

Les transparents de ce chapitre sont une modification marginale des transparents d'Agathe Guilloux.

- 1 Equations linéaires
 - Systèmes d'équations linéaires
 - Opérations élémentaires, équivalence
 - Existence ? Unicité ?
- 2 Méthode du pivot de Gauss
 - Matrices échelonnées, échelonnée réduite
 - Caractérisation des solutions
 - Existence et unicité des solutions
 - Algorithme du pivot de Gauss
- 3 Équations de vecteurs
 - Combinaison linéaire
 - Espace engendré
- 4 Équations matricielle $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
 - Produit matriciel
- 5 3 formes équivalentes pour les systèmes linéaires
- 5 Indépendance linéaire
 - Système homogène
 - Indépendance linéaire de vecteurs
 - Indépendance linéaire des colonnes d'une matrice
 - Cas spéciaux
 - Caractérisation de la dépendance linéaire
- 6 Introduction aux applications linéaires
 - Produit matrice-vecteur
 - Application
 - Application linéaire
- 7 La matrice d'une application linéaire
 - La matrice identité
 - Matrice d'une application linéaire

Equations linéaires

- Une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

EXEMPLE :

$$\begin{array}{ccc} 4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1 & \text{et} & x_2 = 2(\sqrt{6} - x_1) + x_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{réarrangé} & & \text{réarrangé} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 3x_1 - 5x_2 = -2 & & 2x_1 + x_2 - x_3 = 2\sqrt{6} \end{array}$$

- Non linéaire

$$4x_1 - 6x_2 = x_1x_2 \quad \text{et} \quad x_2 = 2\sqrt{x_1} - 7$$

Un **système d'équations linéaires** ou un **système linéaire** \mathcal{S} de m équations à n inconnues :

Une collection de m équations linéaires avec les mêmes n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n .

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

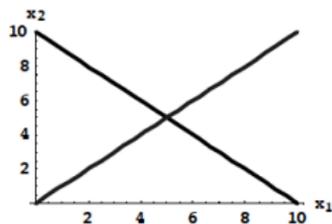
Une **solution** d'un système linéaire

Une liste (s_1, s_2, \dots, s_n) de nombres qui sont solutions de chaque équation.

EXEMPLES $m = 2$ équations à $n = 2$ variables :

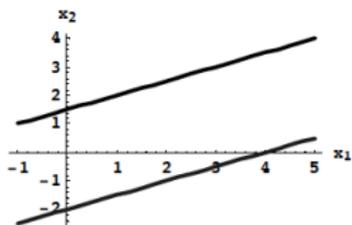
$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

une unique solution



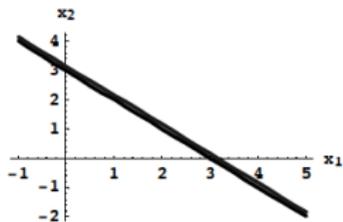
$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 = 8 \end{cases}$$

pas de solution



$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

une infinité de solution



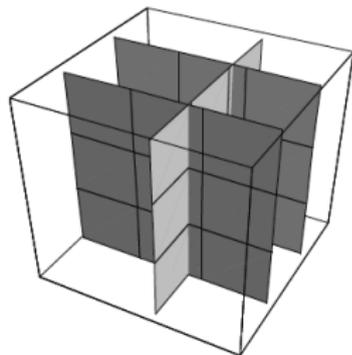
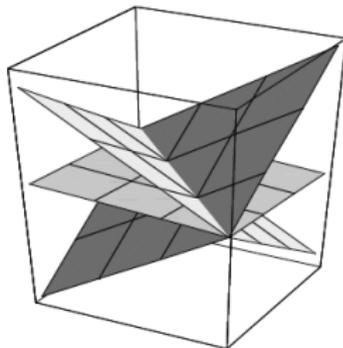
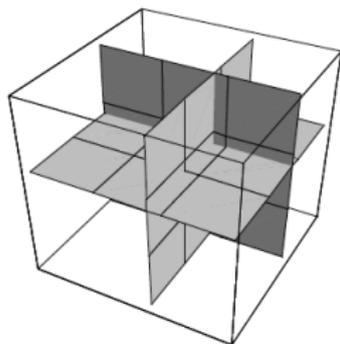
Proposition

Un système d'équations linéaires a

- (i) exactement une solution ou
- (ii) une infinité de solutions ou
- (iii) pas de solution.

EXEMPLE Trois équations à 3 variables. Chaque équation définit un plan dans l'espace, il y a 3 possibilités :

- i) les plans s'intersectent en un point (solution unique)
- ii) les plans s'intersectent en une ligne (infinité de solutions)
- iii) il n'a pas de point commun aux 3 plans



L'**ensemble des solutions** d'un système linéaire est

- l'ensemble de toutes les solutions du système.

Systèmes équivalents :

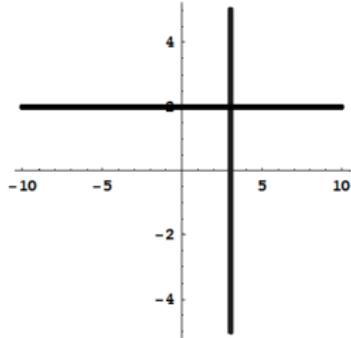
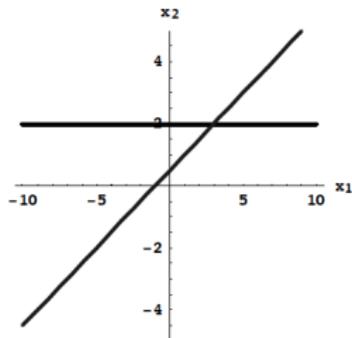
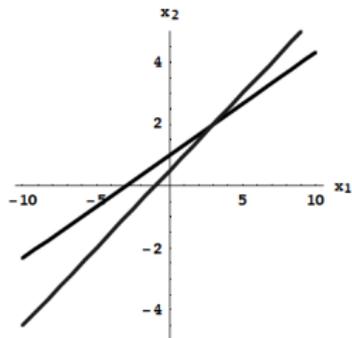
- 2 systèmes linéaires sont équivalents quand ils ont le même ensemble de solutions.

Stratégie pour résoudre un système

- Remplacer le système par un système équivalent plus facile à résoudre

EXEMPLE :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$



Au système $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$ on associe

- la **matrice des coefficients** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

- la **matrice augmentée** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

On peut faire les calculs directement sur la matrice augmentée :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition : opérations élémentaires sur les lignes

- ➊ (*Transvection*) Ajouter à une ligne le multiple d'une autre : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
- ➋ (*Permutation*) Permuter (ou échanger) de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$.
- ➌ (*Dilatation*) Multiplier une ligne par un scalaire $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

Définition : matrices lignes-équivalentes

Ce sont deux matrices qui peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre par une suite de opérations élémentaires sur les lignes.

Propriété sur l'équivalence en ligne

Si les matrices augmentées de deux systèmes linéaires sont lignes-équivalentes, les deux systèmes ont le même ensemble de solutions

EXEMPLE :

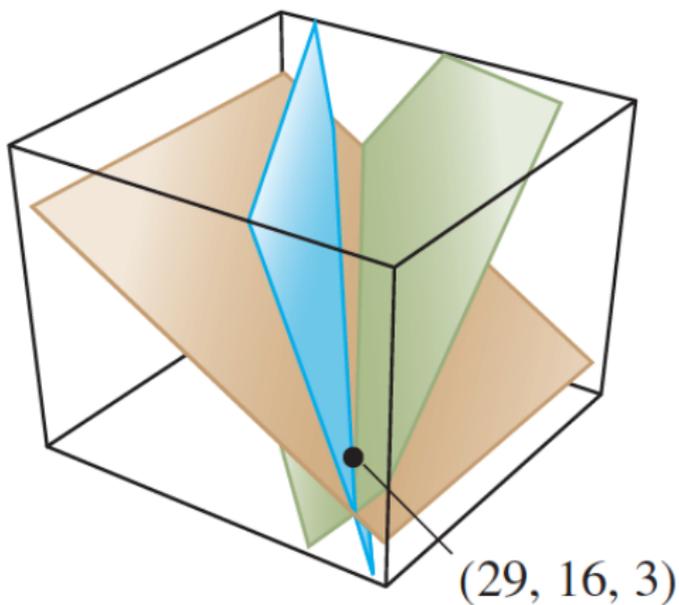
$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 = 16 \\ \quad \quad x_3 = 3 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = -3 \\ \quad x_2 = 16 \\ \quad \quad x_3 = 3 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 29 \\ \quad x_2 = 16 \\ \quad \quad x_3 = 3 \end{array} \right. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solution : (29, 16, 3)

Check : Est ce que (29, 16, 3) est une solution du système de départ ?

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{array} \right.$$



$(29, 16, 3)$

$$\begin{array}{rclclclcl}
 (29) & -2(16) & +3 & = & 29 & -32 & +3 & = & 0 \\
 & 2(16) & -8(3) & = & & 32 & -24 & = & 8 \\
 -4(29) & +5(16) & +9(3) & = & -116 & +80 & +27 & = & -9
 \end{array}$$

- 1 **Existence** : est ce que le système admet ou moins une solution ? Si oui, on dit que le système est **consistant**.
- 2 **Unicité** : si une solution existe, est-elle unique ?

EXEMPLE : Existence ?

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

Dans cet exemple, le système a été réduit à une forme triangulaire :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

C'est suffisant pour s'assurer que le système admet une **unique solution**. Pourquoi ?

EXEMPLE : Est ce que ce système admet des solutions ?

$$\begin{cases} 2x_2 - 6x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution :

- Les opérations sur les lignes donnent

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- Système obtenu

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_2 - 6x_3 = 8 \\ 0x_3 = -3 \end{cases}$$

- Ce système n'admet pas de solution ! Pourquoi ? On dit qu'il est **inconsistant**.

EXAMPLE : Pour quelles valeurs de h le système admet des solutions (est consistant) ?

$$\begin{cases} 3x_1 - 9x_2 = 4 \\ -2x_1 + 6x_2 = h \end{cases}$$

Solution : Il faut le rendre triangulaire.

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 4 \\ -2 & 6 & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ -2 & 6 & h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & h + \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

La 2^{ème} équation est $0x_1 + 0x_2 = h + \frac{8}{3}$. Le système est donc consistant quand $h + \frac{8}{3} = 0$ ou $h = -\frac{8}{3}$.

Méthode du pivot de Gauss

Définition : matrice échelonnée

- 1 Toutes les lignes non-nulles sont au-dessus de toute ligne nulle.
- 2 Chaque **pivot** (c.à.d. la 1^{ère} entrée non-nulle en partant de la gauche) d'une ligne est dans une colonne à droite du pivot de la ligne précédente.
- 3 Toutes les entrées d'une colonne sous un pivot sont nulles.

EXEMPLES : Formes échelonnées

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{pmatrix}$$

Définition : matrice échelonnée et réduite

- 4 Le coefficient du pivot sur chaque ligne non-nulle est 1.
- 5 Chaque pivot est la seule entrée non-nulle sur sa colonne.

EXEMPLES (suite) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

Théorème

Chaque matrice est ligne-équivalente à une et seulement une matrice échelonnée et réduite.

EXEMPLE :

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

Solution On commence par échanger les lignes

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Pivot

Pivot column

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice originale :

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

Pivot positions

Pivot columns

Il y a au plus un pivot par ligne. Il y a au plus un pivot par colonne.

Exercice

Réduire à la forme échelonnée puis à la forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Solution (Étape 1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

On a le 1er pivot. On cache la 1ere ligne et la 1ere colonne (celle du pivot) et on recommence avec la matrice en bas à gauche.

Solution (Étape 2)

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ (forme échelonnée)}$$

Solution (Étape 3 : finale)

En commençant le pivot le plus à droite, et en remontant par étape,

- on crée des 0 au dessus de chaque pivot.
- Enfin on remet les coefficients des pivots à 1.

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ (forme échelonnée réduite)}$$

Variable libre / Variable liée

- On appelle **variable liée** toute variable qui correspond à un pivot.
- On appelle **variable libre** toutes les variables qui ne sont pas en position de pivot.

EXEMPLE :

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ correspond au système

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 - 8x_4 = 5 \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

- les colonnes pivot sont les 1, 3, 5
- les variables liées sont x_1, x_3, x_5
- les variables libres sont x_2, x_4

Après avoir obtenu la forme échelonnée réduite,

- on la réécrit sous forme d'un système d'équations
- puis on écrit chaque variable liée à partir des variables libres et des constantes

EXEMPLE : Le système
$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 - 8x_4 = 5 \\ x_5 = 7 \end{cases}$$
 se réécrit
$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ est libre} \\ x_3 = 5 + 8x_4 \\ x_4 \text{ est libre} \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions s'écrit

$$\{(-6x_2 - 3x_4, x_2, 5 + 8x_4, x_4, 7), x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

EXEMPLE :
$$\begin{cases} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 = -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 9 \\ -cx_4 + 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 + 6x_5 = 15 \end{cases}$$

On avait obtenu la forme échelonnée

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Il n'y a pas d'équation la forme $0 = c$, avec $c \neq 0$, donc le système est consistant
- Il y a 2 variables libres x_3 et x_4

**Systeme consistant
avec variable(s) libre(s)**

\implies **infinité de solutions.**

EXEMPLE :
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -3 \\ 2x_1 + 5x_2 = 5 \\ -2x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{On cherche la forme échelonnée}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On revient au système
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

**Systeme consistant
pas de variable libre**

\implies **solution unique.**

Théorème sur l'existence et l'unicité des solutions

- ① Un système linéaire est consistant (admet des solutions) si et seulement si la matrice augmentée n'a pas de ligne de la forme

$$(0 \quad \dots \quad 0 \quad b)$$

avec $b \neq 0$.

- ② Si un système linéaire est consistant alors il admet
- une solution unique (quand il n'y a pas de variable libre) ou
 - une infinité de solutions (quand il y a au moins une variable libre)

- 1 Ecrire la matrice augmentée du système
- 2 Obtenir la forme échelonnée. Puis décider si le système
 - consistant : on passe à l'étape 3
 - ou non : on s'arrête
- 3 Obtenir la forme échelonnée réduite.
- 4 Ecrire le système qui correspond à la forme échelonnée réduite
- 5 Ecrire l'ensemble des solutions en exprimant chaque variable liée à l'aide des variables libres

Équations de vecteurs

Définition : vecteur

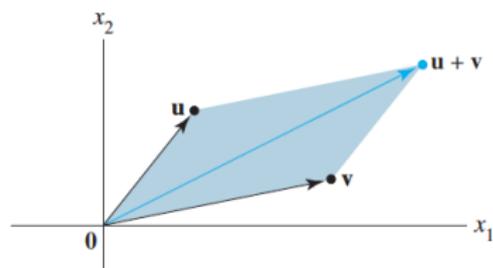
Un **vecteur** est une matrice à une seule colonne. Dans \mathbf{R}^n , les vecteurs ont n entrées :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

EXEMPLE : Dans \mathbb{R}^2 Le vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est le point de coordonnées (x_1, x_2) dans le plan.
 \mathbf{R}^2 est l'ensemble de tous les points sur le plan.

Définition : addition de vecteurs

Si \mathbf{u} et \mathbf{v} dans \mathbf{R}^2 sont représentés comme des points du plan, alors $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ correspond au 4^{ème} point du parallélogramme dont les autres points sont $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, \mathbf{u} et \mathbf{v} .



Opérations sur les vecteurs

Pour tous vecteurs \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{w} dans \mathbf{R}^n et tous réels c et d

① $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

② $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

③ $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

④ $\mathbf{u} + -\mathbf{u} = \mathbf{0}$

⑤ $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$

⑥ $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$

⑦ $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$

Définition : combinaison linéaire

Soient les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ dans \mathbf{R}^n et des réels c_1, c_2, \dots, c_p , le vecteur \mathbf{y} défini par

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p$$

est appelé **combinaison linéaire** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ avec les poids c_1, c_2, \dots, c_p .

EXEMPLES : Combinaisons linéaires de \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 :

$$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2, \quad \frac{1}{3}\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{0}$$

Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Exprimer chacun des vecteurs ci-dessous comme combinaison linéaire de \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Exercice

$$\text{Soient } \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que \mathbf{b} est une combinaison linéaire \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , et \mathbf{a}_3 ?

Solution : D'après la définition, le vecteur \mathbf{b} est une combinaison linéaire de \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , et \mathbf{a}_3 si nous pouvons trouver des réels x_1, x_2, x_3 tels que

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}.$$

Dans l'exercice précédent, \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 et \mathbf{b} sont les colonnes de la matrice augmentée

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 14 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$

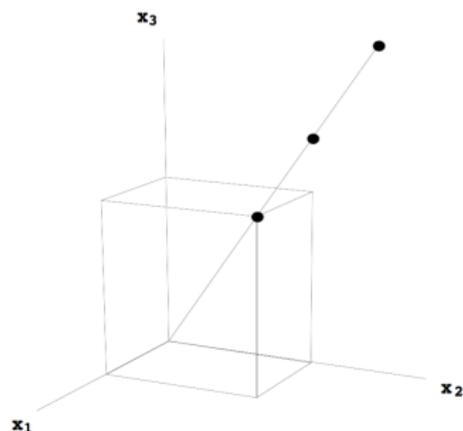
$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{b}$

La solution de $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ s'obtient en résolvant le système linéaire de matrice augmentée $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{b})$.

Proposition

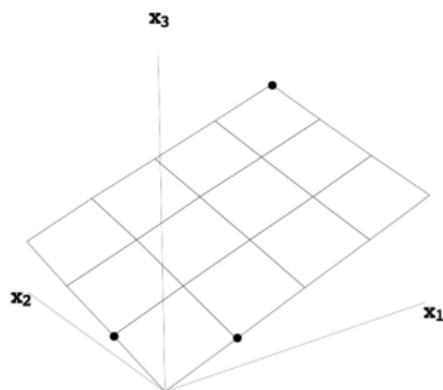
Une équation de vecteurs $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ a la même solution que le système linéaire dont la matrice augmentée est $(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n \quad \mathbf{b})$.

En particulier, \mathbf{b} est une combinaison linéaire de $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ si et seulement si il y a une solution au système linéaire correspondant.



- \mathbf{v} , $2\mathbf{v}$ et $1.5\mathbf{v}$ sont sur la même ligne.
- Ici $\text{Vect}(\mathbf{v})$ est la ligne passant par l'origine et formée de l'ensemble des vecteurs de la forme $c\mathbf{v}$.

EXEMPLE : Quels sont les points \mathbf{u} , \mathbf{v} , $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ et $3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$ sur le graphe ci-dessous ?.



- \mathbf{u} , \mathbf{v} , $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ et $3\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$ sont tous sur le même plan
- Ici $\text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est le plan formé des vecteurs de la forme $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$.

Définition : espace engendré

Soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ dans \mathbf{R}^n ; alors

$$\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$$

est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_p\mathbf{v}_p,$$

avec x_1, x_2, \dots, x_p réels.

Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- 1 Donner un vecteur dans $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.
- 2 Décrire $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ géométriquement.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$. Est-ce que \mathbf{b} est dans le plan engendré par les colonnes de A ?

Équations matricielle $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Les combinaisons linéaires peuvent être vues comme des produits matrice-vecteur

Définition :

Si A est une matrice de taille $m \times n$, avec les colonnes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, et si \mathbf{x} est un vecteur dans \mathbf{R}^n , alors le **produit de A et \mathbf{x}** , noté $A\mathbf{x}$, est la combinaison linéaire des colonnes de A avec comme poids les entrées correspondantes dans \mathbf{x} :

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

EXEMPLE :

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + -6 \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 9 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Exercice

Écrire le système d'équations correspondant à la matrice augmentée ci-dessous, puis l'écrire sous forme d'une équation de vecteur enfin sous la forme matricielle $Ax = \mathbf{b}$ avec un vecteur \mathbf{b} de taille 2×1 .

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 9 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3 formes équivalentes pour les systèmes linéaires

On peut écrire de manière équivalente

- un système linéaire d'équations $((\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n \quad \mathbf{b}))$
- une équation de vecteur $(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b})$
- une équation de matrice $(\mathbf{Ax} = \mathbf{b})$.

Théorème

Si A est une matrice de taille $m \times n$, avec pour colonnes $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, et si \mathbf{b} est dans \mathbf{R}^m , alors l'équation matricielle

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

a la même solution que l'équation de vecteurs

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

qui a également la même solution que le système linéaire de matrice augmentée

$$(\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n \quad \mathbf{b})$$

Propriété

L'équation $Ax = \mathbf{b}$ admet une solution si et seulement si \mathbf{b} est une combinaison linéaire des colonnes de A .

Exercice

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & -11 & -14 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

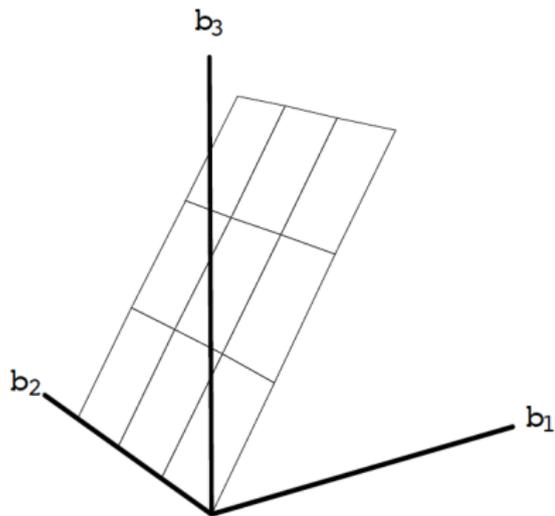
L'équation $Ax = \mathbf{b}$ est-elle consistante pour tout \mathbf{b} ?

Solution : La matrice augmentée correspondant à $Ax = \mathbf{b}$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ -3 & -11 & -14 & b_2 \\ 2 & 8 & 10 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Donc $Ax = \mathbf{b}$ n'est pas consistante pour tous les \mathbf{b} puisque certains choix de \mathbf{b} rendent $-2b_1 + b_3$ non nul.

En conclusion $Ax = \mathbf{b}$ est consistante si $-2b_1 + b_3 = 0$ (c'est l'équation d'un plan \mathbf{R}^3)



On dit que les colonnes de A engendrent un plan dans \mathbf{R}^3 .

Matrice engendrant \mathbb{R}^m

On dit que **les colonnes** de $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_p)$ **engendrent** \mathbb{R}^m si *tous* les vecteurs \mathbf{b} dans \mathbb{R}^m sont des combinaisons linéaires de $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$. On note

$$\text{Vect}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p) = \mathbb{R}^m.$$

Théorème

Soit A une matrice $m \times n$, alors il y a équivalence entre

- Pour tout b dans \mathbf{R}^m , l'équation $Ax = b$ a une solution.
- Tout b dans \mathbf{R}^m est une combinaison linéaire des colonnes de A .
- Les colonnes de A engendrent \mathbf{R}^m .
- A a un pivot sur chaque ligne.

Exercice

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est-elle consistante pour tout \mathbf{b} ?

Exercice

Est-ce que les colonnes de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ engendrent \mathbf{R}^3 ?

Indépendance linéaire

Un système **homogène** tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

peut être vu comme une équation de vecteur

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cette équation de vecteurs a une solution triviale ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$). Est-ce l'unique ?

Définition : Indépendance linéaire

- Un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ dans \mathbb{R}^n est **linéairement indépendant** quand l'équation de vecteurs

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

a seulement la solution triviale $(0, 0, \dots, 0)$

- L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est **linéairement dépendant** quand il existe c_1, \dots, c_p , non tous nuls tels que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

↑

relation de dépendance linéaire
(quand les poids ne sont pas tous nuls)

Exercice

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- Déterminer si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sont linéairement indépendants.
- Si possible, trouver une relation de dépendance entre eux.

Une relation de dépendance linéaire comme

$$-33 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 18 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

peut être écrite comme une équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -33 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chaque dépendance linéaire entre les colonnes de A correspond à une solution non-triviale $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Définition : Indépendance linéaire des colonnes d'une matrice

Les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes si et seulement si l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a **seulement** la solution triviale.

Considérons l'ensemble contenant seulement un vecteur non-nul $\{\mathbf{v}_1\}$

La seule solution de $x_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ est $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\{\mathbf{v}_1\}$ est linéairement indépendant quand $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

Exercice

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant.
- Déterminer si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant.

Propriété (fondamentale en analyse des données)

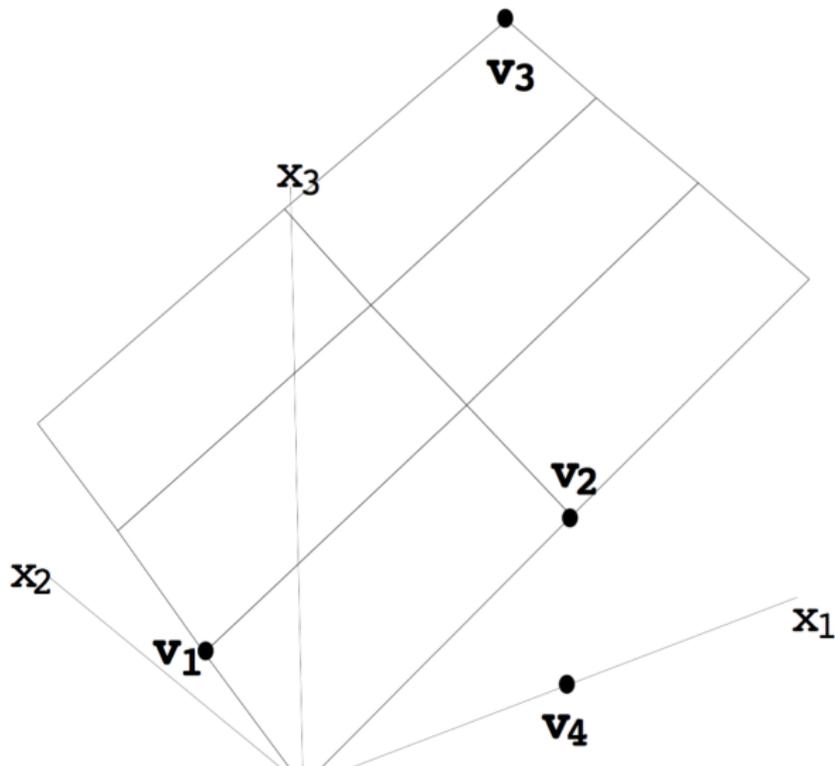
- Un ensemble de deux vecteurs est linéairement dépendant s'ils sont multiples l'un de l'autre.
- Un ensemble de deux vecteurs est linéairement indépendant s'ils ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Propriété

Un ensemble $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ de p vecteurs dans \mathbb{R}^n sont linéairement dépendants si $p > n$.

Exercice

Considérons l'ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ dans \mathbf{R}^3 sur la figure. Sont-ils linéairement indépendants ?



Exercice

Avec le moins de calculs possibles, déterminer si les ensembles de vecteurs suivants sont linéairement indépendants

1 $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

2 Les colonnes de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

3 $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

4 $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

Propriété

Un ensemble $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ de p vecteurs est linéairement dépendant si et seulement si au moins un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres. En fait, si S est linéairement dépendant, et $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, alors il existe un vecteur \mathbf{v}_j ($j \geq 2$) qui est combinaison linéaire des précédents $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$.

Introduction aux applications linéaires

On peut voir le produit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$: d'une autre façon :

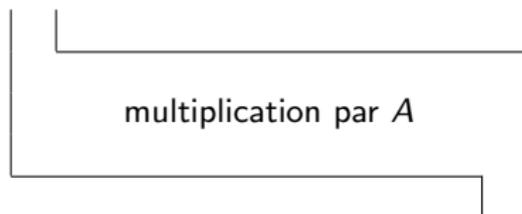
la matrice A agit sur \mathbf{x} par multiplication pour produire un nouveau vecteur $A\mathbf{x}$ ou \mathbf{b} .

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si A est une matrice $m \times n$ et \mathbf{b} un vecteur de \mathbb{R}^m , il y a équivalence entre

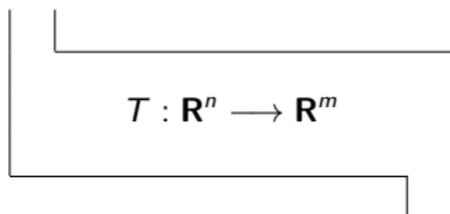
- résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- trouver tous les vecteurs de \mathbb{R}^n qui sont transformés en le vecteur \mathbf{b} dans \mathbb{R}^m par la multiplication par A



*transformation
"machine"*

Définition : application

Une application T de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^m est une règle qui assigne à chaque vecteur \mathbf{x} dans \mathbf{R}^n un vecteur $T(\mathbf{x})$ dans \mathbf{R}^m .



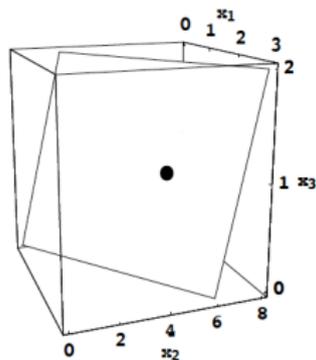
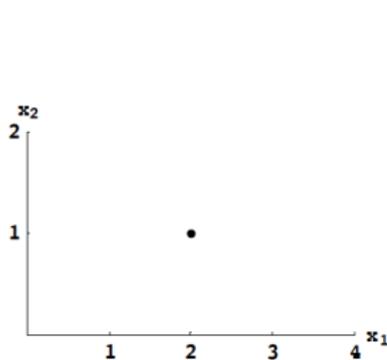
Définitions

- \mathbf{R}^n est le **domaine de départ** de T
- \mathbf{R}^m est le **domaine d'arrivée** de T
- $T(\mathbf{x})$ dans \mathbf{R}^m est l'**image** de \mathbf{x} par la transformation T
- L'ensemble des images $T(\mathbf{x})$ est l'**image** de T

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Définissons une transformation $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Alors si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$



Exercice

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 10 & -15 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

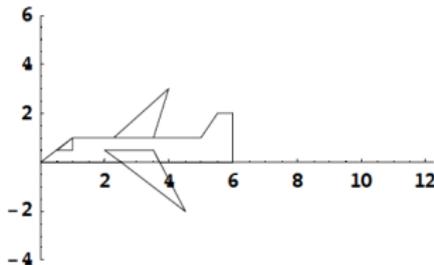
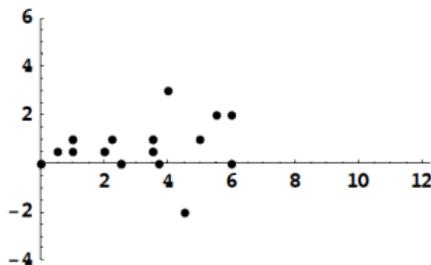
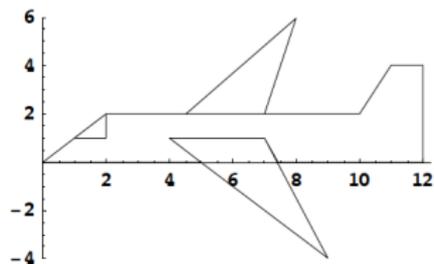
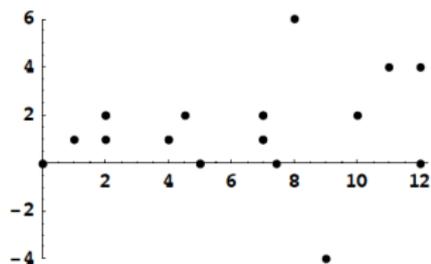
On définit la transformation $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

- 1 Trouver \mathbf{x} dans \mathbf{R}^3 dont l'image par T est \mathbf{b} .
- 2 Existe-t-il plus d'un \mathbf{x} dont l'image par T est \mathbf{b} ?
- 3 Déterminer si \mathbf{c} est dans l'image de la transformation T .

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} .5 & 0 \\ 0 & .5 \end{pmatrix}$. L'application $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ est un exemple de **contraction**.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad T(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} .5 & 0 \\ 0 & .5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Propriété du produit matrice-vecteur

Si A est une matrice de taille $m \times n$, alors l'application $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ a les propriétés suivantes :

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{-----} + \text{-----}$$

et

$$T(c\mathbf{u}) = A(c\mathbf{u}) = \text{-----}A\mathbf{u} = \text{-----}T(\mathbf{u})$$

pour tous \mathbf{u}, \mathbf{v} dans \mathbf{R}^n et tout réel c .

Définition : application linéaire

Une application T est **linéaire** si :

- 1 $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ pour tout \mathbf{u}, \mathbf{v} dans le domaine de départ de T .
- 2 $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ pour tout \mathbf{u} dans le domaine de départ de T et tout réel c .

Propriétés

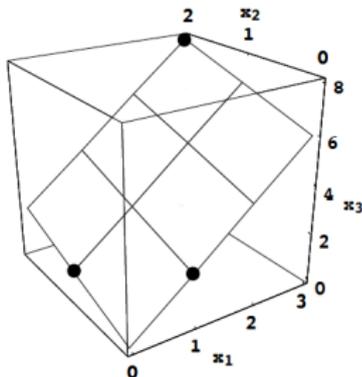
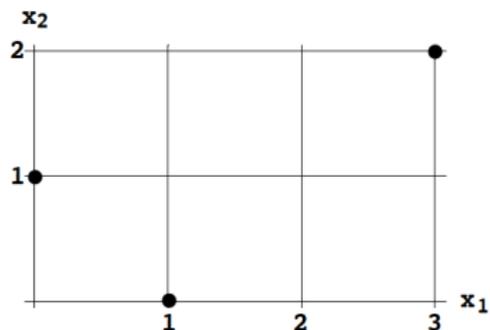
- Tout produit matrice-vecteur est une application linéaire
- Si T est une application linéaire alors

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{and} \quad T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v}).$$

Exercice

Soient $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Supposons que $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$

est une transformation linéaire qui envoie \mathbf{e}_1 sur \mathbf{y}_1 et \mathbf{e}_2 sur \mathbf{y}_2 . Trouver les images de $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.



$$T(3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) = 3T(\mathbf{e}_1) + 2T(\mathbf{e}_2)$$

Exercice

Définissons $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ tel que $T(x_1, x_2, x_3) = (|x_1 + x_3|, 2 + 5x_2)$. Montrer que T n'est pas une application linéaire.

La matrice d'une application linéaire

Définition : matrice identité

- I_n est une matrice de taille $n \times n$ avec des 1 sur la diagonale (gauche à droite) et des 0 ailleurs. La i -ième colonne de I_n est notée \mathbf{e}_i .
- Pour \mathbf{x} dans \mathbf{R}^n ,

$$I_n \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Exemple

$$I_3 = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que

$$I_3 \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{x}$$

On a dit que si $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ est une application linéaire alors

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v}).$$

Exercice

Les colonnes de $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Supposons que T est une application linéaire de \mathbf{R}^2 vers \mathbf{R}^3 avec

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $T(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Matrice d'une application linéaire

- Soit $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ une application linéaire. Alors il existe une unique matrice A telle que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \text{ pour tout } \mathbf{x} \text{ dans } \mathbf{R}^n.$$

- De plus, A est la matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes de A sont les vecteurs $T(\mathbf{e}_j)$, où \mathbf{e}_j est la j -ième colonne de la matrice identité dans \mathbf{R}^n .

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad \cdots \quad T(\mathbf{e}_n)]$$

\uparrow

image de \mathbf{e}_2 par T
matrice de l'application linéaire T

Exercice

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 4x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

Exercice

Trouver la matrice de l'application linéaire $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ de rotation autour de l'origine et d'angle $\frac{\pi}{4}$.