous est possible de conserver la coordonnée z définie sur Σ_U afin de simplifier l'expression de la fonction de transition. Cette dernière, d'après l'attractivité de Δ^- et par perturbation régulière de la dynamique rapide admet alors le développement :

$$\Pi_{H_1-\Delta^-} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{H_1-\Delta^-}^y(x, y, \varepsilon) \\ \Pi_{H_1-\Delta^-}^z(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

où $\Pi_{\Delta^-\mathcal{M}}^y(x, y, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ et $\Pi_{S_1^+}^z(x, y, \varepsilon) = z + O(\varepsilon)$.

Soit A le point d'intersection de Δ^- avec le plan $z = z_{H_1}$. Considérons le difféomorphisme Ψ_T qui conjugue localement au voisinage de T le système (P_ε) à la forme locale

($CNTC_\varepsilon^{loc}$). Puisque Δ est donné par un graphe au-dessus de z , ce difféomorphisme est bien défini sur tout voisinage compact de Δ contenant 0. Il définit ainsi un nouveau système de coordonnées pour lequel Δ est l'axe de la variable \hat{z} et $A = (0, 0, \hat{z}_A)$. Soit alors $B = (0, 0, -\hat{z}_A) \in \Delta_S$. En revenant au système de coordonnées originel, nous posons z_B la coordonnées en z de B . Soit Σ_{Δ^S} une section transverse au flot proche de Δ^S .

Nous retrouvons une situation similaire à la démonstration du théorème 7.2 à ceci près que les points A et B de Δ sont plus près de l'origine. Par les mêmes arguments que dans cette démonstration, la fonction de transition entre Σ_{Δ^-} et Σ_{Δ^S} . Nous choisissons un système de coordonnées locales dans Σ_{Δ^S} pour lequel l'intersection de la variété centrale stable associée à Δ_ε^S est l'axe $z = 0$ et q_ε appartient à $z = 0$. Alors la fonction de transition Π_Δ induite par le flot de (P_ε) entre Σ_{Δ^-} et Σ_{Δ^S} est bien définie pour ε assez petit et admet le développement suivant :

$$\Pi_\Delta \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_\Delta^y(x, y, \varepsilon) \\ \Pi_\Delta^z(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

avec $\Pi_\Delta^y(x, y, \varepsilon)$ exponentiellement petite en ε , soit $O\left(\exp\left(-\frac{k_1}{\varepsilon}\right)\right)$ où $k_1 > 0$, et $\Pi_\Delta^z(x, y, \varepsilon) = O(z) + O(\varepsilon)$. Enfin, par redressement du champ de vecteurs rapides, nous obtenons la fonction de transition entre Σ_U et $\Sigma_{\mathcal{M}}$, soit $\Pi_{U-\mathcal{M}}$, induite par le flot. cette application est exponentiellement contractante selon la composante y . Par contre, l'analyse du mécanisme d'éjection transcritique ne permet pas de maîtriser suffisamment l'image de la fonction de transition $\Pi_{U-\mathcal{M}}$ sur la composante z .

Ici se présente l'alternative dépendant fortement des fonctions définissant la dynamique. Puisque, d'après 8.1.4, les bandes constituant :

$$\Sigma_{\Delta^S}^\varepsilon = \Sigma_{\Delta^S} \cap \left(\bigcup_{p \in \mathcal{S}_\varepsilon} \mathcal{V}_\varepsilon(p) \right)$$

sont espacées de $O(\varepsilon)$ selon la composante z , il est possible que l'image de :

$$V_\varepsilon = \Sigma_U \cap \{z \geq 0\}$$

par $\Pi_{U-\mathcal{M}}$ soit incluse dans $\Sigma_{\mathcal{M}} \setminus \Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ pour certaines valeurs de ε . En effet, (voir remarque 8.1), l'évolution de la composante en z des bandes constituant $\Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ est $O(1/\varepsilon)$. De manière évidente, l'image de V_ε par $\Pi_{U-\mathcal{M}}$ se déplace en $O(\varepsilon)$. Ainsi, chaque bande de $\Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon$ traverse $\Pi_{U-\mathcal{M}}(V_\varepsilon)$ quand ε tend vers 0. Il existe donc une suite décroissante de limite nulle (ε_i) et une suite (c_i) vérifiant :

$$\forall i, c_i + c_{i+1} < \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$$

telles que pour ε appartenant à l'un des intervalles $[\varepsilon_i - c_i, \varepsilon_i + c_i]$, on ait :

$$\Pi_{U-\mathcal{M}}(V_\varepsilon) \cap \Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon = \emptyset$$

Nous nous plaçons dans un premier temps sous cette hypothèse et supposons que ε est tel que nous puissions trouver un tel voisinage. Alors, toute orbite de (P_ε) ayant une condition initiale sur V_ε rencontre Σ_{Δ^S} en un point de $\Sigma_{\mathcal{M}} \setminus \Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon$. Par construction de $\Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon$, cette orbite rencontre Σ_R^+ en un point de $\Sigma_R^+ \setminus \mathcal{U}_\varepsilon$. Nous savons alors que l'orbite ne suit pas la variété centrale $\mathcal{W}_\varepsilon^c$ et qu'elle sort de \mathcal{R} par un point de Σ_R . L'application de retour induite par (P_ε) est bien définie de V_ε dans lui-même (voir fig. 8.5). Dans ce cas, il existe une orbite périodique attractive. Cependant, la contraction de l'application de premier retour (bien définie sous ces hypothèses) n'étant pas uniforme, nous ne pouvons rien dire de l'unicité d'une telle orbite.

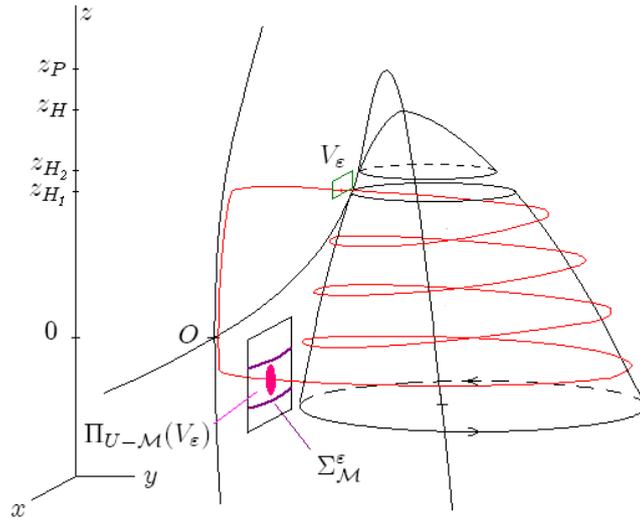


FIG. 8.5 – Cas $\Pi_{U-\mathcal{M}}(V_\varepsilon) \cap \Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon = \emptyset$. Il existe alors une orbite périodique attractive quittant le voisinage de la connexion homocline pour rejoindre directement la variété Δ^- .

Dans l'autre cas de l'alternative, il est impossible de trouver γ_ε tel que l'image par $\Pi_{U-\mathcal{M}}$ de Σ_U soit disjointe de $\Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon$. Alors les orbites peuvent présenter deux comportements oscillatoires différents. S'il existe un point fixe de l'application de retour définie sur une section transverse aux fibres rapides et proche de P , alors il existe une orbite périodique attractive, comparable à celle du chapitre 7, mais suivant la variété $\mathcal{W}_\varepsilon^c$ pendant un temps assez long pour reprendre son oscillation rapide autour de la variété supérieure de cycles limites $\mathcal{M}^{z_{H_2}, z_H}$ (voir fig. . De fait, l'orbite périodique coupe alors $\Sigma_{\mathcal{M}}$ en un point de $\Sigma_{\mathcal{M}}^\varepsilon$.

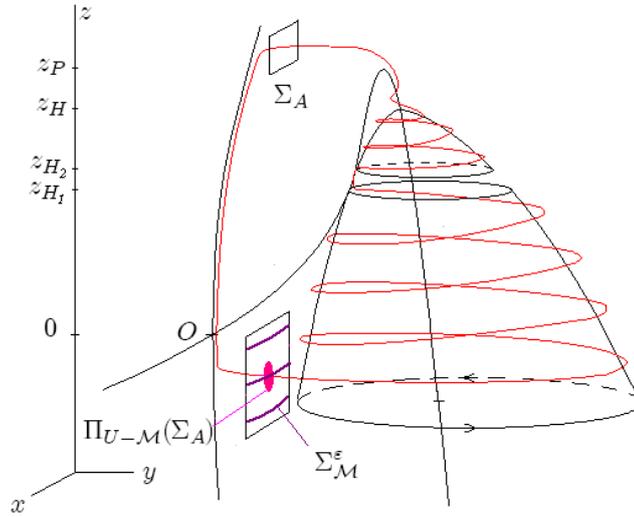


FIG. 8.6 – Cas d'existence d'un point fixe de l'application de retour bien définie de $\Sigma_{\mathcal{M}}^{\varepsilon}$ dans lui-même. Il existe alors une unique orbite périodique suivant la variété centrale stable $\mathcal{W}_{\varepsilon}^s$ entre les deux connexions homoclines, reprenant son oscillation autour de $\mathcal{M}^{z_{H_1}, z_H}$ et passant au voisinage de P .

S'il n'existe pas de point fixe, en prenant une donnée initiale dans Σ_U , l'orbite rejoint le voisinage de Δ^- , descend près de cette variété puis est éjectée pour couper $\Sigma_{\mathcal{M}}$. Si ce point d'intersection n'appartient pas à $\Sigma_{\mathcal{M}}^{\varepsilon}$, l'orbite spirale autour de $\mathcal{M}^{-\infty, z_{H_1}}$ puis est directement expulsée vers Δ . Si ce point d'intersection appartient à $\Sigma_{\mathcal{M}}^{\varepsilon}$, l'orbite suit la variété centrale $\mathcal{W}_{\varepsilon}^c$ pour éventuellement rejoindre un voisinage de $\mathcal{M}^{-\infty, z_{H_1}}$. Il nous est alors impossible de donner un quelconque résultat d'existence (et encore moins d'unicité) d'une orbite périodique.

Finalement, il apparaît que cette classe de système admet des orbites de types variés révélant un caractère d'instabilité particulier. D'autres hypothèses sont nécessaires sur f , g et h afin de pouvoir trouver une condition suffisante pour que se produise un cas ou un autre. Il apparaît notamment que les valeurs propres associées au système rapide au point de connexion homocline H_1 joue un rôle prépondérant dans l'alternative décrite ci-dessus.

8.2.2 Ensemble limite-discrète périodique

Nous notons γ_{H_1} la connexion hétérocline de (P_0) entre H_1 , col pour la dynamique rapide, et le point A , noeud pour la dynamique rapide. De même, soit γ_B la connexion hétérocline entre le point B , col pour la dynamique rapide et le cycle limite attractif C_{z_B} . Dans le cas où pour certaines valeurs de ε , il existe une orbite périodique Γ_{ε} , pour

$\varepsilon \in [\varepsilon_i - c_i, \varepsilon_i + c_i]$, nous pouvons extraire de cette famille une suite dont la limite, pour la distance de Hausdorff est :

$$\Gamma_0 = \Delta^{A-B} \cup \overline{\gamma_B} \cup \overline{\mathcal{M}^{z_B, z_{H_1}}} \cup \overline{\gamma_{H_1}}$$

où :

$$\Delta^{A-B} = \Delta \cap \{z_B \leq z \leq z_{H_1} = z_A\}$$

Il est important de remarquer que cette limite n'est pas indépendante de la suite extraite choisie. Il est donc approprié de distinguer cette construction de celle des ensembles limite-périodiques classiques (à limite continue). Il apparaît alors, d'après la discussion précédente, que prévoir les ensembles limite-discrète-périodiques possibles donnerait de précieuses informations sur la forme des orbites périodiques pouvant apparaître pour le système.

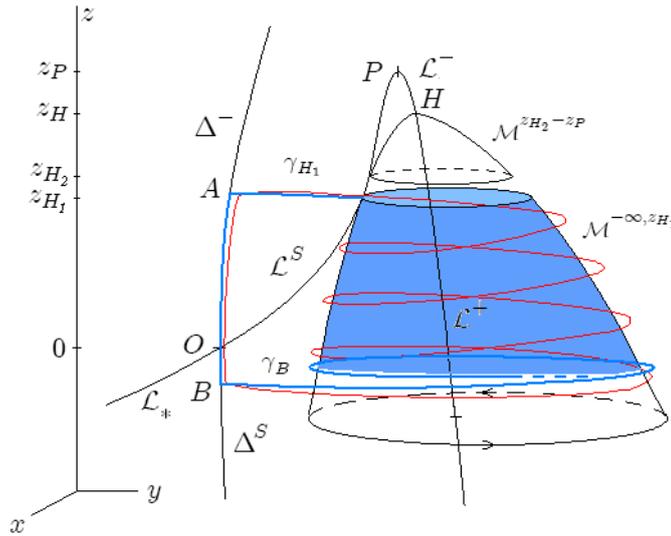


FIG. 8.7 – Limite pour la distance de Hausdorff de la suite d'orbites périodiques (Γ_{ε_i}) de (P_{ε_i}) .

8.3 Applications au système tritrophique

8.3.1 Présentation

On définit le système lent-rapide suivant, construit à partir d'une dynamique rapide plane naturelle :

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dT} &= X \left(R \left(1 - \frac{X}{K} \right) - \frac{P_1 Y}{S_1 + X} \right) \\ \frac{dY}{dT} &= Y \left(E_1 \frac{P_1 X}{S_1 + X} - D_1 - \frac{P_2 Z}{S_1 + Y} \right) \\ \frac{dZ}{dT} &= \varepsilon Z \left(E_2 \frac{P_2 Y}{S_2 + Y} - D_2 \right)\end{aligned}\tag{8.3}$$

où X , Y et Z sont des variables de représentation de trois populations : X est la proie de Y , Z est un super-prédateur chassant Y . En plaçant un effet de seuil K pour le comportement de la variable X en l'absence de Y , on modélise simplement le phénomène de saturation d'une population ne pouvant croître indéfiniment - soit une croissance logistique dont l'amplitude est donnée par la constante R .

Les interactions entre les prédateurs et leur proie respective sont des réponses de Holling type II définis par les paramètres positifs suivants :

- P_j : Taux de prédation maximaux
- S_j : Constantes de demi-saturation
- D_j : Taux de mortalité
- E_j : Efficacités de prédation

$j = 1$ concernant le prédateur Y , $j = 2$ concernant le super-prédateur Z .

Nous mettons évidemment de côté le cas où les prédateurs ne peuvent survivre même si leur nourriture est infiniment abondante en supposant toujours $E_i A_i > D_i$. Enfin, puisqu'il est naturel de considérer une évolution plus lente pour le super-prédateur que pour la proie et le prédateur, nous introduisons le paramètre ε afin de rendre le système lent-rapide, et nous envisageons l'étude de ce système du point de vue des dynamiques lentes-rapides. De fait, ce système n'est pas issu d'une dédimensionnalisation mais trouve cependant une interprétation dans le cadre des dynamiques de populations lorsque l'évolution du nombre de super-prédateurs est considérée lente par rapport à celle du prédateur et de la proie.

Pour obtenir une forme plus simple et maniable, Klebanoff & Hastings, dans [40], ont utilisé les changements de variables suivants :

$$x = \frac{X}{K}, \quad y = \frac{Y}{K E_1}, \quad z = \frac{Z}{K E_1 E_2}, \quad t = RT\tag{8.4}$$

qui conduisent au système (TT_ε) suivant que nous utiliserons dans cette étude :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \left(1 - x - \frac{a_1 y}{1 + b_1 x} \right) = f(x, y, z) \\ \dot{y} &= y \left(\frac{a_1 x}{1 + b_1 x} - d_1 - \frac{a_2 z}{1 + b_2 y} \right) = g(x, y, z) \\ \dot{z} &= \varepsilon \cdot z \left(\frac{a_2 y}{1 + b_2 y} - d_2 \right) = h(x, y, z) \end{aligned} \quad (8.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{KA_1 E_1}{RB_1}, & b_1 &= \frac{K}{B_1}, & d_1 &= \frac{D_1}{R} \\ a_2 &= \frac{KA_2 E_1 E_2}{RB_2}, & b_2 &= \frac{KE_1}{B_2}, & d_2 &= \frac{D_2}{R} \end{aligned}$$

8.3.2 Analyse de l'ensemble critique

Les axes et les faces de l'octant positif \mathbb{R}_+^3 sont des ensembles invariants du système (8.5). Nous limitons alors l'espace des phases à cet octant. En outre, nous supposons dans la suite $a_1 - d_1(b_1 + 1) > 0$ ce qui implique que le point d'équilibre de (8.5) :

$$M = (x_M, y_M, 0) = \left(\frac{d_1}{a_1 - b_1 d_1}, \frac{a_1 - d_1(b_1 + 1)}{(a_1 - b_1 d_1)^2}, 0 \right) \quad (8.6)$$

est dans l'espace des phases.

L'ensemble critique s'écrit alors comme l'union $\Delta \cup \mathcal{L}$ avec les paramétrisations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta &= \{(1, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}_+\} \\ \mathcal{L} &= \{(x, y_L(x), z_L(x)) \mid x \in \mathbb{R}_+\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_L(x) &= \frac{1}{a_1} (1 - x)(1 + b_1 x) \\ z_L(x) &= \frac{(a_1 x - d_1(b_1 x + 1))(a_1 + b_2(1 - x)(1 + b_1 x))}{a_1 a_2 (1 + b_1 x)} \end{aligned}$$

On notera que Δ et \mathcal{L} ont un point d'intersection $T = (1, 0, z_T)$ où :

$$z_T = \frac{(a_1 - d_1(b_1 + 1))}{a_2(1 + b_1)} = \frac{a_1}{a_2(1 + b_1)} - \frac{d_1}{a_2}$$

que l'on supposera positif dans la suite. En outre, on suppose d_1 assez petit tel que :

$$\exists x_P > 0, \quad z_L'(x_P) = 0$$

Notons (voir figure 8.8) :

$$\begin{aligned}\Delta^- &= \Delta \cap \{z > z_T\}, & \Delta^S &= \Delta \cap \{0 < z < z_T\} \\ \mathcal{L}^S &= \mathcal{L} \cap \{x < x_P\}, & \mathcal{L}^\pm &= \mathcal{L} \cap \{x > x_P\}\end{aligned}$$

Alors, on vérifie que L^\pm est constitué de points singuliers répulsifs ou attractifs (pas de cols) pour la dynamique rapide, \mathcal{L}^S de cols dont la direction attractive est x et Δ^- des noeuds attractifs. Précisons également que les points de Δ^S sont également des cols dont la direction attractive est x .

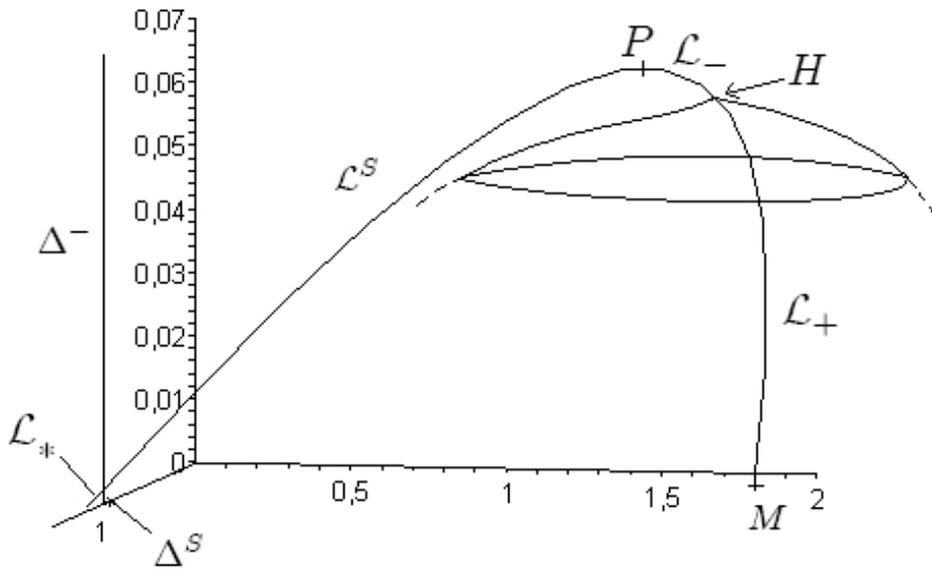


FIG. 8.8 – Ensemble critique de (TT_ε) pour les valeurs des paramètres (8.7) et $d_1 = 0.1$. La décomposition selon la nature des points singuliers de la dynamique rapide montre que le système vérifie les propriétés de la classe de systèmes étudiés dans les chapitres 7 et 8.

8.3.3 Analyse de bifurcations

Nous pouvons alors décrire les bifurcations du système rapide selon les paramètres z et d_1 . Le point singulier $(0, 1)$ subit une bifurcation col-noeud transcritique sur la courbe :

$$\mathcal{T} : z = \frac{a_1}{a_2(1+b_1)} + \frac{d_1}{a_2} > 0, \quad d_1 > 0$$

Pour $z < z_L(x_P)$ assez grand, le col appartenant à \mathcal{L}^S et le noeud attractif appartenant à \mathcal{L}^- disparaissent, quand z croît, par bifurcation col-noeud quand :

$$\mathcal{P} : z = z_L(x_P)$$

Nous noterons également l'occurrence d'une bifurcation de Hopf surcritique qui nous permet de décomposer \mathcal{L}^\pm en \mathcal{L}^+ constitués de foyers répulsifs et \mathcal{L}^- constitués de points attractifs (noeuds et foyers) pour la dynamique rapide. Cette bifurcation engendre un cycle limite C_z du système dynamique rapide pour $z < z_H$ qui entoure le point singulier.

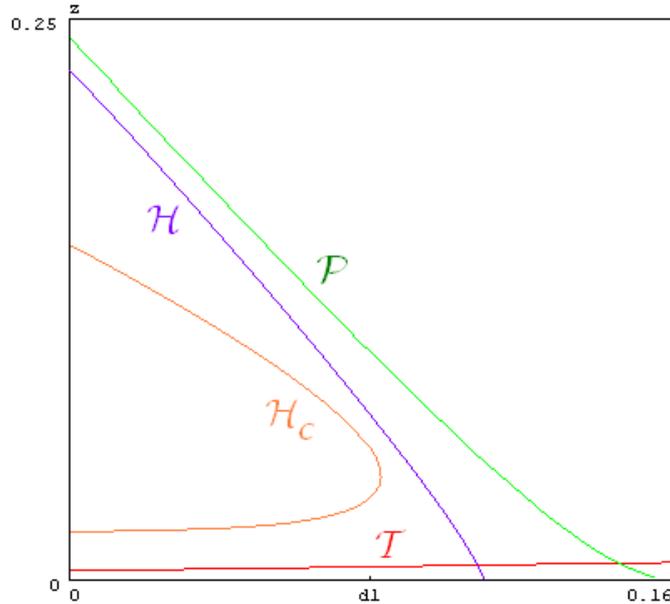


FIG. 8.9 – Diagramme de bifurcations de la dynamique rapide du système selon d_1 et z . Les courbes \mathcal{H} , \mathcal{P} , \mathcal{T} donnent respectivement, selon la valeur de d_1 , la valeur de z pour laquelle se produisent les bifurcations de Hopf, pli et transcritique. Pour $d_1 = d_1^{Hc}$, apparaît une unique connexion homocline. Pour $d_1 < d_1^{Hc}$, les deux points appartenant à la courbe \mathcal{H}_c sont les valeurs de z des connexions homoclines directe et inverse de la dynamique rapide.

Nous considérons les valeurs des paramètres fixes suivantes :

$$a_1 = 0.8, \quad b_1 = 4, \quad a_2 = 42, \quad b_2 = 40, \quad d_2 = 1 \quad (8.7)$$

qui seront utilisées pour les simulations dans la sous-section suivante. L'ensemble des occurrences des bifurcations de (R_z) selon z et d_1 est résumé dans la figure 8.9. Remarquons que la courbe de bifurcation transcritique \mathcal{T} dans (d_1, z) admet une équation simple. Celles de la bifurcation de Hopf \mathcal{H} et de la bifurcation pli \mathcal{P} sont calculables mais ont des expressions très lourdes. A contrario, nous n'avons pas de méthode pour exprimer les valeurs de z pour lesquelles apparaissent les connexions homoclines de la dynamique rapide en fonction de d_1 . Nous avons donc utilisé LOCBIF afin de tracer

la courbe \mathcal{H}_c dans la figure suivante. Il apparaît alors une valeur $d_1^{Hc} \simeq 0.08273891$ pour laquelle il existe une unique connexion homocline du col de la dynamique rapide. Pour $d_1 < d_1^{Hc}$, deux bifurcations homoclines du cycle limite rapide se produisent pour $z = z_{H_1}$ et $z = z_{H_2}$ avec $z_{H_1} < z_{H_2}$.

8.3.4 Portrait de phase et simulations

Nous fixons dans toutes la suite les valeurs des paramètres a_1, a_2, b_1, b_2, d_2 donnés par (8.7) et choisissons différentes valeurs de d_1 .

D'après l'analyse précédente, pour $d_1 > d_1^{Hc}$, le système (TT_ε) vérifie les hypothèses du théorème 7.1. Il existe ainsi, pour toute valeur de ε assez petite, une orbite périodique attractive γ_ε globalement attractive dans \mathbb{R}_+^3 . Ainsi observe-t-on un comportement d'oscillations en salves, les orbites γ_ε s'approchant arbitrairement près alternativement de la variété de cycles limites de la dynamique rapide et de la variété Δ . La figure 8.10 représente cette orbite périodique attractive pour $\varepsilon = 0.1$.

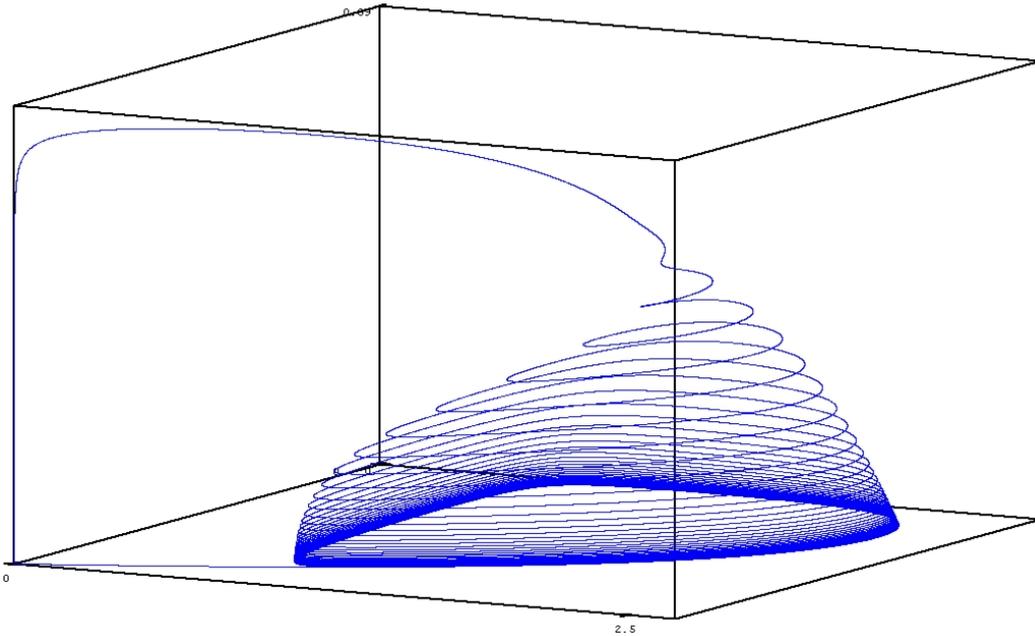


FIG. 8.10 – Orbite périodique du système tritrophique avec : $a_1 = 0.8, a_2 = 42, b_1 = 4, b_2 = 40, d_1 = 0.1, d_2 = 1, \varepsilon = 0.1$.

Pour $d < d_1^{Hc}$ proche de d_1^{Hc} . Nous obtenons deux des comportements décrits dans la section 8.2 selon des valeurs de ε différentes. La figure 8.11 pour $d_1 = 0.08273891$ représente une orbite périodique quittant le voisinage de la variété formée de cycles limite de la dynamique rapide près de la connexion homocline H_1 .

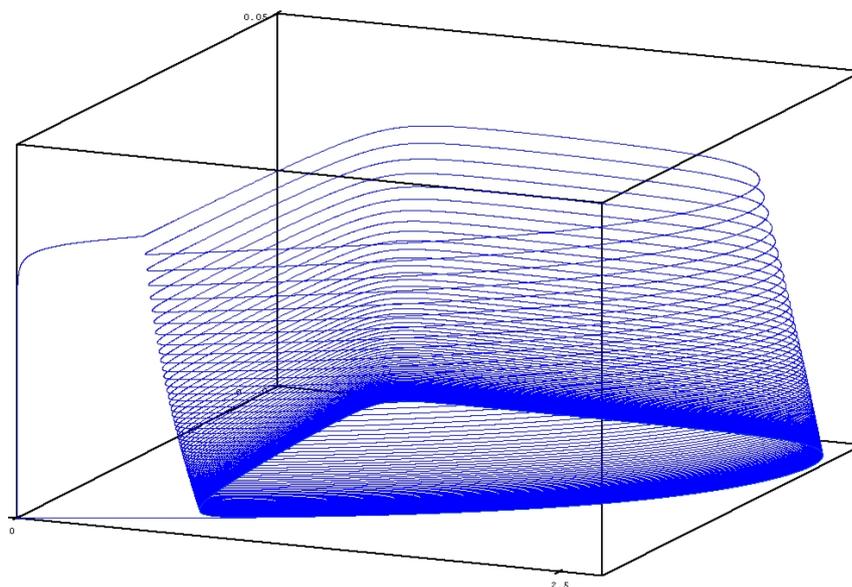


FIG. 8.11 – Orbite périodique du système tritrophique avec : $a_1 = 0.8$, $a_2 = 42$, $b_1 = 4$, $b_2 = 40$, $d_1 = 0.0827389$, $d_2 = 1$, $\varepsilon = 0.608887$.

Nous remarquons également le phénomène décrit à la fin de la section 8.2. Nous trouvons une valeur de ε pour laquelle (TT_ε) admet une orbite périodique attractive suivant pendant un temps la variété centrale instable entre les deux connexions homoclines. La figure 8.12 montre une orbite du système attirée par cette orbite attractive. En effet, nous avons choisi une condition initiale telle que l'orbite associée monte en tournant autour de la variété de cycles limites et s'en éloigne près de la connexion homocline (premier passage en bleu). Puis, dans le deuxième cycle d'hystérèse, elle suit cette fois-ci la variété centrale pendant suffisamment longtemps pour reprendre une oscillation autour de la variété supérieure (deuxième passage en bleu). Enfin, au troisième passage, l'orbite s'approche encore plus près de l'orbite périodique attractive (passage en vert).

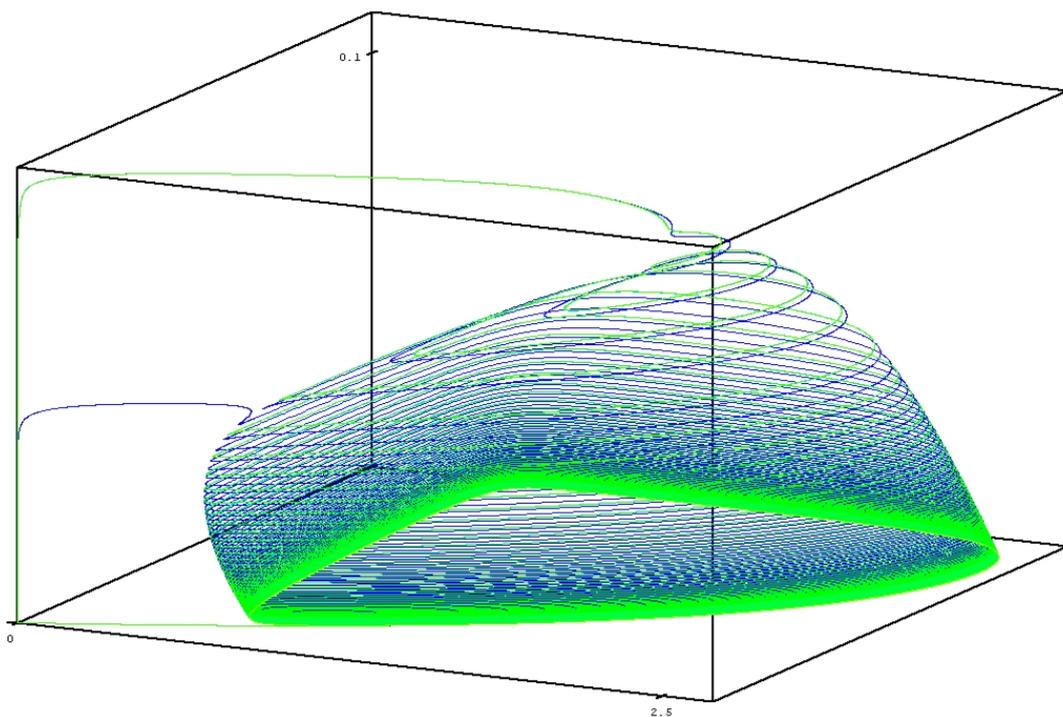


FIG. 8.12 – Orbite périodique du système tritrophique avec : $a_1 = 0.8$, $a_2 = 42$, $b_1 = 4$, $b_2 = 40$, $d_1 = 0.0827389$, $d_2 = 1$, $\varepsilon = 0.614512$.

Conclusion et perspectives

De l'étude des systèmes étudiés dans cette thèse, transparaissent des points importants que nous résumons dans cette conclusion. Il apparaît, tout d'abord que le mécanisme de d'éjection transcritique des orbites d'un système lent-rapide est beaucoup moins contractant que celui de type pli déjà étudié. Pourtant, comme le système tritrophique en donne un exemple, ce type de transition est souvent naturel dans les systèmes de modélisation. De fait, certains comportements de relaxation ou d'oscillations en salves moins "réactifs" peuvent être modélisés à l'aide de ce type de transition. De manière plus générale, le retard à la bifurcation – que nous pouvons, dans certains cas, qualifier de retard à la déstabilisation – peut être un bon moyen de modéliser l'inertie de certains systèmes d'évolution de manière naturelle. En outre, ce même mécanisme d'éjection nous a permis de faire naître des canards sans recours à un autre paramètre que ε .

D'un autre côté, le phénomène de rupture d'oscillations en salves que nous avons étudiés au chapitre 8 donne naissance à nombre d'interrogations. Quel est le type de bifurcation subie entre deux types différents (selon la valeur d'un paramètre) de familles à un paramètre d'orbites périodiques génératrices d'oscillations en salves ? Quel lien y a-t-il entre les graphiques généralisés constructibles pour un système couche-limite donné et l'apparition d'orbites périodiques pour un système lent-rapide associé ? Ces questions ouvrent des voies d'exploration nouvelles dans le domaine des systèmes lents-rapides.

En outre, un comportement observable sur ce type de système demande à être clarifié : l'addition de période. Déjà étudié pour le système de Van der Pol forcé (cf [48]), nous pouvons le rapprocher des notions que nous avons manipulées dans cette thèse et des résultats que nous avons établis. Nous en donnons, dans l'appendice suivant, une description sur un système déjà présenté dans cette thèse.

Addition de périodes dans un système de deux Van der Pol couplés

Le phénomène d'addition de période est susceptible de se produire sur certains types de systèmes lents-rapides :

$$(S_\varepsilon^\lambda) : \begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y, \varepsilon, \lambda) \\ \dot{y} = g(x, y, \varepsilon, \lambda) \end{cases} \quad (8.8)$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

dépendant d'un paramètre λ et pour $m + n$ plus grand que 3. Partant d'une orbite de période T du système (S_ε^λ) pour certaines valeurs de ε et de λ , en faisant varier légèrement le paramètre λ , l'orbite périodique disparaît puis nous obtenons successivement – selon la valeur de λ – une orbite périodique de période $2T$ puis $3T$ puis $4T$ etc.

Or ce phénomène apparaît également sur le système de Van der Pol couplé déjà utilisé (cf. section 6.1) auquel nous ajoutons un paramètre dans la dynamique de u . Nous décrivons ici le phénomène en le rapprochant de l'occurrence de retard à la bifurcation. Nous évoquons ici une idée d'étude de ce phénomène fondée sur la forte influence du paramètre sur le flot au voisinage du point de bifurcation de la dynamique rapide intermédiaire.

Nous considérons le système (6.1) auquel nous ajoutons une perturbation à la dynamique sur u :

$$(VdP_{\varepsilon, \delta}^\varphi) : \begin{cases} \dot{x} = -y + f(x) \\ \dot{y} = \varepsilon(x + 1 + z) \\ \dot{z} = \varepsilon(-u + f(z)) \\ \dot{u} = \varepsilon\delta(z + 1 + \varphi u) \end{cases} \quad (8.9)$$

$$f : x \rightarrow -x^3 + 4x, \quad 0 < \varepsilon, \delta \ll 1$$

où $\varphi > 0$. Pour φ assez petit, le sous-système indépendant sur les variables z et u est un système de relaxation classique qui admet un cycle limite attractif de période $T_{\varepsilon, \delta}^\varphi$ qui reste proche de $T_{\varepsilon, \delta}^0$. Pour $\varphi = 0$, $(VdP_{\varepsilon, \delta}^\varphi)$ admet une orbite périodique globalement attractive de période $T_{\varepsilon, \delta}^0$ qui correspond donc à une période d'oscillation des variables u et z .

Le comportement de ce système pour φ assez petit est essentiellement le même que celui de (6.1). Cependant, comme le montrent les simulations de la figure (8.13), en faisant évoluer la valeur de ce paramètre, nous obtenons des orbites de périodes qui sont approximativement des multiples de $T_{\varepsilon, \delta}^\varphi$. Ce phénomène est à distinguer de celui du doublement de périodes (cf [31]) qui ne fait apparaître que les 2^n multiples de la période initiale.

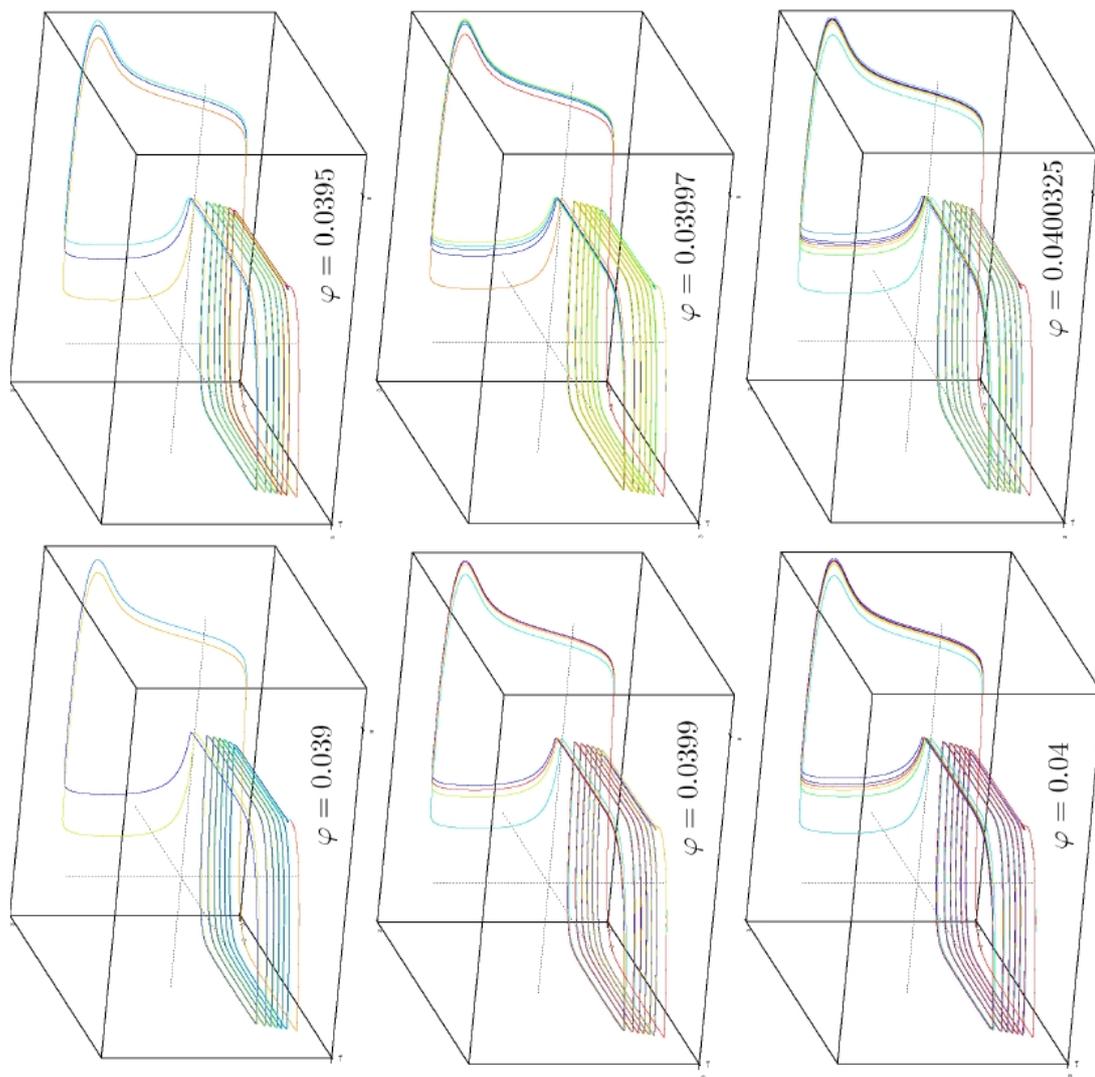


FIG. 8.13 – Orbites périodiques globalement attractives pour différentes valeurs de φ . Chaque couleur représente une période d'oscillations complète de z et u . On obtient des orbites de périodes $k(\varphi)T_{\varepsilon,\delta}^\varphi$, $k(\varphi) \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Entre chaque palier, il s'est donc produit une addition de période proche de $T_{\varepsilon,\delta}^0$.

Si ce système peut être considéré comme un système de Van der Pol forcé par un cycle de relaxation, il présente l'avantage d'être autonome. En outre, nous pouvons clarifier la dépendance du comportement φ de la manière suivante. Considérons le sous-système de $(VdP_{\varepsilon,\delta}^\varphi)$ sur les variables z et u :

$$\begin{cases} \dot{z} = \varepsilon(-u + f(z)) \\ \dot{u} = \varepsilon\delta(z + 1 + \varphi u) \end{cases}$$

le cycle limite attractif – dont nous avons nommé la période $T_{\varepsilon,\delta}^\varphi$ – admet une amplitude plus grande en u lorsque φ augmente. Nous remarquons alors que l'orbite peut traverser l'hyperplan $u = 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}$ où apparaît la bifurcation de Hopf de $(VdP_\varepsilon^{\varphi,u})$. Ainsi, sous l'influence de la dynamique rapide, l'orbite rejoint le foyer attractif et u décroît lentement. Or, pour $u = 1 + \frac{2}{9}\sqrt{3}$, le système

$$(VdP_\varepsilon^{\varphi,u}) : \begin{cases} \dot{x} = -y + f(x) \\ \dot{y} = \varepsilon(x + 1 + z) \\ \dot{z} = \varepsilon(-u + f(z)) \end{cases}$$

subit une bifurcation de Hopf donnant naissance à un cycle limite attractif de relaxation. Ainsi, dans ces conditions, le système $(VdP_{\varepsilon,\delta}^\varphi)$ subit une bifurcation de Hopf surcritique dynamique. Nous avons évoqué, dans la Remarque 2.2, la dépendance en ε de l'“angle de sortie de l'orbite”. En outre, l'orbite suivant une variété invariante de cycles limites de la dynamique rapide, il faut mettre en rapport cette dépendance en ε et la phase asymptotique généralisée de l'orbite.

Il apparaît donc que mieux connaître cette dépendance en ε permettrait de connaître le comportement des orbites au voisinage du point de bifurcation de Hopf de la dynamique $(VdP_\varepsilon^{\varphi,u})$ et la génération des salves. De plus, cette méthode permettrait de caractériser plus avant les valeurs des paramètres (φ et ε) pour lesquels l'orbite périodique est unique. Enfin, cette étude serait à rapprocher des méthodes de synchronisation déjà existantes des systèmes faiblement couplés.

Bibliographie

- [1] D. Anosov, *On limit cycles in systems of differential equations with a small parameter in the highest derivatives*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **33** (1963), 233–275; Translation from Mat. Sb. (N.S.) **50** (92) (1960) 299–334.
- [2] W.R. Ashby, *An introduction to cybernetics*, Chapman & Hall, London, 1956.
- [3] H. Atlan, *L'organisation biologique et la théorie de l'information*, Hermann, Paris, 1972.
- [4] P. Auger, J.C. Poggiale, *Emergence of population growth models : Fast migration and slow growth*, Journal of Theoretical Biology, **182** (1996), no. 2, 99–108.
- [5] M. Aziz-Alaoui, *Study of a Leslie-Gower-type tritrophic population model*, Chaos Solitons & Fractals, **14** (2002), no. 8, 1275–1293.
- [6] E. Benoit, J.-L. Callot, F. Diener and M. Diener, *Chasse au canard*, Collectanea Mathematica, Barcelone, **31** (1-3) (1981), 37–119.
- [7] C. Bonet, *Singular perturbation of relaxed periodic orbits*, Journal of Differential Equations **66** (1987), 301–339.
- [8] M. Bosch, C. Simo, *Attractors in a Sil'nikov-Hopf scenario and a related one-dimensional map*, Physica D **62** (1993), 217–229.
- [9] B. Candelpergher, F. Diener and M. Diener, *Retard à la bifurcation : du local au global*, in : *Bifurcations of Planar Vector Fields*, Proceedings of the Luminy conference (J.-P. Francoise and R. Roussarie, ed.), Lecture Notes in Mathematics **1455**, Springer, Berlin 1990, 1–19.
- [10] F. Clément, J.P. Francoise, *Mathematical modeling of the GnRH-pulse and surge generator*, SIAM Journal of Applied Dynamical Systems (2007). (à paraître).
- [11] P. De Maesschalk, F. Dumortier, *Time and entry–exit relation near a planar turning point*, Journal of Differential Equations **215** (2005), 225 – 267
- [12] P. De Maesschalk, F. Dumortier, *Canard solutions at nongeneric turning points*, Transactions of the American Mathematical Society **358** (2006), no. 5, 2291–2334.

- [13] J. Demongeot, J.P. Francoise, *Approximation for limit cycles and their isochrons*, C.R. Biologies **329** (2006), 967–970.
- [14] J. Demongeot, F. Seydoux, *Sur l'approche théorique dans l'étude des régulations métaboliques*, Bulletin du GERB **13** (1981), 27–37.
- [15] C. Doss-Bachelet, J.P. Francoise, C. Piquet, *Bursting oscillations in two coupled Fitzhugh-Nagumo systems*, ComplexUs **2** (2003), 101–111.
- [16] F. Dumortier, *Techniques in the theory of local bifurcations : blow-up, normal form, nilpotent bifurcations, singular perturbations*, in : Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields (D. Schlomiuk, ed.), NATO ASI series C 408, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [17] F. Dumortier, R. Roussarie, *Canard cycles and center manifolds*. Memoirs. of A.M.S. **121** (1996), no. 577, 1–100.
- [18] F. Dumortier, R. Roussarie, *Multiple canard cycles in generalized lienard equations*, Journal of Differential Equations **174** (2001), 1–29.
- [19] W. Eckhaus, *Asymptotic analysis of singular perturbations*, Studies in Mathematics and its applications vol. 9, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [20] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F.G. Tricomi, *Higher transcendental Functions, Bateman Project*, vol. II, McGraw Hill, New York, 1953.
- [21] J. Feroe, *Existence and stability of multiple impulse solutions of a nerve equation*, SIAM Journal of Applied Mathematics, **42** (1982), 235–246.
- [22] N. Fenichel, *Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations*, Journal of Differential Equations, **31** (1979), no. 1, 53–98.
- [23] J.P. Francoise, C.C. Pugh, *Keeping track of limit cycles*, Journal of Differential Equations, **65** (1986), 139–157.
- [24] J.P. Francoise, *Oscillations en biologie : Analyse qualitative et modèles*, Coll. : Mathématiques et Applications (vol. 46), Springer, 2005.
- [25] J.P. Francoise, C. Piquet, A. Vidal, *Enhanced delay to bifurcations*, (soumis à publication).
- [26] S. van Gils, M. Krupa, P. Szmolyan, *Asymptotic expansions using blow-up*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik **56** (2005), no. 3, 369–397.
- [27] P. Glendinning, C. Sparrow, *Local and global behavior near homoclinic orbits*, Journal of Statistical Physics **35** (1984), no. 5–6, 645–696.
- [28] A. Golbeter, *Biochemical oscillations and cellular rythms*, Cambridge University Press, 1996.

- [29] A. Gragnani, O. De Feo, S. Rinaldi, *Food chains in the chemostat : Relationships between mean yield and complex dynamics*, in Bulletin of Mathematical Biology, **60** (1998), no. 4, 703–719.
- [30] J. Grasman, *Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications*, Springer-Verlag, 1987.
- [31] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Applied Mathematical Sciences **42**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [32] J. Guckenheimer, *Bifurcations of relaxation oscillations*, in Normal forms, bifurcations and finiteness problems in differential equations, Y. Ilyashenko and C. Rousseau, eds. Kluwer, 295–316, 2004.
- [33] J. L. Hindmarsh, R. M. Rose, *A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations*, Proc. of the Royal Society of London., **B221** (1984), 87–102.
- [34] M. Hirsh, C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **583**, Springer-Verlag, New-York, 1977.
- [35] M. Hirsh, S. Smale, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, San Diego, CA, 1974.
- [36] K.D. Holl, B.B. Howarth, *Paying for restoration*, Restoration Ecology, **8** (2000), 260–267.
- [37] F. Hoppensteadt, *Singular perturbations on the infinite interval*, Trans. Amer. Math. Soc., **123** (1966), no. 2, 521–535.
- [38] F. Hoppensteadt, *Asymptotic stability in singular perturbation problems*, Journal of Differential Equations, **15** (1974), no. 3, 510–521.
- [39] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications, **54** (1995), Cambridge University Press.
- [40] A. Klebanoff, A. Hastings, *Chaos in three species food chains*, Journal of Mathematical Bioscience, **32** (1994), 427–451.
- [41] A. Kolesov, E. Mishchenko, N. Rosov, *Asymptotics methods in singularly perturbed systems*, Plenum Publishing Corporation, 1994.
- [42] A. Kolesov, E. Mishchenko, N. Rosov, *A relaxation system in the neighborhood of a disruption point : Reduction to the regular case*, Russian Mathematics Surveys **43** (1988), 173–174.
- [43] A. Kolesov, E. Mishchenko, *Asymptotics of relaxation oscillations*, Mathematics USSR Sbornik **65** (1989), no. 1, 1–17

- [44] N. Kopell, *We got rhythm : Dynamical systems of the nervous system*, published version of the 1998 Gibbs Lecture of the AMS, Notices of the AMS **47** (2000), 6–16.
- [45] M. Krupa, P. Szmolyan, *Extending geometric singular perturbation theory to non-hyperbolic points-fold and canards points in two dimensions*, SIAM Journal of Mathematical Analysis **33** (2001), no. 2, 286–314
- [46] Yu.A. Kuznetsov, S. Rinaldi, *Remarks on food chain dynamics*, Mathematical Biosciences, **134** (1996), 1–33.
- [47] E. Lee, D. Terman, *Uniqueness and stability of periodic bursting solutions*. Journal of Differential Equations, **158** (1999), no. 1, 48–78.
- [48] M. Levy, *A period-adding phenomenon*, SIAM Journal on Applied Mathematics, **50** (1990), no.4, 943–955.
- [49] W. Liu, D. Xiao, Y. Yi, *Relaxation oscillations in a class of predator-prey systems*, Journal of Differential Equations, **188** (2003), 306–331.
- [50] C. Lobry, *Les nouveaux Tartuffes*, in : Analyse non standard et représentation du réel (M. Diener et C. Lobry, ed.), C.N.R.S.-O.P.U., 1985.
- [51] C. Lobry, G. Wallet, *La traversée de l'axe imaginaire n'a pas toujours lieu là où l'on croit l'observer*, in Mathématiques finitaires et analyse non standard (M. Diener et G. Wallet, ed.), Publications Mathématiques de l'Université Paris 7, **31** (1989), 45–51.
- [52] P. Mandel, T. Erneux, *Dynamics of nascent hysteresis in optical bistability*, Optics Communications **44** (1982), 55–58.
- [53] P. Mandel, T. Erneux, *Laser Lorenz equations with a time-dependent parameter*, Physical Review Letters **53** (1984), 1818–1820.
- [54] E. Mishchenko, N. Rosov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Plenum Press, 1980.
- [55] J. Murray, *Mathematical biology*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1993.
- [56] K. Nipp, *An extension of Tikhonov's theorem in singular perturbations for the planar case*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik **34** (1983), no. 3, 277–290.
- [57] R. O'Malley, *On initial value problems for nonlinear systems of differential equations with two small parameters*, Arch. Rational Mech. Anal., **40** (1971), 200–222.
- [58] R. O'Malley, *Introduction to singular perturbations*, Academic Press, New York, 1974.

- [59] B. van der Pol, *On oscillation-hysteresis in a simple triode generator*, Philosophical Magazine, Serie 6 n° 43 (1922), 700–719.
- [60] B. van der Pol, *On relaxation-oscillations*, Philosophical Magazine, Serie 7 n° 2 (1926), 978–992.
- [61] B. van der Pol, J. van der Mark, *The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart*, Philosophical Magazine, Supplement 6 (1928), 763–775.
- [62] L. Pontryagin, *Asymptotics of the solutions of systems of differential equations with a small parameter in the higher derivatives*, American Mathematics Society translations Series 2, **18** (1961), 295–319.
- [63] S. Rinaldi, R. Casagrandi, and A. Gragnani, *Reduced order models for the prediction of extreme episodes*. Chaos, Solitons & Fractals **12** (2001), 313–320.
- [64] J. Rinzel, *Bursting oscillations in an excitable membrane model*, in : Ordinary and Partial Differential Equations (B. D. Sleeman and R. J. Jarvis, eds), Springer-Verlag, New-York, 1985.
- [65] J. Rinzel, G.B. Ermentrout, *Analysis of neuronal excitability and oscillations*, In : Koch C and Segev I (eds) Methods in neuronal modeling MIT Press, Cambridge, MA., 1989.
- [66] R. Sacker, *A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces*, Communications on Pure and Applied Mathematics **XVIII** (1965), 717–732.
- [67] P. Szmolyan, M. Wechselberger, *Relaxation oscillations in \mathbb{R}^3* , Journal of Differential Equations, **200** (2004), n° 1, 69–104.
- [68] A. Tikhonov, *Systems of ordinary differential equations containing small parameters in the derivatives*, Mat. Sborn., **31** (1952), 575–586.
- [69] C. Tresser, *About some theorems by L. P. Sil'nikov*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, **40** (1984), n° 4, 441–461.
- [70] A. Vidal, *Stable periodic orbits associated with bursting oscillations in population dynamics*, in *Positive Systems* (C. Commault and N. Marchand, ed.), Lectures Notes in Control and Information Sciences **341**, Springer, Berlin / Heidelberg 2006, 439–446.
- [71] A. Vidal, *Periodic orbits of tritrophic slow-fast systems and double homoclinic bifurcations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2007. (En cours de publication).
- [72] S. Wiggins, *Global bifurcations and chaos : Analytical methods*, Applied Mathematical Sciences vol. 73, Springer-Verlag, 1990.

-
- [73] S. Wiggins, *Normally hyperbolic invariant manifolds in dynamical systems*, Applied Mathematical Sciences vol. 105, Springer-Verlag, 1994.
- [74] H. Zoladek, *Remarks on the delay of the loss of stability of systems with changing parameters* in *Bifurcations of Planar Vector Fields*, Proceedings of the Luminy conference (J.-P. Francoise and R. Roussarie, ed.), Lecture Notes in Mathematics **1455**, Springer, Berlin 1990, 393–396.