Bases statistiques pour la biologie

Formation doctorale

Cyril Dalmasso
cyril.dalmasso@univ-evry.fr

Laboratoire de MAthématiques et Modélisation d'Evry (LaMME)
Université Paris-Saclay, CNRS, Université d'Evry

20-22 juin 2022

Exemple introductif

On s'intéresse à l'effet d'une dose faible de cambendazole sur les infections des souris par la Trichinella Spiralis. 16 souris ont été infectées par un même nombre de larves de Trichinella et ensuite réparties au hasard entre deux groupes. Le premier groupe de 8 souris a reçu du cambendazole, à raison de 10 mg par kilo, 60 heures après l'infection. Les 8 autres souris n'ont pas reçu de traitement. Au bout d'une semaine, toutes les souris ont été sacrifiées et les nombres suivants de vers adultes ont été retrouvés dans les intestins :

Souris non traitées	51	55	62	45	68	71	46	79
Souris traitées	45	53	52	51	57	51	68	88

Que peut-on dire au sujet d'une éventuelle efficacité du cambendazole, dosé à 10mg / kg pour le traitement des infections des souris par la Trichinella Spiralis ?

Statistique

Statistique : étude de la variabilité

Définitions

Le terme **statistique** est utilisé pour désigner trois notions distinctes :

1. Recueil de données
2. Méthodes utilisées pour analyser ces données
3. Toute grandeur calculée à partir d'observations

Statistique

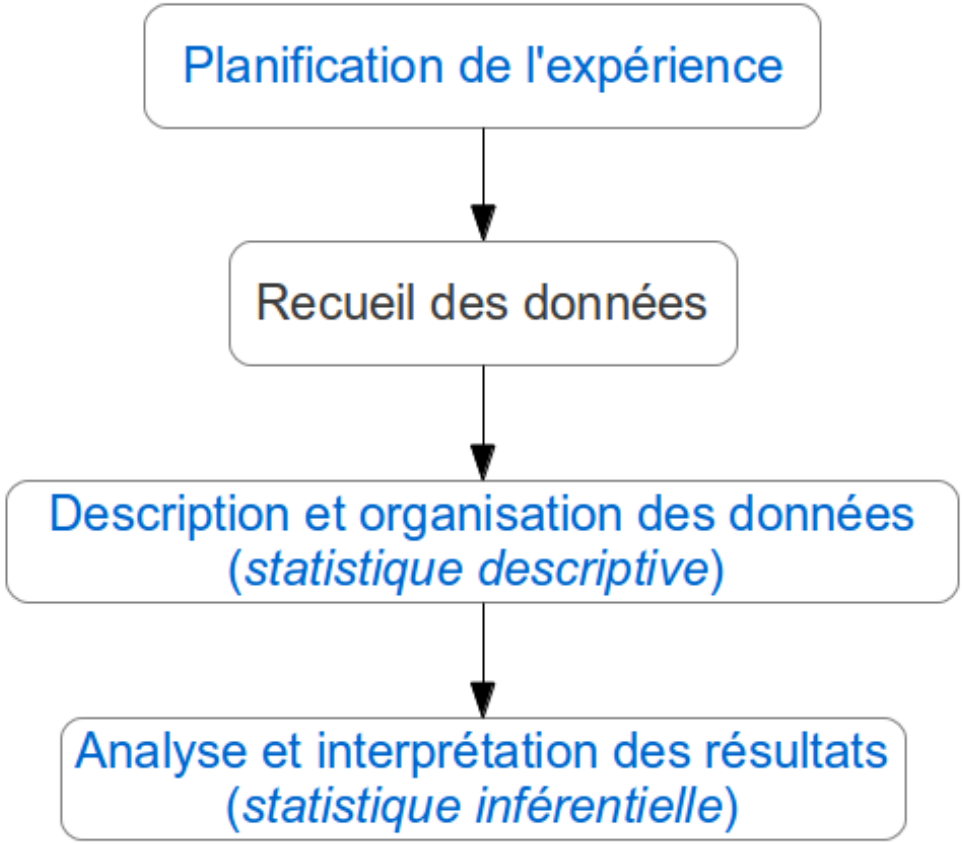
Définitions

- On appelle **statistique descriptive** l'ensemble des méthodes et techniques mathématiques permettant de représenter, de décrire et de résumer un ensemble de données.
- On appelle **statistique inférentielle** (ou inductive) l'ensemble des méthodes visant à modéliser un ensemble de données afin de tirer des conclusions sur un ensemble plus vaste.

Remarque

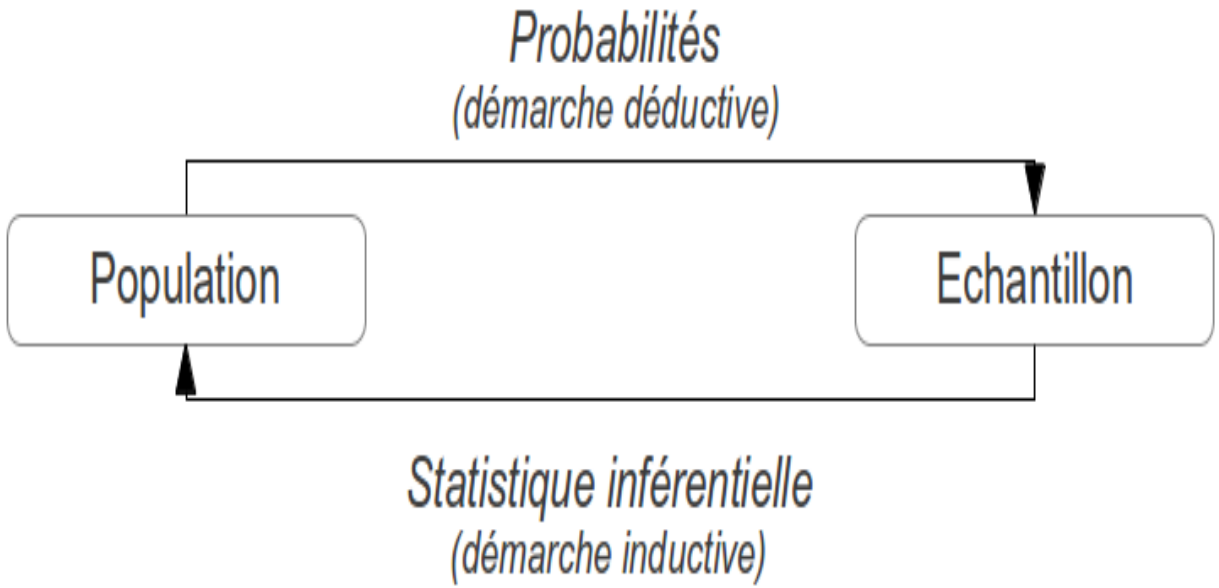
La statistique repose sur des modèles et des hypothèses issus des probabilités.

Démarche statistique



Statistiques et probabilités

Statistiques et probabilités sont deux aspects complémentaires de l'étude des phénomènes aléatoires



Statistique descriptive

Objectif

Organiser et résumer les données afin d'en dégager les caractéristiques principales sous une forme simple et intelligible

Remarque

La statistique descriptive permet notamment d'identifier des valeurs extrêmes ou aberrantes et de vérifier certaines hypothèses de modélisation

Types de représentation

- Tableaux
- Graphiques
- Indicateurs numériques

Vocabulaire

- **Population** : ensemble (grand, voire infini) d'individus ou d'objets de même nature
- **Echantillon** : sous ensemble de la population
- **Caractère / Variable** : une caractéristique de la population pouvant prendre différentes valeurs
- **Modalité** : toute valeur que peut prendre une variable
- **Série statistique** : ensemble des données recueillie pour un caractère donné à partir d'un échantillon

Types de variables

- Variable **quantitative** : variable/caractère à laquelle on peut associer un nombre
  - **discrète** : ne peut prendre qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs
  - **continue** : peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de l'ensemble des nombres réels
- Variable **qualitative** : variable/caractère dont les modalités ne sont pas quantifiables
  - **ordinale** : variable dont les modalités peuvent être ordonnées
  - **nominale** : variable dont les modalités ne peuvent pas être ordonnées

Exemple 1

Qualité de l'air

Dans le cadre d'une étude portant sur la qualité de l'air à New York en 1973, les données suivantes ont été recueillies :

Ozone	Ensoleillement	Vent	Température	Mois
6	78	18.4	57	5
11	44	9.7	62	5
11	320	16.6	73	5
11	290	9.2	66	6
37	284	20.7	72	6
39	323	11.5	87	6
50	275	7.4	86	7
85	175	7.4	89	7
7	48	14.3	80	7
168	238	3.4	81	8
23	115	7.4	76	8
24	259	9.7	73	8
32	92	15.5	84	9

Tableaux

Tableau individu-caractère

Dans le cadre d'une étude portant sur la contamination du lait par des spores de clostridia, on analyse 10 tubes de 1ml de lait et, pour chaque tube, on compte le nombre de spores présents :

Indice tube	Nombre de spores
1	0
2	1
3	0
4	3
5	2
6	0
7	0
8	1
9	2
10	1

Tableaux

Définitions

Soit X un caractère qualitatif ou quantitatif discret pouvant prendre k modalités $(x^1, ..., x^k)$ observé sur un échantillon de taille n.

- L'**effectif** n_i d'une modalité x^i est le nombre d'individus pour lesquels la modalité x^i a été observée
- La **fréquence** f_i d'une modalité x^i est le nombre f_i tel que :

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Remarque

Pour un caractère quantitatif continu, la notion de fréquences suppose une répartition des observations en k **classes** (chaque classe étant définie par un intervalle)

Fonctions R

`table`, `prop.table`

Tableaux

Tableau des fréquences

Nombre de spores	0	1	2	3
Nombre de tubes	4	3	2	1
Fréquence	0.4	0.3	0.2	0.1

Tableaux

Table de contingence

On compare les réactions produites par deux vaccins BCG désignés par A et B.

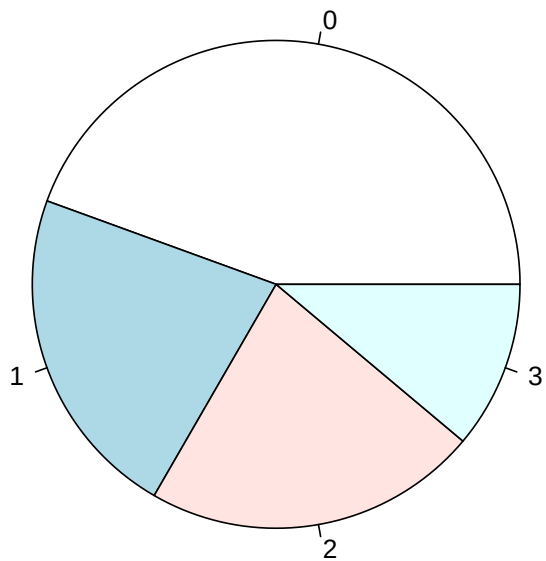
Vaccin	Réaction légère	Réaction moyenne	Ulcération	Abcès	Total
A	12	156	8	1	177
B	29	135	6	1	171
Total	41	291	14	2	348

Graphiques

Les graphiques donnent de manière immédiate une information sur la distribution des observations.

Diagramme circulaire

Spores de clostridia (variable quantitative discrète)

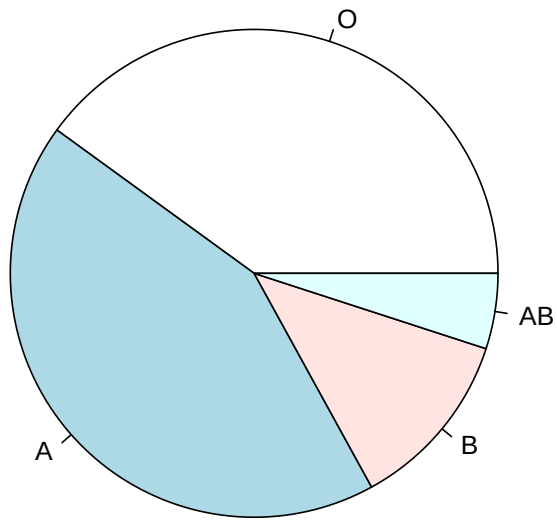


Graphiques

Les graphiques donnent de manière immédiate une information sur la distribution des observations.

Diagramme circulaire

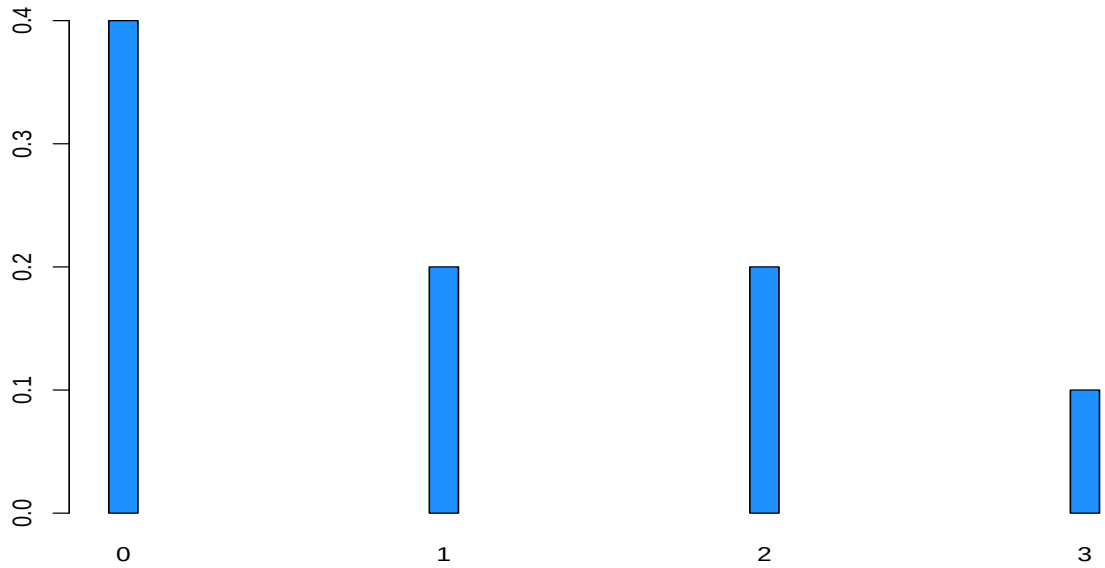
Groupes sanguins (variable qualitative nominale)



Graphiques

Diagramme des fréquences

Spores de clostridia (variable quantitative discrète)



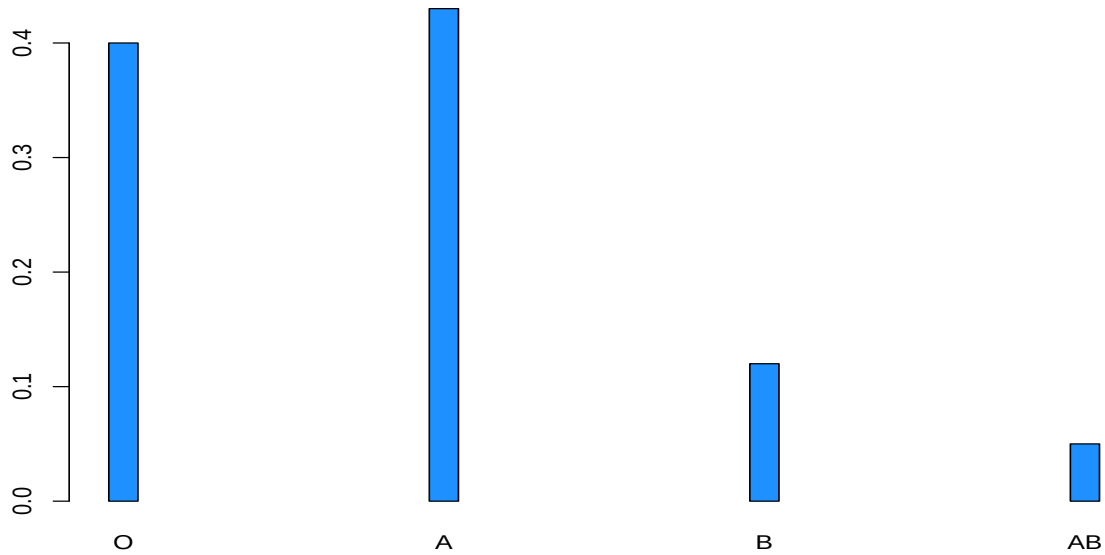
Fonction R

`barplot`

Graphiques

Diagramme des fréquences

Groupes sanguins (variable qualitative nominale)

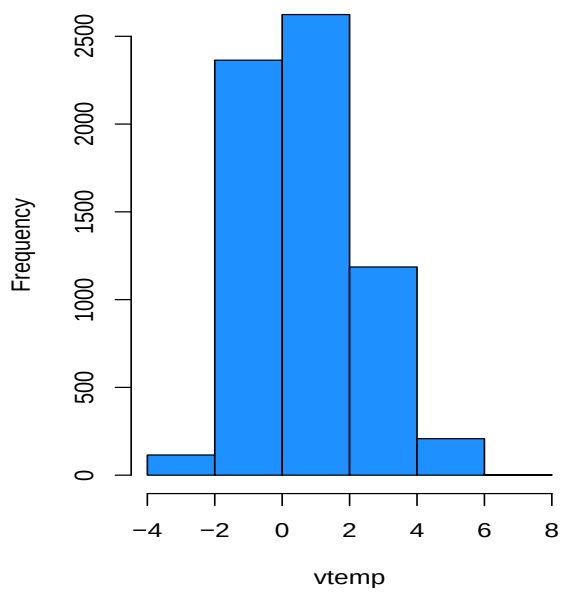


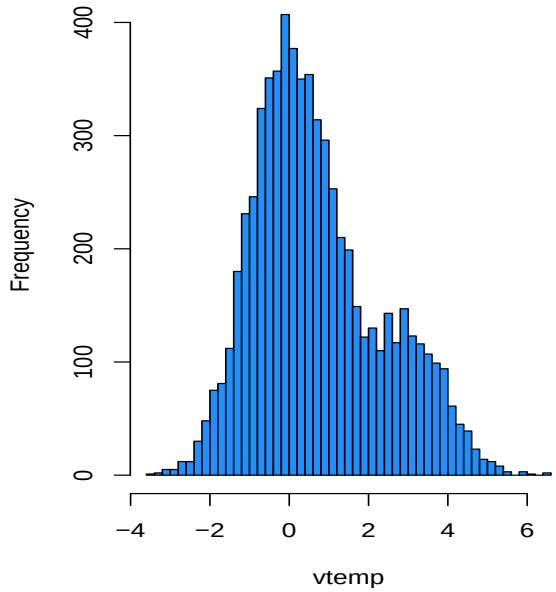
Fonction R

`barplot`

Graphiques

Histogramme



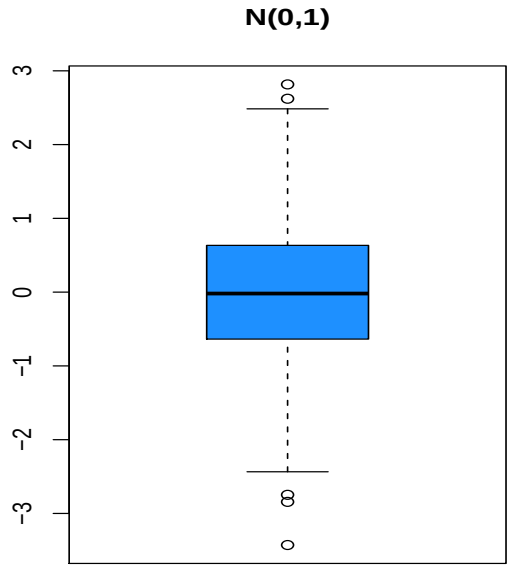


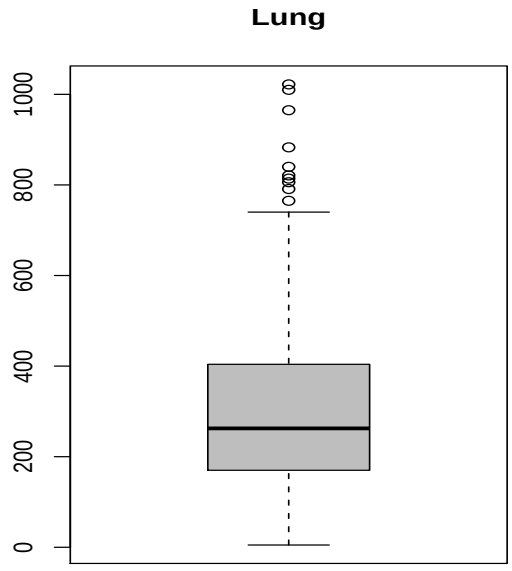
Fonction R

`hist`

Graphiques

Boîtes à moustaches (boxplot)





Fonction R

`barplot`

Indicateurs numériques

Les indicateurs numériques n'ont de sens que pour des variables quantitatives

Indicateurs de position

- Mode
- Moyenne empirique
- Quantiles empiriques
- Médiane empirique

Indicateurs de dispersion

- Etendue
- Intervalle interquartile
- Variance empirique

Indicateurs de position

Mode

- Pour une variable discrète, le mode est la modalité x^i ayant la plus grande fréquence.
- Pour une variable continue, le mode est le centre de la classe ayant la plus grande fréquence.

Remarque

Une variable peut avoir plusieurs modes.

Indicateurs de position

Moyenne empirique

La moyenne empirique d'un échantillon est la moyenne arithmétique des observations :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Indicateurs de position

Quantiles empiriques

Le quantile empirique d'ordre $1/p$ (où p est un entier naturel) est la valeur $\tilde{q}_{1/p}$ qui partage l'échantillon en p parties de même effectif.

Quantiles particuliers

- **Médiane empirique** : quantile d'ordre $1/2$
- **Quartiles** : quantile d'ordre $i/4$
- **Déciles** : quantile d'ordre $i/10$
- **Centiles** : quantile d'ordre $i/100$

Indicateurs de position

Soit $x_1, ..., x_n$ les observations d'un échantillon et soit $x_{(1)} \leq ... \leq x_{(n)}$ les observations ordonnées.

Médiane empirique

La médiane empirique est le quantile d'ordre $1/2$:

- Si n est impair :

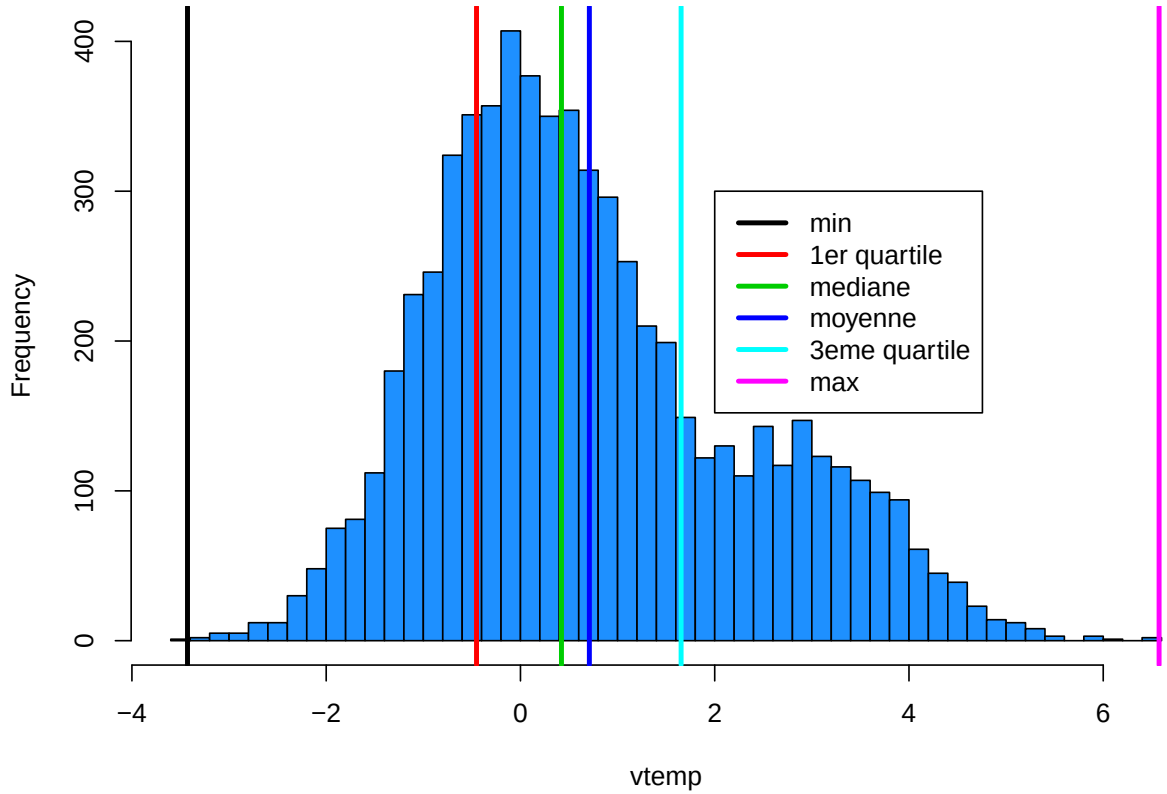
$$\tilde{x} = x_{(\frac{n+1}{2})}$$

- Si n est pair :

Toute valeur comprise entre $x_{(\frac{n}{2})}$ et $x_{(\frac{n}{2}+1)}$

Indicateurs de position

Exemple



Indicateurs de dispersion

Etendue

L'étendue mesure l'écart entre la plus grande et la plus petite des valeurs observées. Elle est définie par :

$$e_n = max(x_i) - min(x_i)$$

Indicateurs de dispersion

Distance interquartile

- L'**intervalle interquartiles** est l'intervalle :

$$[\tilde{q}_{1/4}; \tilde{q}_{3/4}]$$

. Il contient la moitié la plus centrale des observations.

- La longueur de cet intervalle

$$\Delta_q = q_3 - q_1$$

est appelée **distance interquartile**. Cette quantité est un indicateur de dispersion.

Indicateurs de dispersion

Variance empirique

La variance empirique d'un échantillon est définie par :

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}_n^2$$

Elle mesure l'écart quadratique moyen de l'échantillon à sa moyenne.

Ecart-type

L'écart-type est défini par :

$$s = \sqrt{s^2}$$

Contrairement à la variance empirique, il est exprimé dans la même unité de mesure que le caractère X.

Indicateurs de dispersion

Variance empirique corrigée

La variance empirique corrigée est définie par :

$$s^*2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}_n^2)$$

Elle possède de meilleures propriétés que la variance empirique (voir chapitre *Estimation*)

Ecart-type corrigé

L'écart-type corrigé est défini par :

$$s^* = \sqrt{s^{*2}}$$

Contrairement à la variance empirique, il est exprimé dans la même unité de mesure que le caractère X.

Probabilité

Définition axiomatique (Kolmogorov-1933)

Une **probabilité** est une application $\mathbb{P} : \Omega \to [0, 1]$ telle que :

- pour tout $A \in \Omega$, on a $\mathbb{P}(A) \geq 0$,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Remarque

Une probabilité est une mesure.

Définition

On appele **espace probabilisé** le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La **probabilité conditionnelle** de A par rapport à B, notée $\mathbb{P}(A|B)$ ou $P_B(A)$ (probabilité de A sachant B), est donnée par :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Indépendance

Définition

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

On note $A \perp\!\!\!\perp B$

Remarques

- Si A et B sont indépendants, alors
  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$
- Attention à ne pas confondre indépendance et incompatibilité.

Variables aléatoires réelles

Définitions

- Une **variable aléatoire réelle** X est une application qui à tout élément ω de Ω associe un nombre réel x

$$\begin{aligned} X \quad : \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega \mapsto x \end{aligned}$$

- On appelle **domaine de variation** (ou **support**) de X l'ensemble $D_x \subseteq \mathbb{R}$ des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X.

Remarques

- On note généralement X la variable aléatoire et x sa réalisation (c'est à dire $x = X(\omega_i)$ où $\omega_i \in \Omega$).

Variables aléatoires réelles

Définition

- Une variable aléatoire **discrète** est une variable aléatoire dont le domaine de variation contient un nombre fini ou une infinité dénombrable de valeurs.
- Une variable aléatoire **continue** est une variable aléatoire dont le domaine de variation contient une infinité non dénombrable de valeurs.

Loi de probabilité

Définitions

- Soit X une variable aléatoire **discrète** telle que $\Omega_X = x_1, ..., x_N$. La loi de probabilité de X est définie/caractérisée par sa **fonction de probabilité** qui donne, pour tout $i \in 1, ..., N$

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$$

- Soit X une variable aléatoire **continue**. On appelle **densité** de probabilité la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = lim_{\delta \to 0} \frac{\mathbb{P}(X \in [x; x + \delta])}{\delta}$$

Remarque : Pour δ proche de 0, $f(x)dx \approx \mathbb{P}(X \in [x; x + \delta])$

Fonction de répartition

Définition

On appelle **fonction de répartition** la fonction F définie par :

$$\begin{array}{rcl} F & : & D_X \longrightarrow [0,1] \\ & & x_i \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x_i) \end{array}$$

Propriétés

i) $F(x) \in [0,1]$

ii) F est une fonction croissante

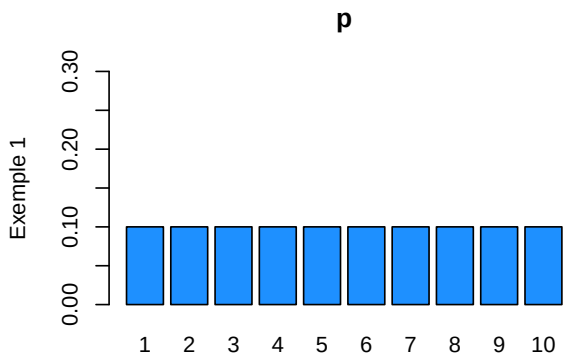
iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

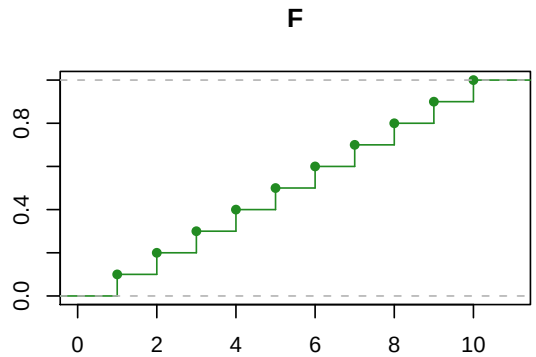
iv) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

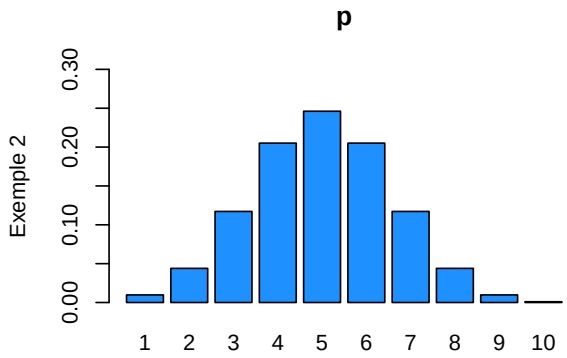
v)
- Pour une variable aléatoire discrète, F est une fonction en escaliers
- Pour une variable aléatoire continue, F est une fonction continue

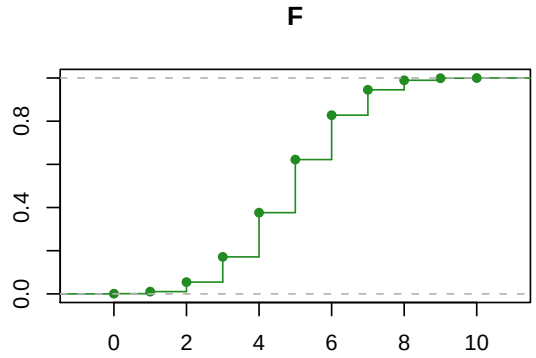
Fonction de répartition

Représentation graphique - lois discrètes



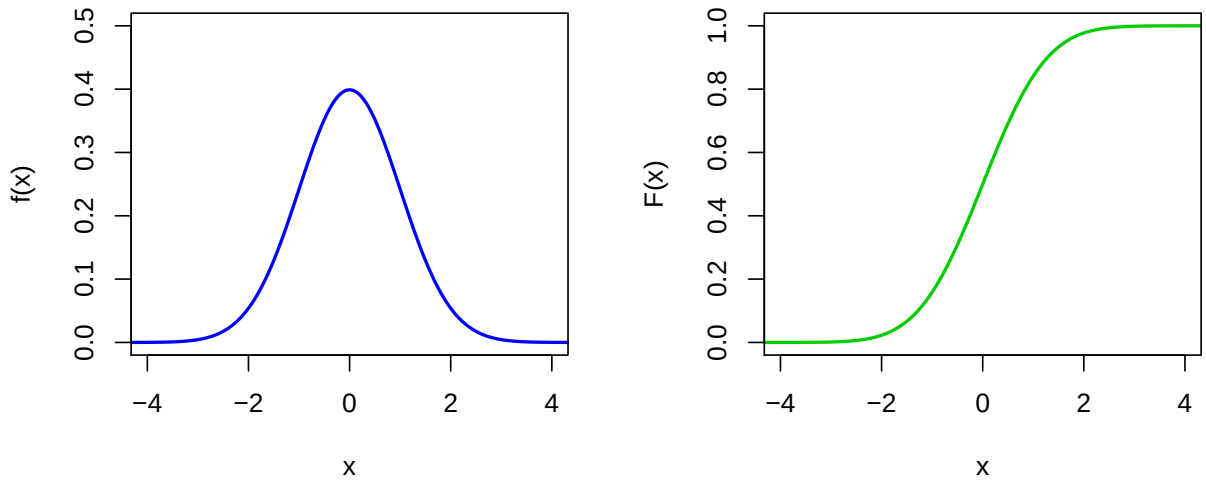






Fonction de répartition

Représentation graphique - lois continues



Fonction de répartition

Liens entre fonction de répartition et fonction de probabilité : cas discret

- $F(x) = \sum_{x_i \leq x} \mathbb{P}(x_i)$
- $\mathbb{P}(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Fonction de répartition

Liens entre fonction de répartition et densité : cas continu

- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \Leftrightarrow f(x) = F'(x)$
- Pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

Remarque

Il est équivalent de spécifier $f(x)$ ou $F(x)$

Espérance

Définition

L'**espérance** $E(X)$ d'une variable aléatoire X est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i \qquad \text{(cas discret)}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \qquad \text{(cas continu)}$$

Remarques

- L'espérance ne fait pas nécessairement partie de D_x
- L'espérance n'est pas toujours définie

Variance et écart-type

Définitions

- La **variance** $Var(X)$ d'une variable aléatoire X est définie par :

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

- L'**écart-type** est défini par

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Variance et écart-type

Théorème (de König-Huygens)

Pour toute variable aléatoire réelle X, on a :

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Propriétés

- Comme l'espérance, la variance n'existe pas toujours
- $Var(X) \geq 0$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$

Quantiles

Définition

Le **p-quantile** (parfois appelé **p-fractile**) d'une variable aléatoire X est la valeur q_p telle que :

$$\mathbb{P}(X \leq q_p) = p; p \in [0, 1]$$

$$\Leftrightarrow q_p = F^{-1}(p)$$

Quantiles particuliers

- **Médiane** : quantile d'ordre $i/2$
- **Quartiles** : quantile d'ordre $i/4$
- **Déciles** : quantile d'ordre $i/10$
- **Centiles** : quantile d'ordre $i/100$

Covariance

Définition

Pour un couple de variables aléatoires (X, Y), la **covariance** est définie par :

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Remarques

- $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow Cov(X,Y) = 0$ mais $Cov(X,Y) = 0 \not\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$
- $Var(X) = Cov(X,X)$

Coéfficient de corrélation de Pearson

Définition

Pour un couple de variables aléatoires (X, Y), le **coéfficient de corrélation** est défini par :

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Propriété

$$\rho_{X,Y} \in [-1; 1]$$

Coéfficient de corrélation de Spearman

Définition

Pour un couple de variables aléatoires (X, Y), le **coéfficient de corrélation de Spearman** est défini par :

$$\rho_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n}$$

Propriété

$$\rho_{X,Y} \in [-1; 1]$$

Quelques distributions dans R

Distribution	R
beta	beta
binomiale	binom
binomiale négative	nbinom
Cauchy	cauchy
Chi-deux	chiqsq
Exponentielle	exp
Fisher	f
Gamma	gamma
géométrique	geom
hypergéométrique	hyper
log-normal	lnorm
logistique	logis
normale	norm
normale multivariée	mvnorm
Poisson	pois
Student	t
uniforme	unif
Weibull	weibull
Wilcoxon	wilcox

TABLE – Principales distributions

Quelques distributions dans R

Distribution	R
beta	beta
binomiale	binom
binomiale négative	nbinom
Cauchy	cauchy
Chi-deux	chiqsq
Exponentielle	exp
Fisher	f
Gamma	gamma
géométrique	geom
hypergéométrique	hyper
log-normal	lnorm
logistique	logis
normale	norm
normale multivariée	mvnorm
Poisson	pois
Student	t
uniforme	unif
Weibull	weibull
Wilcoxon	wilcox

TABLE – Principales distributions

Quelques distributions dans R

Distribution	R	Paramètres
beta	beta	
binomiale	binom	size, prob
binomiale négative	nbinom	
Cauchy	cauchy	
Chi-deux	chiqsq	df
Exponentielle	exp	rate
Fisher	f	df1, df2
Gamma	gamma	
géométrique	geom	
hypergéométrique	hyper	
log-normal	lnorm	
logistique	logis	
normale	norm	mean, sd
normale multivariée	mvnorm	mean, sigma
Poisson	pois	
Student	t	df
uniforme	unif	min, max
Weibull	weibull	
Wilcoxon	wilcox	

TABLE – Principales distributions

Quelques fonctions R

Tirage aléatoire

Forme générique : `r+distrib(n,...)`
`r` pour « random » : `n` donne la taille de l'échantillon et `...` sont les paramètres requis selon la forme de `distrib`.

Fonction de répartition

Forme générique : `p+distrib(x,...)`
`p` pour « probability distribution function » : donne $\mathbb{P}(X \leq \texttt{x})$, où X est une variable aléatoire de loi `distrib`.

Quelques fonctions R

Densité

Forme générique : `d+distrib(x,...)`

d pour « density » : donne la densité pour une variable aléatoire continue et $\mathbb{P}(X = \texttt{x})$ pour X une variable aléatoire discrète.

Quantiles

Forme générique : `q+distrib(alpha,...)`

q pour « quantile » : donne la valeur de x définie par

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \alpha,$$

où X est une variable aléatoire de loi `distrib`.

Loi uniforme discrète

Définition

La loi uniforme discrète sur $\{1, ..., n\}$ est la loi d'une variable aléatoire X qui peut prendre les valeurs $1, ..., n$ de manière équiprobable.

Notation

$$X \sim U(\{1, ..., n\})$$

Fonction de probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \; ; \forall k \in \{1, ..., n\}$$

Loi uniforme discrète

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Exemple type

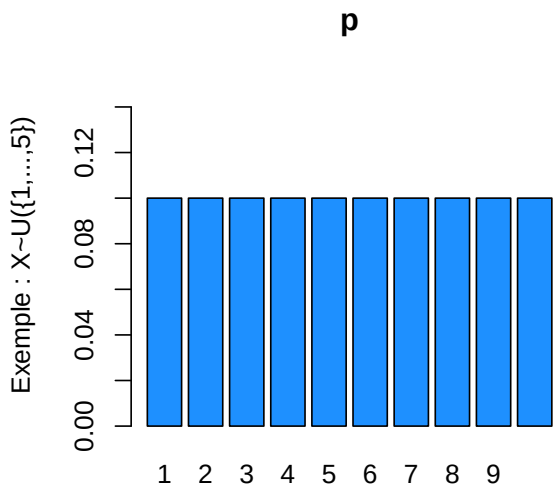
Lancé d'un dé équilibré.

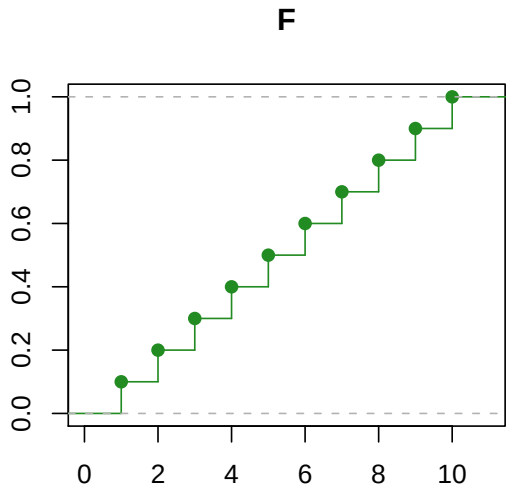
Fonctions R

`sample`

Loi uniforme discrète

Graphiques





Loi de Bernoulli

Définition

La loi de Bernoulli de paramètre p est la loi d'une variable aléatoire discrète X qui prend la valeur 1 avec probabilité p et la valeur 0 avec probabilité $1-p$. L'expérience associée est appelé une **épreuve de Bernoulli**.

Notation

$$X \sim \mathcal{B}(p)$$

Fonction de probabilité

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1-p & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Loi de Bernoulli

Espérance et variance

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

Exemple type

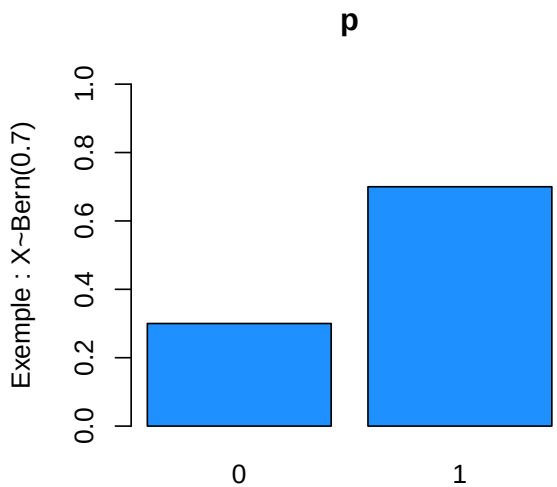
Pile ou face

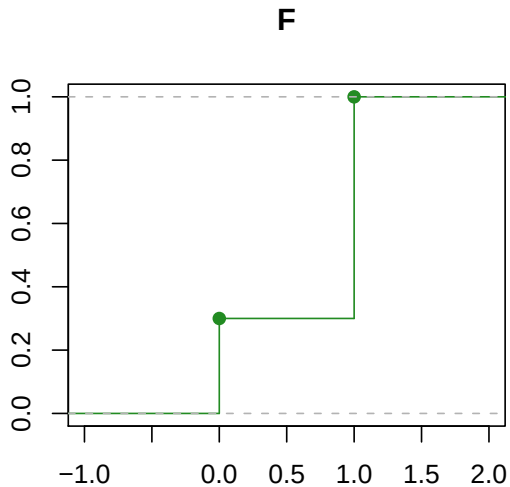
Fonctions R

`pbinom dbinom qbinom rbinom`

Loi de Bernoulli

Graphiques





Loi binomiale

Définition

La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de la somme X de n variables aléatoires Y_i indépendantes telles que $Y_i \sim \mathcal{B}(p)$.

Notation

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Fonction de probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)} \; ; \; k = 1, ..., n$$

Loi binomiale

Espérance et variance

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

Exemple type

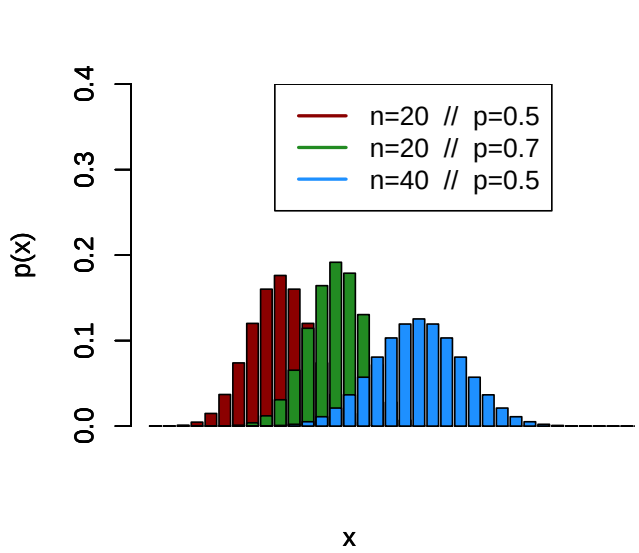
Comptage du nombre de succès sur n épreuves de Bernoulli.

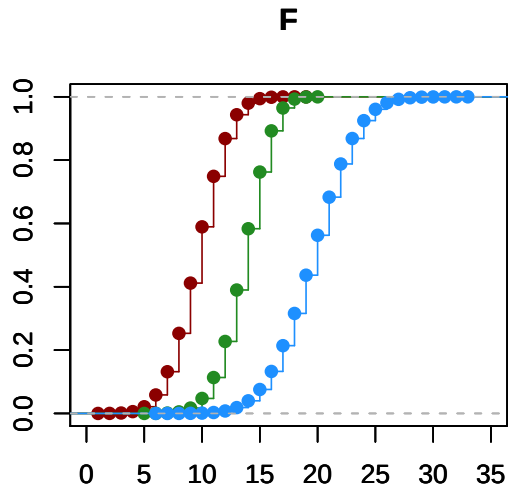
Fonctions R

`pbinom dbinom qbinom rbinom`

Loi binomiale

Graphiques





Loi de Poisson

Définition

La loi de Poisson (parfois appelée loi des événements rares) de paramètre $\lambda > 0$ est définie par la fonction de probablité qui suit.

Notation

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

Fonction de probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \; ; \; k = 1, ..., n$$

Loi de Poisson

Espérance et variance

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

Exemple type

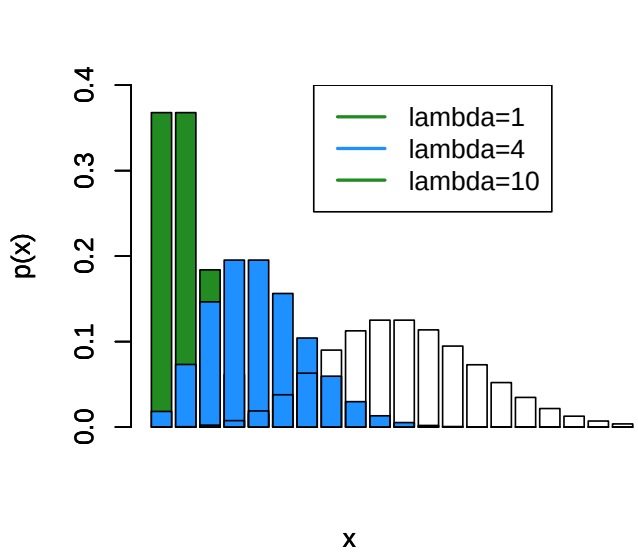
Comptage du nombre d'événements au cours d'un intervalle de temps.

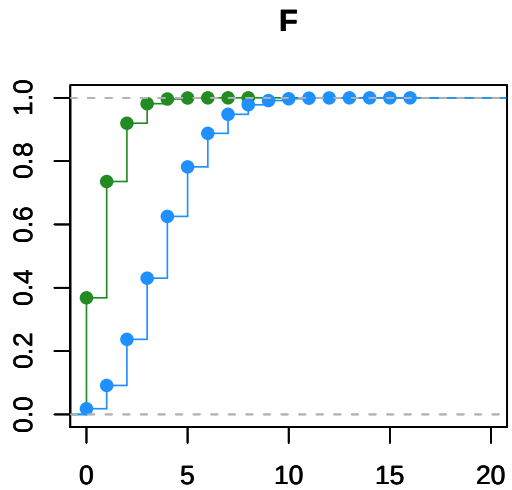
Fonctions R

`ppois dpois qpois rpois`

Loi de Poisson

Graphiques





Loi de Poisson

Théorème 1

Lorsque n tend vers l'infini et que, simultanément, p_n devient petit de sorte que $lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$, la loi binomiale de paramètres n et n_p converge vers la loi de Poisson de paramètre λ.
En pratique, l'approximation peut être faite lorsque $n > 30$ et $np < 5$ ou $n > 50$ et $p < 0.1$.

Théorème 2

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, alors

$$Y = X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Loi géométrique

Définition

La loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$ est la loi de la variable aléatoire Y qui compte le nombre de répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli (de paramètre p) jusqu'au premier succès.

Notation

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

Fonction de probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \, ; \, k = 1, ..., n$$

Loi géométrique

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemple type

Comptage du nombre d'expériences nécessaires pour obtenir un premier succès en répétant une épreuve de Bernoulli.

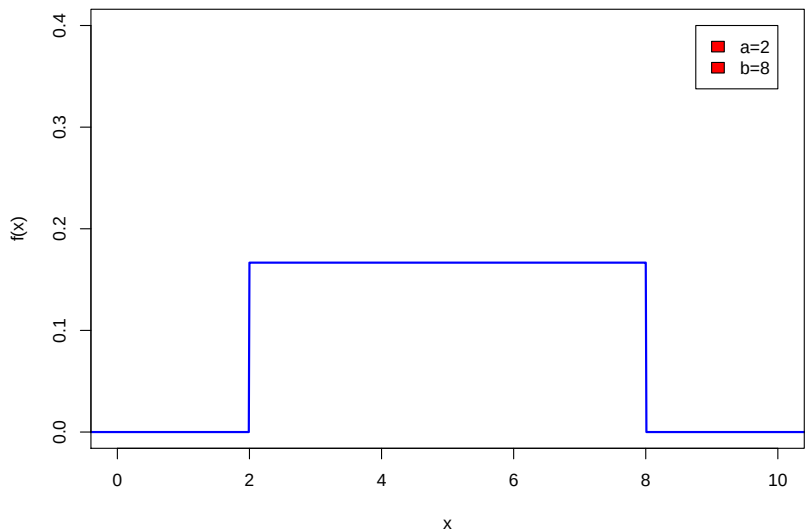
Fonctions R

`pgeom dgeom qgeom rgeom`

Loi uniforme

Densité

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(x)$$



Loi uniforme

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

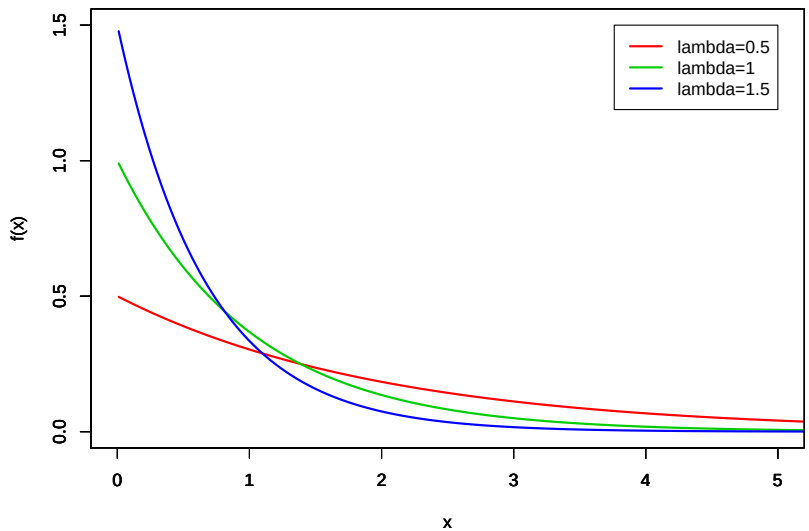
Fonctions R

`punif dunif qunif runif`

Loi exponentielle

Densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{x>0}$$



Loi exponentielle

Espérance et variance

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Fonctions R

`pexp dexp qexp rexp`

Loi normale

Définition

- Une variable aléatoire X suit une loi normale (ou loi de Gauss-Laplace) de paramètres μ et σ^2 si :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

- On note : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

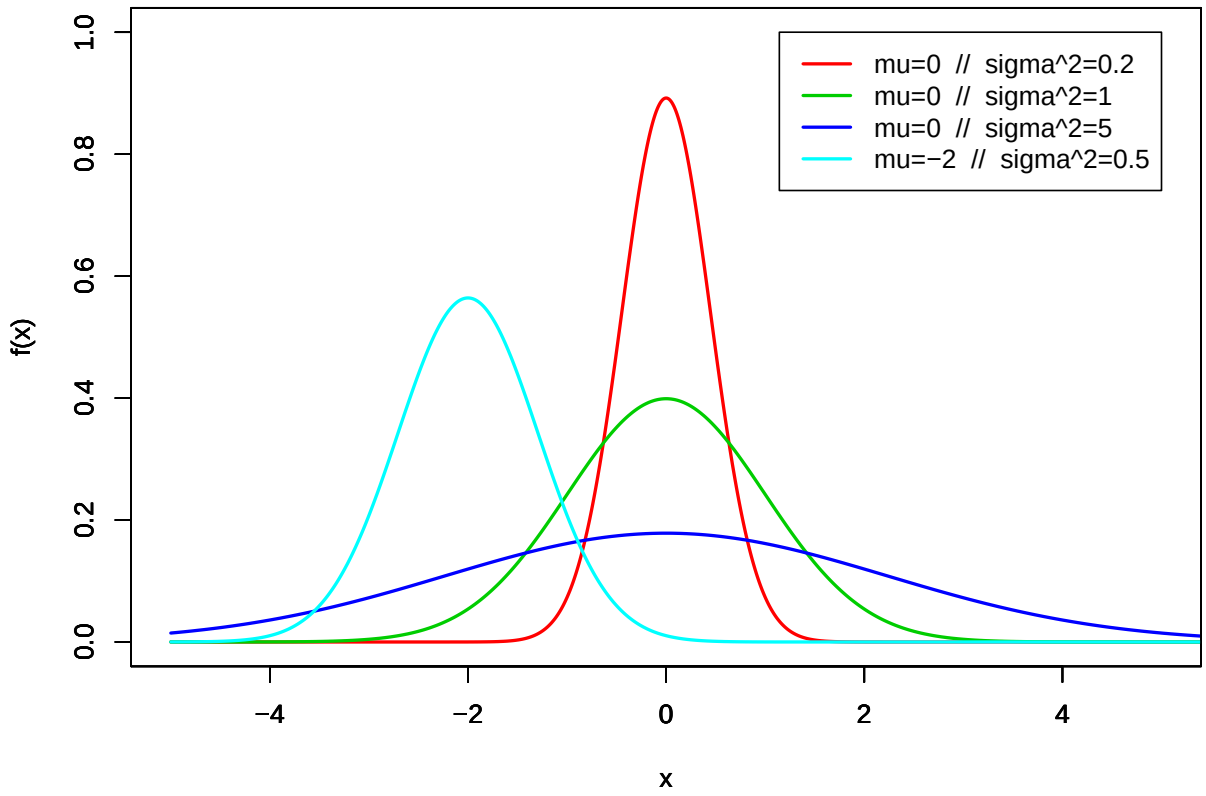
Fonction de répartition

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

Il n'existe pas de forme analytique de la fonction de répartition F.

Loi normale

Densité



Loi normale

Espérance et variance

Si X est une variable aléatoire réelle telle que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors :

- $E(X) = \mu$
- $Var(X) = \sigma^2$

Fonctions R

`pnorm dnorm qnorm rnorm`

Loi normale

Stabilité par combinaisons linéaires

- Si X est une variable aléatoire telle que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors :

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors :

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Loi normale centrée réduite

Définition

On appelle **loi normale centrée réduite** la loi $N(0,1)$.

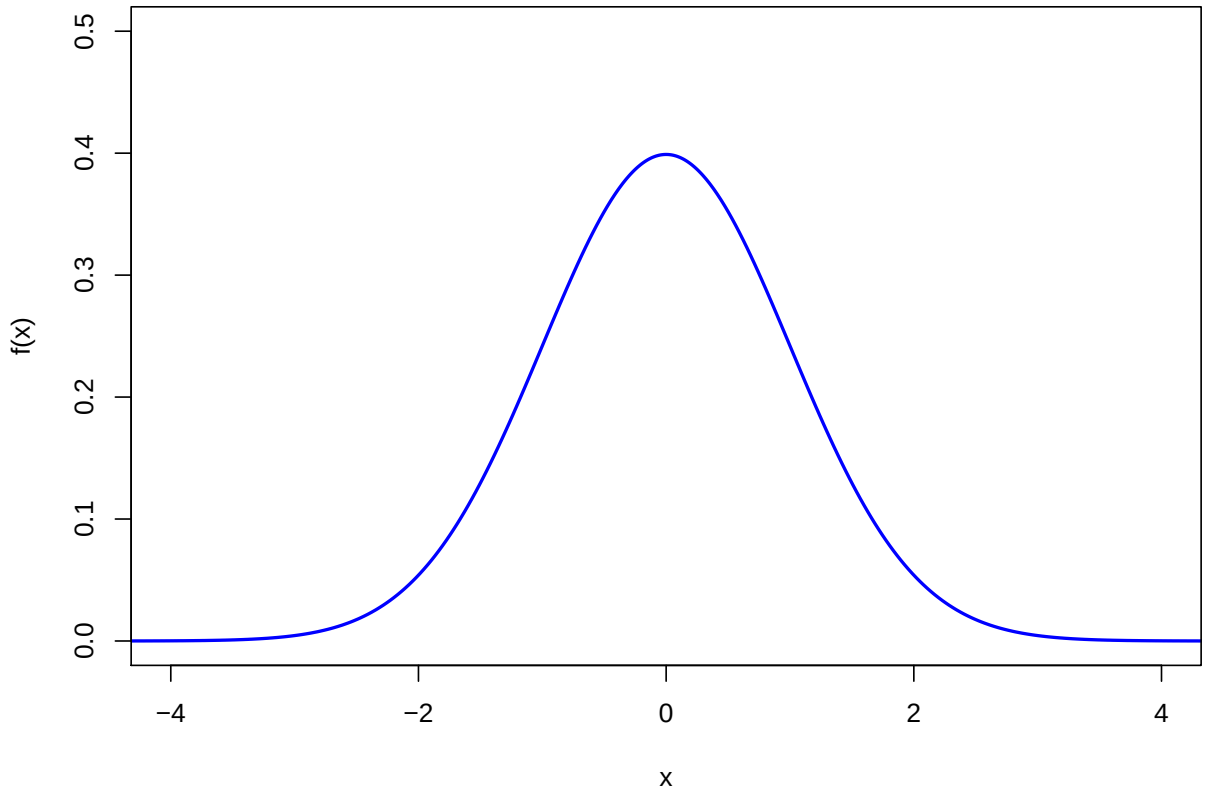
Propriété

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors $Y = \dfrac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \sim N(0,1)$

Notations

Par convention, on note ϕ la densité d'une $N(0,1)$ et Φ sa fonction de répartition.

Loi normale centrée réduite



Loi normale centrée réduite

Propriétés

- ϕ est une fonction paire
- $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$
- $\mathbb{P}(|X| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq X \leq x) = 2(\Phi(x) - 1/2)$
- $\mathbb{P}(|X| \geq x) = \mathbb{P}((X \leq -x) \cap (X \geq x)) = 2(1 - \Phi(x))$

Théorème de la limite centrale

Théorème

Soit $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées d'espérance μ et de variance σ^2 :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

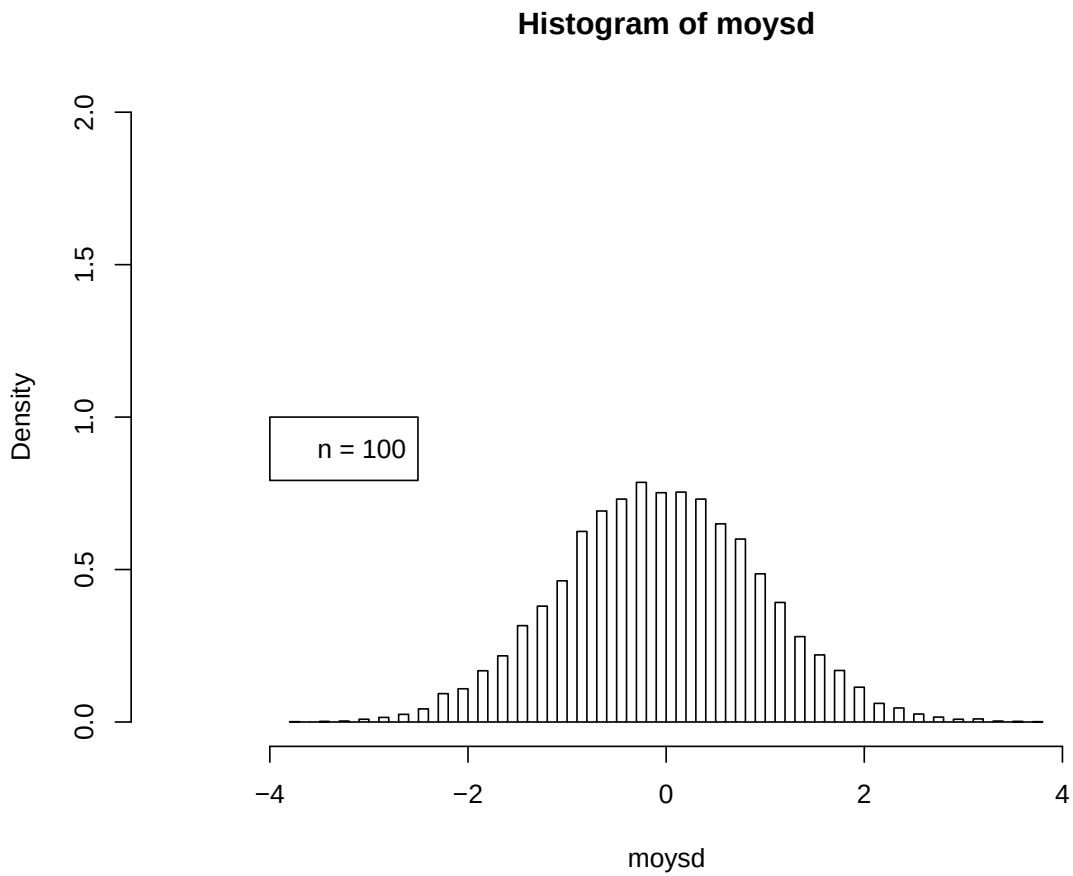
$$\Leftrightarrow Y = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$$

Remarque

Ce théorème est appelé théorème de la limite centrale (TLC) ou théorème de la limite centrée (TLC) ou théorème central limite (TCL)

Théorème de la limite centrale

Illustration



Satellites de la loi normale - Loi du χ^2

Définition

Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrée réduite.
La variable aléatoire $Y = X_1^2 + ... + X_n^2$ suit une loi continue appelée loi du χ^2 à n degrés de liberté :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$$

.

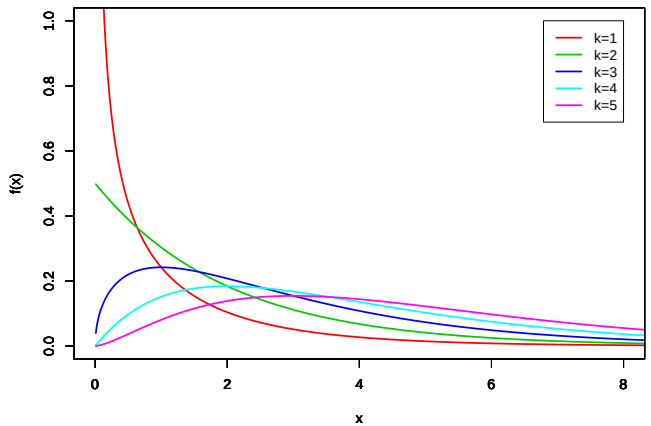
Propriétés

- Si $Y_1 \sim \chi_{n_1}^2$ et $Y_2 \sim \chi_{n_2}^2$ avec $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$, alors $Y = Y_1 + Y_2 \sim \chi_{n_1+n_2}^2$
- Si $Y \sim \chi_n^2$, alors $E(Y) = n$ et $Var(Y) = 2n$

Satellites de la loi normale - Loi du χ^2

Densité

$$f(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{(n-2)/2} e^{-x/2}$$



Fonctions R

`pchisq dchisq qchisq rchisq`

Satellites de la loi normale - Loi de Student

Définition

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim N(0,1)$ et $Y \sim \chi^2_n$. La variable aléatoire $T = X/\sqrt{Y/n}$ suit une loi continue appelée loi de Student à n degrés de liberté :

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_n$$

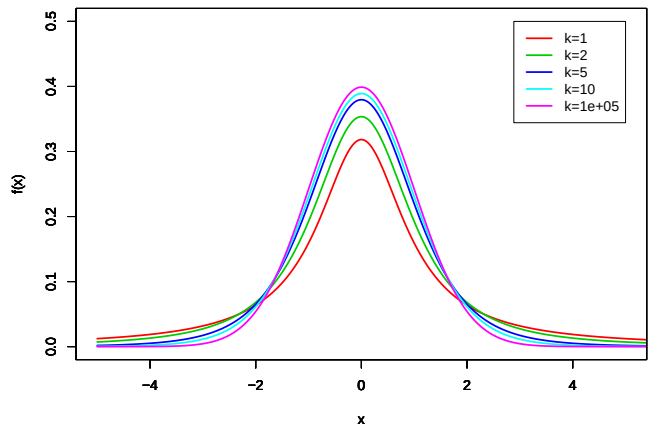
Propriétés

- $E(T) = 0$
- $Var(T) = \frac{n}{n-2}$ si $n > 2$

Satellites de la loi normale - Loi de Student

Densité

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$$



Fonctions R

`pt dt qt rt`

Satellites de la loi normale - Loi de Fisher-Snedecor

Définition

Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $Y_1 \sim \chi^2_{n_1}$ et $Y_2 \sim \chi^2_{n_2}$. La variable aléatoire $Z = (Y_1/n_1)/(Y_2/n_2)$ suit une loi continue appelée loi de Fisher à n_1 et n_2 degrés de liberté :

$$Z = \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2} \sim \mathcal{F}(n_1; n_2)$$

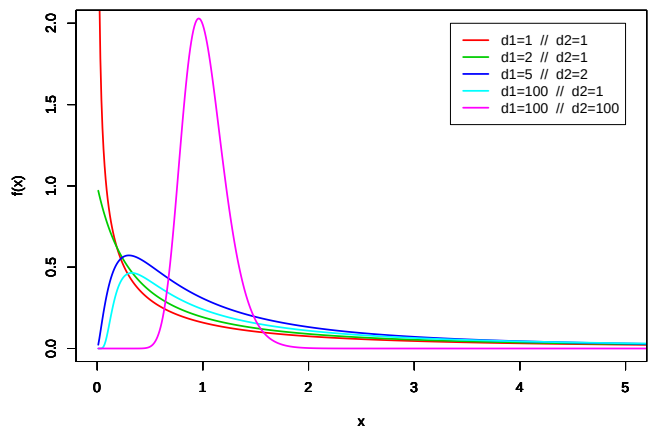
Remarques

- $Z_1 \sim F(n_2; n_1) \Rightarrow Z_2 = 1/Z_1 \sim \mathcal{F}(n_1; n_2)$
- $T \sim t_n \Rightarrow Z = T^2 \sim \mathcal{F}(1; n)$

Satellites de la loi normale - Loi de Fisher-Snedecor

Densité

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2} \frac{x^{n_1/2-1}}{(n_2+n_1 x)}$$



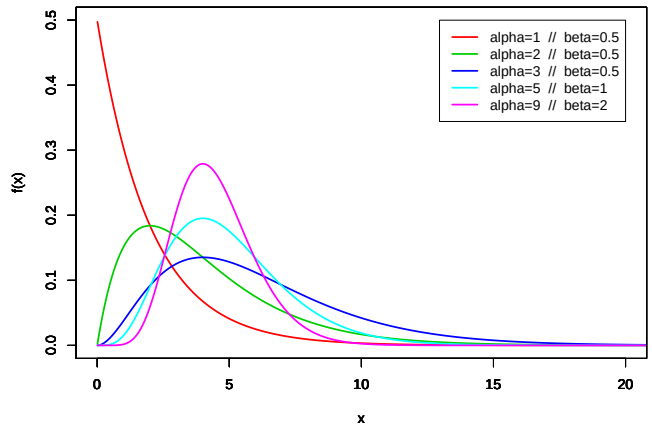
Fonctions R

`pf df qf rf`

Loi Gamma

Densité

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x\beta}$$



Remarque

Les lois du χ^2 et les lois exponentielles sont des lois Gamma particulières

Distributions usuelles

Lois discrètes

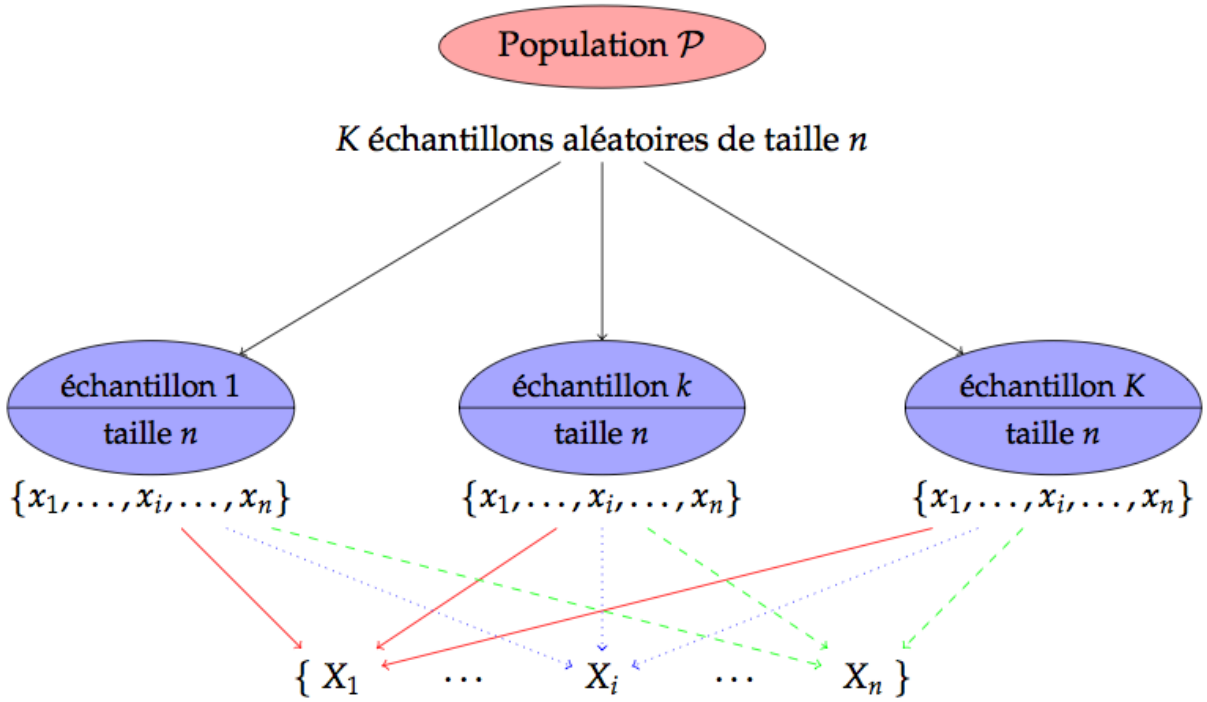
Lois de probabilité discrètes	Fct de probabilité	$E(X)$	$Var(X)$	Genèse
Uniforme $X \sim U(\{1,2,\ldots,n\})$ $n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	-
Bernoulli $X \sim B(p)$ $0 \leq p \leq 1$	$p^x(1-p)^{1-x}$ si $x = 0, 1$	p	$p(1-p)$	Lancer d'une pèce de mo avec $\mathbb{P}(pile) = p$
Binomiale $X \sim B(n,p)$ n entier > 0, $0 \leq p \leq 1$	$C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$ si x=0,1,...,n	np	$np(1-p)$	Loi de la somme de n indépendantes de loi B
Poisson $X \sim P(\lambda)$ $\lambda > 0$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ si $x = 0, 1, 2, \ldots$	λ	λ	Limite de la loi binomiale $n \to \infty$, $np_n \to \lambda$ et $p_n \to 0$
Géométrique $X \sim G(p)$ $0 \leq p \leq 1$	$p(1-p)^{x-1}$ si $x = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	Nombre de lancers néce pour l'obtention du premi avec $\mathbb{P}(pile) = p$
Binomiale négative $X \sim BN(n,p)$ $0 \leq p \leq 1$	$C_{x-1}^{n-1} p^n (1-p)^{x-n}$ si $x = n, n+1, \ldots$	$\frac{n}{p}$	$\frac{n(1-p)}{p}$	Loi de la somme de n indépendantes de loi G

Distributions usuelles

Lois continues

Lois de probabilité continues	Fct de densité	Fct de répartition	$E(X)$	$Var(X)$
Uniforme $X \sim U[a,b]$ $a<b$	$\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)$	$\frac{x-a}{b-a}1_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle $X \sim Exp(\lambda)$ $\lambda>0$	$\lambda e^{-\lambda x}1_{x>0}$	$1-e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2\in\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$	-	μ	σ^2
Khi-deux $X \sim \chi^2_\nu$ $\nu>0$	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{(n-2)/2}e^{-x/2}$	-	ν	2ν
Student $X \sim \chi^2_\nu$ $\nu>0$	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$	-	0 si $\nu\geq 2$	$\frac{\nu}{\nu-2}$ si $\nu\geq 3$
Cauchy $X \sim C(\mu,\sigma)$ $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2\in\mathbb{R}^+$	$\frac{\sigma}{\pi[(x-\mu)^2+\sigma^2]}$	-	n'existe pas	n'existe pas
Gamma $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ $\alpha>0$, $\beta>0$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x\beta}$ si $x\geq 0$	-	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$

Echantillonnage



Echantillonnage

Définition

On appelle **échantillon aléatoire** (ou n-échantillon) le vecteur aléatoire $(X_1, ..., X_n)$

Remarque

Les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont **indépendantes et identiquement distribuées** (on note i.i.d.). Elles ont toutes la même loi que la variable aléatoire X appelée variable aléatoire parente.

Modèle statistique

Définition

On appelle **modèle statistique** la donnée du triplet $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{L}_\theta)_{\theta \in \Theta})$ où :

- Ω est l'univers
- $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω
- $(\mathcal{L}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ est une famille de lois de probabilité indicée par un vecteur de paramètres $\theta \in \Theta$

Remarque

En général, on suppose $X \sim \mathcal{L}_\theta$ et on cherche à obtenir de l'information sur θ.

Statistique

Définition

On appelle **statistique** toute fonction du n-échantillon $X_1, ..., X_n$:

$$\begin{aligned} T \quad : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (X_1, ..., X_n) \longmapsto T(X_1, ..., X_n)) \end{aligned}$$

Remarque

$t = T(x_1, ..., x_n)$ est une réalisation de la variable aléatoire T.

Statistique

Exemples

- Somme : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- Moyenne empirique (ou moyenne expérimentale / observée) : $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- Variance empirique (ou variance expérimentale / observée) : $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$
- Variance empirique corrigée : $S^{\star 2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{n}{n-1}S^2$

Estimation

Position du problème

- Soit X une variable aléatoire d'intérêt de loi $\mathcal{L}_\theta$, $\theta \in \Theta$.
- Soit $x_1, ..., x_n$ une observation du n-échantillon $X_1, ..., X_n$.
- Comment estimer θ à partir de $x_1, ..., x_n$?

Estimation

On distingue...

- Estimation ponctuelle
- Estimation par intervalles de confiance

Estimation ponctuelle

Un **estimateur ponctuel** est une statistique dont la réalisation (pour un échantillon donnée) constitue une estimation de l'un des paramètres θ de la distribution (ou de l'une des fonctions permettant de la caractériser).

Définition

On appelle estimateur de θ toute statistique Z à valeurs dans l'espace des paramètres Θ.

Notation

On note généralement $\hat{\theta}$ l'estimateur de θ.

Qualités d'un estimateur

Définitions

- On appelle **biais** d'un estimateur la quantité :

$$b(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

- Un estimateur est dit **sans biais** si

$$b(\hat{\theta}) = 0$$

- Un estimateur est dit **asymptotiquement sans biais** si

$$\lim_{n \to +\infty} b(\hat{\theta}) = 0$$

Qualités d'un estimateur

Définitions (suite)

- On appelle **erreur quadratique moyenne** la quantité :

$$EQM(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = Var(\hat{\theta}) + [b(\hat{\theta})]^2]$$

- Un estimateur est dit **consistant** (ou **convergent** en moyenne quadratique) si :

$$\lim_{n \to \infty} EQM(\hat{\theta}) = 0$$

Remarque

Pour montrer qu'un estimateur sans biais est consistant, il suffit de montrer que $\lim_{n \to \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$

Estimateurs usuels

- Moyenne empirique : $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- Variance empirique :
  $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$
- Variance empirique corrigée : $S^{\star 2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$

Moyenne empirique

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Propriétés

Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon tel que $E(X_i) = \mu$ et $V(X_i) = \sigma^2$

$$E(\overline{X}_n) = \mu \quad \text{et} \quad V(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Corollaire

$\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de μ.

Variance empirique et variance empirique corrigée

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 \quad \text{et} \quad S^{\star 2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$$

Propriétés

Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon tel que $E(X_i) = \mu$ et $V(X_i) = \sigma^2$

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \quad \text{et} \quad V(S^2) = \frac{n-1}{n^3}((n-1)\mu_4 - (n-3)\sigma^2)$$

Corollaire

$S^{\star 2} = \frac{n}{n-1}S^2$ est un estimateur sans biais et convergent de σ^2

Estimation par intervalle

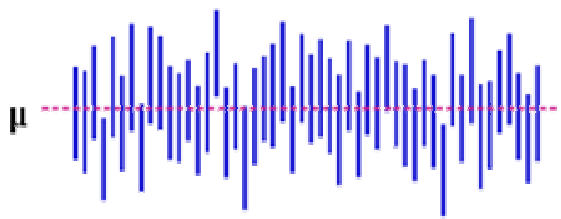
Définition

Un **intervalle de confiance** de niveau $1-\alpha$ du paramètre μ est un intervalle $[a, b]$ tel que :

$$\mathbb{P}(\mu \in [a, b]) = 1 - \alpha$$

Remarque

Ce sont les bornes a et b de l'intervalle qui sont aléatoires.



Estimation par intervalle

Famille gaussienne, variance connue

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de loi $N(\mu, \sigma^2)$. on suppose σ^2 connu. L'intervalle :

$$IC_{(1-\alpha)} = \left[\overline{X_n} - q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}; \overline{X_n} + q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

est un intervalle de confiance de niveau $(1-\alpha)$ pour μ

Estimation par intervalle

Famille gaussienne, variance inconnue

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon de loi $N(\mu, \sigma^2)$. on suppose σ^2 inconnu. L'intervalle :

$$IC_{(1-\alpha)} = \left[\overline{X_n} - t_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_n^{*2}}{n}} ; \overline{X_n} + t_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_n^{*2}}{n}} \right]$$

est un intervalle de confiance de niveau $(1 - \alpha)$ pour μ

Tests d'hypothèses

Définitions

- Un **test statistique** est une procedure permettant de trancher entre deux hypothèses au vue des observations.
- Une **hypothèse statistique** est un ennoncé portant sur les caractéristiques d'une population (paramètre ou forme d'une distribution)

Exemple

Exemple

- On désire étudier la durée de vie d'une fleur F. On admet que la durée de vie de cette fleur est une variable aléatoire gaussienne dont l'espérance est de 77 jours dans des conditions normales. On suppose que l'écart-type est égal à 10 jours.
- Un spécialiste propose une alimentation qui - selon lui - augmente la durée de vie moyenne de cette fleur. Pour s'en assurer un laboratoire soumet 10 fleurs au régime proposé. A la fin de l'expérience, les durées de vie de ces 10 fleurs sont les suivantes (en jours) :
  94, 73, 85, 82, 84, 95, 71, 86, 82, 68.
- Proposer un test au niveau 5% permettant de déterminer si le régime proposé par le spécialiste a un effet significatif ou pas.

Démarche

1. Choisir les hypothèses à tester (H_0 et H_1)
2. Fixer le niveau du test α
3. Choisir une statistique de test
4. Déterminer la règle de décision (région de rejet Γ)
5. Calculer la statistique (et la p-valeur)
6. Conclure

Risques d'erreurs

Résultats possibles

Décision / Réalité	Ne pas rejeter H_0 (conclure H_0)	Rejeter H_0 (conclure H_1)
H_0 vraie	OK	Erreur de type I
H_1 vraie	Erreur de type II	OK

Définitions

- **Risque de première espèce** : $\alpha = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 | H_0 \text{ vraie})$
  (probabilité de commettre une erreur de type I)
- **Risque de seconde espece** :
  $\beta = \mathbb{P}(\text{ne pas rejeter } H_0 | H_1 \text{ vraie})$
  (probabilité de commettre une erreur de type II)
- **Puissance** : $P = 1 - \beta = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 | H_1 \text{ vraie})$
  (probabilité de prendre la bonne décision en rejetant H_0)

Asymétrie

Hypothèse nulle et hypothèse alternative

- L'**hypothèse nulle** (notée H_0) est l'hypothèse privilégiée. C'est celle qui est supposée vraie par défaut (vérité établie) et qui sera conservée en cas de doutes (trop importants).
- L'**hypothèse alternative** (notée H_1) contredit l'hypothèse nulle. C'est l'hypothèse que l'on cherche à montrer.

Hypothèse simple/composite

Exemple d'hypothèses simples

- $H : \theta = \theta_0$

Exemple d'hypothèses composites

- $\theta < \theta_0$
- $\theta > \theta_0$
- $\theta \neq \theta_0$
- $\theta \in [a, b]$

Tests unilatéraux / bilatéraux

Test unilatéral (à droite)

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

Test bilatéral

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Statistique de test

Définition

Une **statistique de test** est une statistique (dont la loi est connue sous H_0) qui permet de mesurer l'écart à l'hypothèse nulle.

Règle de décision

Choix du niveau du test

- Le **niveau de signification** du test est le risque de première espèce α consenti.
- Le niveau de signification du test est souvent fixé à 0.05 ou 0.01, mais ce seuil est arbitraire est toute autre valeur peut être choisie.

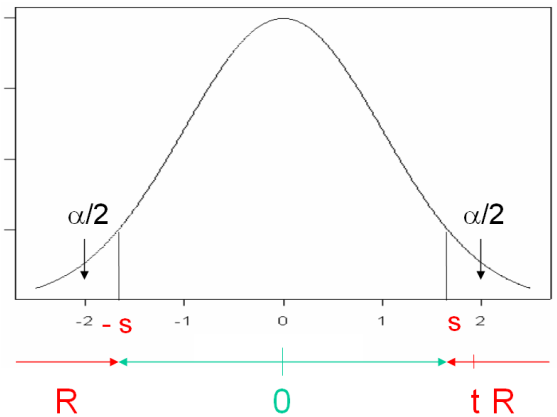
Région de rejet

Définition

La **Région de rejet** est l'ensemble R des valeurs (de la statistique de test) pour lesquelles l'hypothèse nulle est rejetée.

Démarche de Neyman Pearson

Maximiser la puissance tout en contrôlant α.



Risques d'erreurs

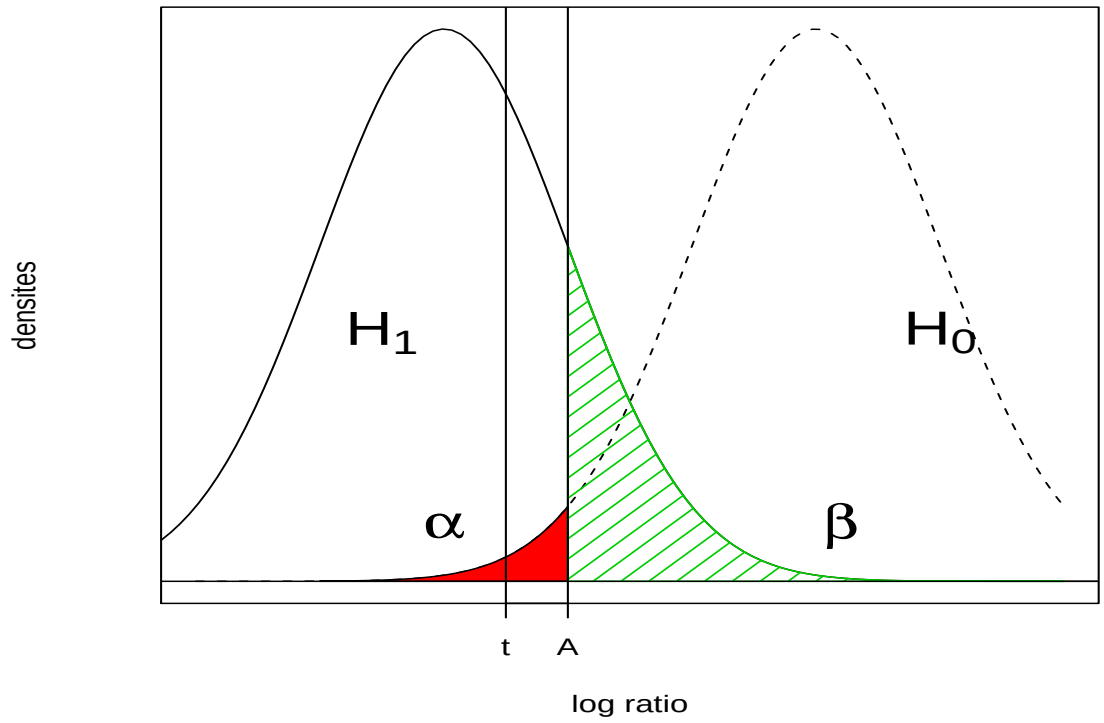
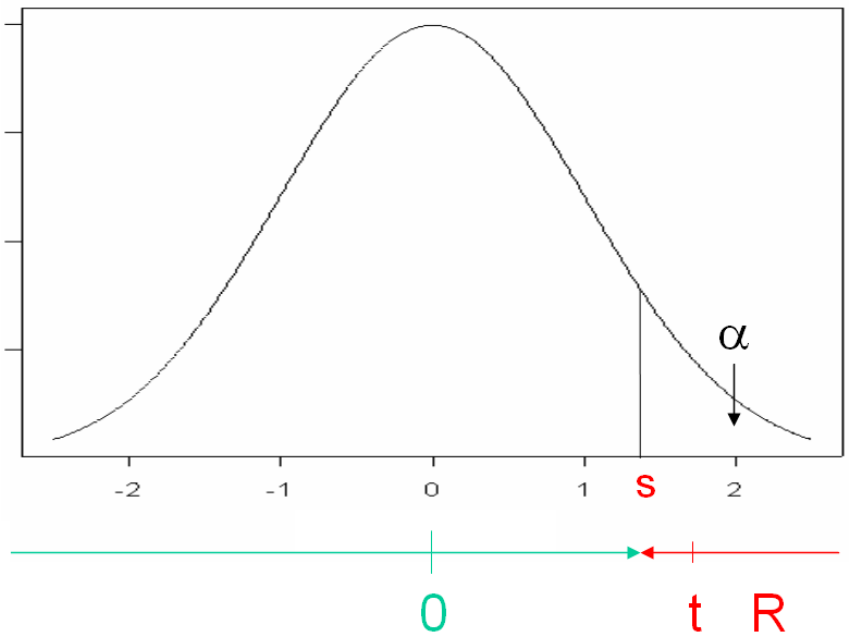


FIGURE – Erreur de type I et II et région critique de la forme $\Gamma =]-\infty, A]$

Tests unilatéraux / bilatéraux

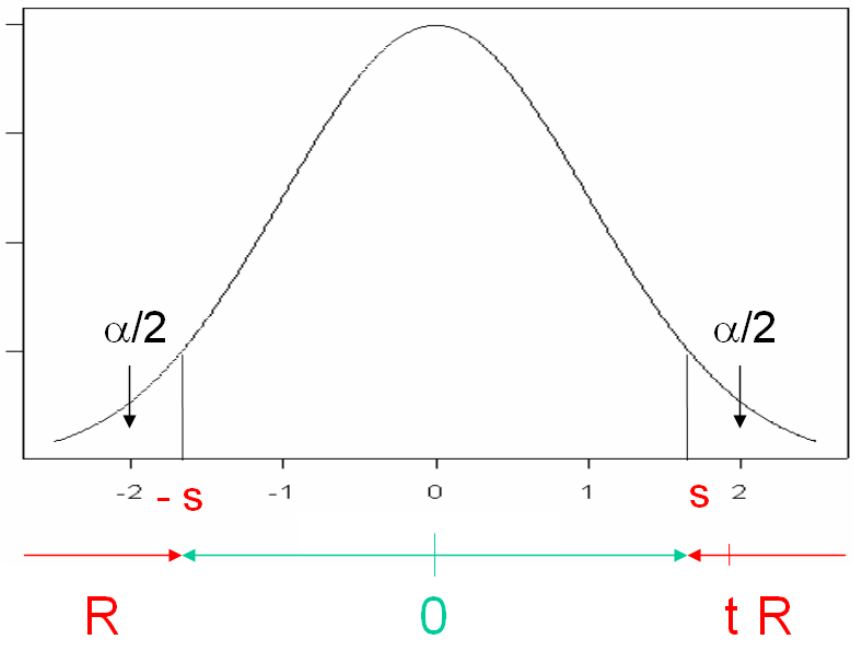
Test unilatéral (à droite)

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$



Test bilatéral

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$



Degré de signification (p-valeur)

Définition

Le **degré de signification** (ou **p-valeur**) est défini par :

$$p = min\{\alpha | T \in \Gamma_\alpha\}$$

Test unilatéral à droite	Test unilatéral à gauche	Test bilatéral
$p = \mathbb{P}(T > t \| H_0)$	$p = \mathbb{P}(T < t \| H_0)$	$p = \mathbb{P}(\|T\| > \|t\| \| H_0)$

Remarques

- La p-valeur est la probabilité d'obtenir une valeur de la statistique de test au moins aussi extrême que celle observée lorsque H_0 est vraie
- En pratique, on rejette H_0 lorsque $p < \alpha$

Degré de signification

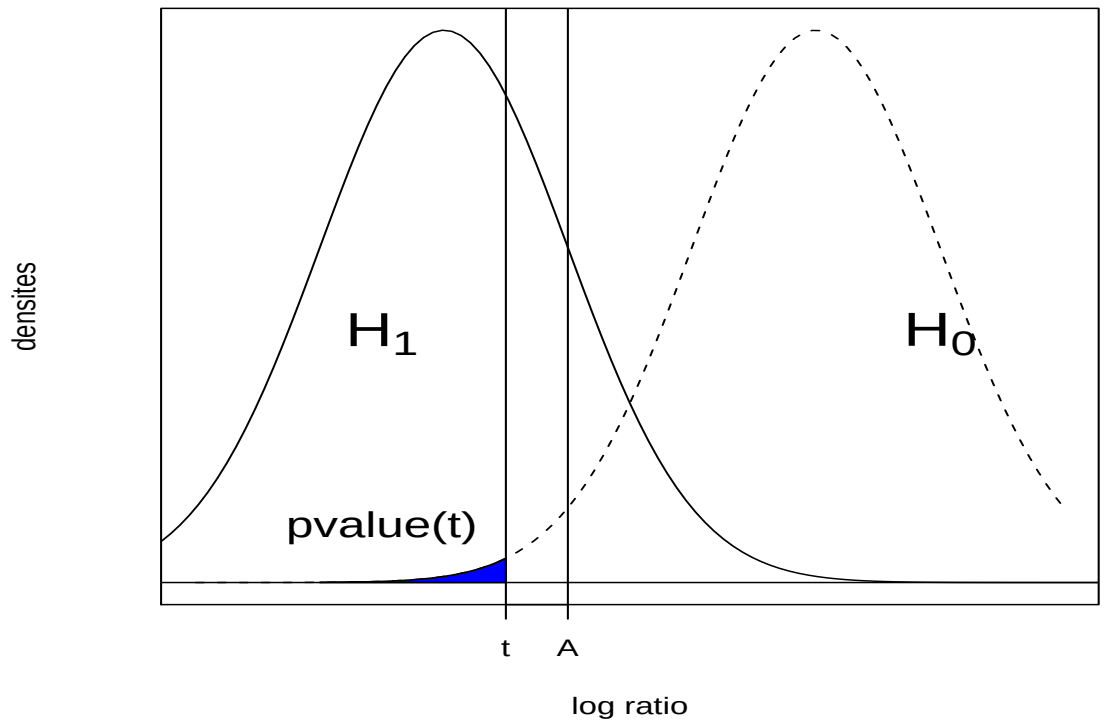


FIGURE – p-valeur associée à la réalisation t de la statistique de décision pour un test unilatéral à gauche.

Etude de la puissance

Remarque

- Le calcul de la puissance ne peut se faire que si l'on connaît la distribution de la statistique de test sous l'hypothèse alternative (H_1)
- L'étude de la puissance permet de déterminer, pour une alternative donnée, le nombre d'observations nécessaires pour conclure H_1 (avec une certaine puissance)
- L'étude de la puissance permet de déterminer, pour un nombre d'observations données, l'effet minimum pouvant être montré (avec une certaine puissance)

Test sur l'espérance d'un échantillon gaussien

Cas 1 : variance connue (test z)

- Présupposés : $X_1, ..., X_n$ iid avec $X_i \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, σ_0^2 connu.
- Hypothèse nulle : $H_0 : \mu = \mu_0$
- Statistique de test :

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \underset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

Test sur l'espérance d'un échantillon gaussien

Exemple

- On désire étudier la durée de vie d'une fleur F. On admet que la durée de vie de cette fleur est une variable aléatoire gaussienne dont l'espérance est de 77 jours dans des conditions normales. On suppose que l'écart-type est égal à 10 jours.
- Un spécialiste propose une alimentation qui - selon lui - augmente la durée de vie moyenne de cette fleur. Pour s'en assurer un laboratoire soumet 10 fleurs au régime proposé. A la fin de l'expérience, les durées de vie de ces 10 fleurs sont les suivantes (en jours) :
  94, 73, 85, 82, 84, 95, 71, 86, 82, 68.
- Proposer un test au niveau 5% permettant de déterminer si le régime proposé par le spécialiste a un effet significatif ou pas.

Test sur l'espérance d'un échantillon gaussien

Cas 2 : variance inconnue (test de Student ou test t)

- Présupposés : $X_1, ..., X_n$ iid avec $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 inconnu.
- Hypothèse nulle : $H_0 : \mu = \mu_0$
- Statistique de test :

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^{\star 2}}{n}}} \underset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

Fonction R

`t.test`

Test sur l'espérance d'un échantillon gaussien

Exemple

- On note X la température intérieure (en $°C$) d'une espèce de crabes du Pacifique, prise à une température ambiante de $24.3°C$. On suppose que X suit une loi normale $N(\mu; \sigma^2)$ dont on ne connaît pas les paramètres.
- On a mesuré cette température sur un échantillon de 21 crabes pris au hasard :

  24.6, 26.1, 25.1, 27.3, 24.0, 24.5, ...

  On donne $\sum_i x_i = 526.9$ et $\sum_i x_i^2 = 13255.53$.

  1. Mettre en place un test statistique de niveau $\alpha = 5\%$ pour déterminer si cette espèce de crabes possède sa propre température intérieure ou si cette dernière est la même que la température ambiante.
  2. On suppose qu'en réalité la température moyenne des crabes est $25°C$. Quelle est la puissance du test construit pour détecter une telle différence ?

Test sur l'espérance d'un échantillon de loi quelconque

Cas 1 : n grand

- Présupposés : $X_1, ..., X_n$ iid avec $X_i \sim \mathcal{L}$ inconnue.
- Hypothèse nulle : $H_0 : \mu = \mu_0$
- Statistique de test :
  - Si σ_0^2 connue

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_0^2}{n}}} \underset{H_0}{\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}} N(0,1) \text{ (TLC)}$$

  - Si σ_0^2 inconnue

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S^{\star 2}}{n}}} \underset{H_0}{\overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow}} N(0,1) \text{ (TLC)}$$

Fonction R

`t.test`

Test sur l'espérance d'un échantillon de loi quelconque

Exemple

- Le délai de survie, pour un certain type de cancer, peut être modélisé par une variable aléatoire de loi exponentielle. L'espérance de vie avec le traitement de référence est de 4 ans.
- Un nouveau traitement est testé dans le cadre d'un essai clinique sur $n = 60$ patients. On observe un délai de survie moyen de 4.7 ans.
- Peut-on conclure que le nouveau traitement est significativement meilleur que le traitement de référence ?

Test sur l'espérance d'un échantillon de loi quelconque

Cas 2 : n petit

Test du signe

$$Z_n = \sum 1_{(X_i - \mu_0) > 0} \underset{H_0}{\sim} B(n, p)$$

où $p = P(X_i > \mu_0)$

Test des signes et rangs de wilcoxon

$$W_n = \sum R_i 1_{(X_i - \mu_0) > 0} \underset{H_0}{\sim} \text{loi tabulée}$$

où $R_i =$ rang de$|X_i - \mu_0|$

Test sur un pourcentage - n grand

Cas 1 : n grand

- Présupposés : $X_1, ..., X_n$ iid avec $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, p inconnue.
- Hypothèse nulle : $H_0 : p = p_0$
- Statistique de test :

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \underset{H_0}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N(0,1) \text{ (TLC)}$$

Remarque

Tester un pourcentage revient à tester l'espérance d'une Bernoulli

Test sur un pourcentage - n grand

Exemple

Le pourcentage d'anomalies chromosomiques dans les naissances d'une population donnée, était de 1% il y a 10 ans. On effectue un dépistage systématique (obtention des caryotypes à partir de prélèvements de sang) sur 500 naissances tirées au sort dans la population actuelle. On observe 7 caryotypes anormaux.

1. Le pourcentage d'anomalies chromosomique est-il significativement différent d'il y a 10 ans.
2. On suppose que le pourcentage d'anomalies est en réalité passé de 1 à 1,2$\%$. Sur l'observation des 500 naissances, quelle probabilité a-t-on de détecter cette différence ?

Test sur un pourcentage - n petit

Cas 2 : n petit

- Présupposés : $X_1, ..., X_n$ iid avec $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, p inconnue.
- Hypothèse nulle : $H_0 : p = p_0$
- Statistique de test :

$$n\hat{p} = \sum X_i \underset{H_0}{\sim} B(n, p_0)$$

Fonction R

binom.test

Test sur un pourcentage - n petit

exemple

On croise des descendants directs du croisement [fleurs rouges $\times$ fleurs blanches]. Sous l'hypothèse que le gène 'rouge' est dominant, la probabilité p d'obtenir une plante à fleurs blanches est de $1/4$ alors que sous l'hypothèse que le gène 'blanc' est dominant, la probabilité p d'obtenir une plante à fleurs blanche est de $3/4$.
Sur $n = 23$ croisements (supposés indépendants), on a observé 8 plantes à fleurs blanches.

1. L'hypothèse admise jusqu'à présent est que le gène 'rouge' est dominant. Un généticien aimerait montrer qu'en réalité, c'est le gène 'blanc' qui est dominant. Tester cette hypothèse au niveau $\alpha = 5\%$.
2. Quelle est la puissance du test construit ?

Test sur l'espérance de deux échantillons indépendants

Indépendance des échantillons

Deux échantillons sont indépendants s'ils sont constitués indépendamment l'un de l'autre

Remarque

- Les sujets de l'échantillon 1 ne sont pas les mêmes que les sujets de l'échantillon 2
- Les effectifs des échantillons 1 et 2 ne sont pas nécessairement les mêmes

Comparaison des espérances de deux échantillons gaussiens

Test de Student

- Présupposés :
  $X_{11}, ..., X_{n_1}$ iid avec $X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
  $Y_1, ..., Y_{n_2}$ iid avec $Y_{2i} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ inconnu.
- Hypothèse nulle : $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
- Statistique de test :

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}) \frac{(n_1-1)S_1^{\star 2} + (n_2-1)S_2^{\star 2}}{n_1+n_2-2}}} \underset{H_0}{\sim} t_{n_1+n_2-2}$$

Fonction R

t.test

Comparaison des espérances de deux échantillons gaussiens

Exemple

On a prélevé une solution plusieurs fois en utilisant deux pipettes calibrées de même volume. On a pesé le contenu du volume délivré par la pipette. Les résultats des différents pipettages, qui sont supposés normalement distribués, sont exprimés en grammes.

Pipette 1	0.0987	0.0990	0.0996	0.0995	0.0998	0.0984
Pipette 2	0.1016	0.1008	0.1002	0.0995	0.0990	0.1023

On suppose que les variances sont les mêmes dans les deux groupes.

1. Les quantités moyennes prélevées par chacune des deux pipettes sont-elles identiques ? (comparer les espérances)

Comparaison des espérances de deux échantillons - n_1 et n_2 grands

- Présupposés :
  $X_1, ..., X_{n_1}$ iid avec $X_i \sim \mathcal{L}^1$
  $Y_1, ..., Y_{n_2}$ iid avec $Y_i \sim \mathcal{L}^2$
- Hypothèse nulle : $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
- Statistique de test :

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^{\star 2}}{n_1} + \frac{S_2^{\star 2}}{n_2}}} \underset{H_0}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} N(0,1) \text{ (TLC)}$$

Fonction R

t.test

Comparaison des espérances de deux échantillons - n_1 et n_2 grands

Exemple

Dans le but d'étudier l'influence éventuelle de la lumière sur la croissance du poisson Lebistes Reticulus, on a élevé deux lots de ce poisson dans des conditions d'éclairage différentes. Au $95^{ème}$ jour, on a mesuré (en mm) les longueurs x_i des poissons. On a obtenu les résultats suivants :

Lot 1 (180 individus) : éclairage à 400 lux

$$\sum x_i = 3780 \qquad \sum x_i^2 = 84884$$

Lot 2 (90 individus) : éclairage à 3 000 lux.

$$\sum y_i = 2043 \qquad \sum y_i^2 = 46586$$

Que peut-on conclure ?

Comparaison des espérances de deux échantillons, n_1 ou n_2 petits

Test de Wilcoxon (somme des rangs)

$$U_n = \frac{W_n - \frac{n_1(n_1+n_2+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}} \underset{H_0}{\sim} \text{loi tabulée}$$

où $W_i = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} R_i$

Test de Mann-Whitney

$$\frac{MW_n - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)}{12}}} \underset{H_0}{\sim} \text{loi tabulée}$$

où $MW_n = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} 1_{X_i > Y_j} = W_n - n_1(n_1+1)/2$

Fonction R

`wilcox.test`

Comparaison de deux pourcentages - n_1 et n_2 grands

- Présupposés :
  $X_1, ..., X_{n_1}$ iid avec $X_i \sim \mathcal{B}(p_1)$
  $Y_1, ..., Y_{n_2}$ iid avec $Y_i \sim \mathcal{B}(p_2)$
- Hypothèse nulle : $H_0 : p_1 = p_2 = p$
- Statistique de test :

$$\frac{\hat{p_1} - \hat{p_2}}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\hat{p}(1-\hat{p})}} \underset{H_0}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} N(0,1) \text{ (TLC)}$$

où

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p_1} + n_2\hat{p_2}}{n_1 + n_2}$$

Remarque

Ce test est équivalent au test du chi 2 (voir plus loin)

Fonctions R

Comparaison de deux pourcentages - n_1 et n_2 grands

Exemple

Dans un groupe de 200 malades, on a constitué par tirage au sort une série soumise à un nouveau traitement A et une série soumis e au traitement classique B. On a :

Traitement A : $n_A = 102$; 20 échecs soit $p_A = 19.6\%$
Traitement B : $n_B = 98$; 29 échecs soit $p_B = 29,6\%$

Au niveau $\alpha = 5\%$, les traitements A et B ont-ils un taux d'échecs significativement différent ?

Comparaison de deux pourcentages - n petit

Test exact de Fisher

- Présupposés :
  $X_1, ..., X_{n_1}$ iid avec $X_i \sim \mathcal{B}(p_1)$
  $Y_1, ..., Y_{n_2}$ iid avec $Y_i \sim \mathcal{B}(p_2)$
- Hypothèse nulle : $H_0 : p_1 = p_2 = p$
- Table de contingence :

	A	B	Total
I	a	b	l_1
II	c	d	l_2
Total	c_1	c_2	n

Comparaison de deux pourcentages - n petit

Test exact de Fisher

- Principe : On considère tous les tableaux possibles (de mêmes marges)
- Probabilité (sous H_0) d'observé l'un des tableaux possibles :

$$p_a = \frac{l_1!l_2!c_1!c_2!}{a!b!c!d!n!} \text{ (loi hypergéométrique)}$$

- Probabilité d'observer l'un des k tableaux au moins aussi extrèmes (p-value) :

$$p = \sum_{i=1}^{k} p_a$$

Fonction R

fisher.test

Comparaison de deux pourcentages - n petit

Exemple (efficacité de deux traitements A et B) :

	Traitement A	Traitement B	Total
Succès	4 (2.625)	1 (2..375)	5
Echecs	17 (18.375)	18 (16.625)	35
Total	21	19	40

- Tableaux possibles :

0	5	1	4	2	3	3	2	4	1
21	14	20	15	19	16	18	17	17	18

5	0
16	19

- Probabilités :

a	5	4	3	2	1
p_a	0.0309	0.1728	0.3456	0.3093	0.1237

- p-value :
  - Si $H_1 : p_1 > p_2$, $p = p_4 + p_5 = 0.2037$
  - Si $H_1 : p_1 \neq p_2$, $p = p_4 + p_5 + p_0 + p_1 = 0.3451$

Comparaison des espérances de deux échantillons appariés

Echantillons appariés

Deux échantillons sont appariés s'il existe une correspondance entre les observations du premier échantillon et les observations du second.

Exemple

Mesure avant traitement et après traitement (chez les mêmes sujets)

Comparaison des espérances de deux échantillons appariés

- Présupposés :
  $X_1, ..., X_n$ iid avec $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
  $Y_1, ..., Y_n$ iid avec $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
  Soit $D_i = X_i - Y_i$
- Hypothèse nulle : $H_0 : \mu_d = 0$
- Statistique de test
  - n petit

$$\frac{\overline{D} - \mu_d}{\sqrt{\frac{S_d^{\star 2}}{n}}} \underset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

  - n grand, loi quelconque

$$\frac{\overline{D} - \mu_d}{\sqrt{\frac{S_d^{\star 2}}{n}}} \underset{H_0}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} N(0,1)$$

Fonction R

Comparaison des espérances de deux échantillons appariés

Exemple

On veut comparer chez 10 malades la pression artérielle systolique moyenne après administration d'un nouveau médicament hypotenseur et après administration du traitement de référence. Le tableau suivant donne les résultats :

Malade	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Référence	17	15	15	13	12	17	15	16	19	11
Nouveau traitement	16	11	12	13	14	11	13	13	17	10

On suppose les observation normalement distribuées. Le nouveau médicament est-il efficace ?

Comparaison des variances de deux échantillons gaussiens

- Présupposés :
  $X_1, ..., X_{n_1}$ iid avec $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$
  $Y_1, ..., Y_{n_2}$ iid avec $Y_i \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- Hypothèse nulle : $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- Statistique de test :

$$\frac{S_1^{\star 2}}{S_2^{\star 2}} \underset{H_0}{\sim} \mathcal{F}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

Fonction R

var.test

Comparaison des variances de deux échantillons gaussiens

Exemple

On a prélevé une solution plusieurs fois en utilisant deux pipettes calibrées de même volume. On a pesé le contenu du volume délivré par la pipette. Les résultats des différents pipettages, qui sont supposés normalement distribués, sont exprimés en grammes.

Pipette 1	0.0987	0.0990	0.0996	0.0995	0.0998	0.0984
Pipette 2	0.1016	0.1008	0.1002	0.0995	0.0990	0.1023

On suppose que les variances sont les mêmes dans les deux groupes.

1. Les deux pipettes ont-elles la même précision de mesure ? (comparer les variances)

Rappels - Loi du χ^2

Définition

Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrée réduite.
La variable aléatoire $Y = X_1^2 + ... + X_n^2$ suit une loi continue appelée loi du χ^2 à n degrés de liberté :

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$$

.

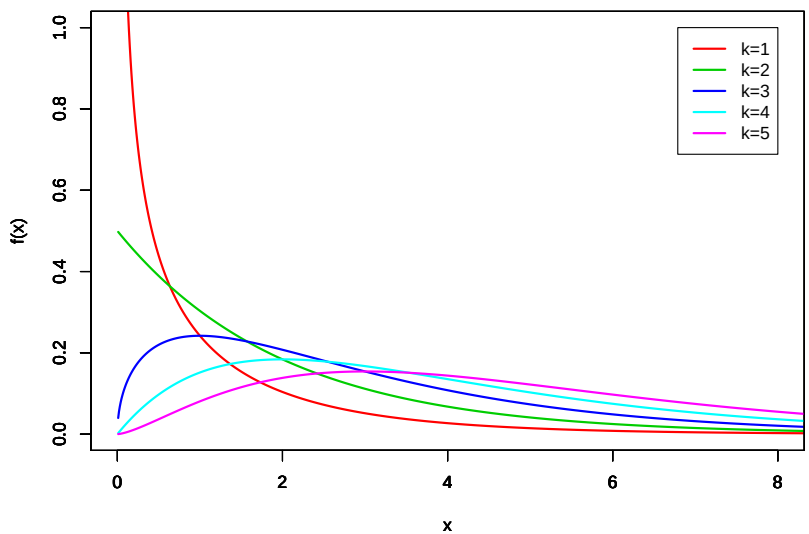
Propriétés

- Si $Y_1 \sim \chi_{n_1}^2$ et $Y_2 \sim \chi_{n_2}^2$ avec $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$, alors $Y = Y_1 + Y_2 \sim \chi_{n_1+n_2}^2$
- Si $Y \sim \chi_n^2$, alors $E(Y) = n$ et $Var(Y) = 2n$

Rappels - Loi du χ^2

Densité

$$f(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{(n-2)/2} e^{-x/2}$$



Test d'adéquation à une loi discrète

Exemple

Le tableau ci-dessous donne les résultats d'une des expériences de Mendel portant sur des pois : A est le phénotype 'graines sphériques', a le phénotype 'graines ridées' ; B le phénotype 'albumen jaune' et b est le phénotype 'albumen vert'.

AB	Ab	aB	ab
315	103	101	32

On se demande si la distribution observée est compatible avec la distribution théorique 9/16, 3/16, 3/16, 1/16.

Test d'adéquation à une loi discrète

- X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.
- Hypothèses testées :

$$\begin{cases} H_0 : & X \sim \mathcal{L}, \\ H_1 : & X \text{ ne suit pas la loi } \mathcal{L}. \end{cases}$$

- Statistique de test :

$$D_{k,n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \underset{H_0}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} \chi^2_{k-1} \qquad (1)$$

Test d'adéquation à une loi discrète

Remarques

L'approximation de la distribution de $D_{k,n}$ par $\chi^2_{(k-1)}$ n'est valable que si :

- n est grand
- $np_i \geq 5$ pour tout i (si $np_i < 5$, on regroupe des classes de valeur pour se ramener à un cas où $np_i \geq 5$)

Fonction R

chisq.test

Test d'adéquation à une famille de lois discrètes

Degrés de liberté

Lorsque la loi théorique (c'est-à-dire les p_i) dépend d'un ou plusieurs paramètres inconnu (par exemple $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mathcal{P}(\lambda)$), il est possible d'estimer ces paramètres à partir des mêmes données que celles utilisées pour le test d'adéquation. Dans ce cas, le nombre de degrés de liberté de $D_{k,n}$ est diminué d'autant que de paramètres estimés.

Test d'adéquation à une famille de lois discrètes

Exemple

On souhaite étudier la contamination du lait par des spores de clostridia. Pour cela on analyse des tubes de 1 ml de lait et, pour chaque tube, on compte le nombre X de spores présents. L'analyse est effectuée sur un échantillon de $n = 100$ tubes provenant du même lait.

Nombre de spores	0	1	2	3
Nombre de tubes	64	25	9	2

1. Donner une estimation du nombre moyen de spores par ml de lait.
2. Peut-on considérer au vu des observations que le nombre de spores contenu dans un ml de lait suit une loi de Poisson (répondre à l'aide d'un test de niveau 5%) ?

Test d'indépendance

Exemple

Le tableau ci-dessous indique le résultat de l'examen de 6800 sujets classés d'après la couleur de leurs yeux et celle de leurs cheveux :

$Yeux \backslash Cheveux$	Blonds	Bruns	Noirs	Roux	Total
Bleus	1768	807	189	47	2811
Gris ou verts	946	1387	746	53	3132
Bruns	115	438	288	16	857
Total	2829	2632	1223	116	6800

Existe-t-il une liaison entre ces deux caractères ? De manière équivalente, la répartition de la couleur des yeux est-elle la même quelle que soit la couleur des cheveux ou, réciproquement, la répartition de la couleur des cheveux est-elle la même quelle que soit la couleur des yeux ?

Test d'indépendance

- X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E = \{x_1, \ldots, x_k\}$ et $F = \{y_1, \ldots, y_\ell\}$
- Hypothèses testées :

$$\begin{cases} H_0 : & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes,} \\ H_1 : & X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.} \end{cases}$$

- Statistique de test :

$$D_{k,\ell,n} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\left(N_{ij} - \frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n} \right)^2}{\frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n}} \underset{H_0}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \chi^2_{(k-1)(\ell-1)} \qquad (2)$$

Test d'indépendance

Remarques

L'approximation de la distribution de $D_{k,\ell,n}$ par un $\chi^2_{(k-1)(\ell-1)}$ n'est valable que si :

- n est grand
- $\frac{N_{i\bullet}N_{\bullet j}}{n} \geq 5$ pour tout couple (i,j)

Fonction R

chisq.test

Test d'homogénéité

Exemple

On veut comparer les réactions produites par deux vaccins BCG désignés par A et B. Un groupe de 348 enfants a été divisé par tirage au sort en 2 séries qui ont été vaccinées, l'une par A, l'autre par B. Les résultats figurent dans le tableau suivant :

Vaccin	Réaction légère	Réaction moyenne	Ulcération	Abcès	Total
A	12	156	8	1	177
B	29	135	6	1	171
Total	41	291	14	2	348

Existe-t-il une différence entre les deux vaccins ou, de manière équivalente, la répartition des réactions est-elle la même pour les deux vaccins ?

Test d'homogénéité

Proposition

Un test d'homogénéité peut toujours s'écrire comme un test d'indépendance

Fonction R

chisq.test

Adéquation à une loi continue

- X est une variable aléatoire continue à valeurs dans $E \in \mathbb{R}$.
- Hypothèses testées :

$$\begin{cases} H_0 : & X \sim \mathcal{L}, \\ H_1 : & X \text{ ne suit pas la loi } \mathcal{L}. \end{cases}$$

- Statistique de test :

$$D_{KS}(\hat{F}_n, F_0) = sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F_0(x)| = ||\hat{F}_n - F_0||_\infty \underset{H_0}{\sim} \text{loi tabulée} \quad (3)$$

Fonction R

ks.test

Adéquation à une famille de lois continues

- X est une variable aléatoire continue à valeurs dans $E \in \mathbb{R}$.
- Hypothèses testées :

$$\begin{cases} H_0 : & X \sim \mathcal{L}_\theta, \\ H_1 : & X \text{ ne suit pas la loi } \mathcal{L}_\theta. \end{cases}$$

- Statistique de test :

$$D_{KS}(\hat{F}_n, F_{\hat{\theta}}) = sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F_{\hat{\theta}}(x)| = ||\hat{F}_n - F_{\hat{\theta}}||_\infty \underset{H_0}{\sim} \mathcal{Z}(\mathcal{L}_\theta) \tag{4}$$

Fonction R

ks.test

Test de comparaison

- X et Y sont deux variables aléatoires continues à valeurs dans $E \in \mathbb{R}$ telles que $X \sim \mathcal{F}$ et $Y \sim \mathcal{G}$.
- Hypothèses testées :

$$\begin{cases} H_0 : & \mathcal{F} = \mathcal{G} \\ H_1 : & \mathcal{F} \neq \mathcal{G} \end{cases}$$

- Statistique de test :

$$D_{KS} = sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_{n_X}(x) - \hat{G}_{n_Y}(x)| = ||\hat{F}_{n_X} - \hat{G}_{n_Y}||_\infty \underset{H_0}{\sim} \text{loi tabulée} \quad (5)$$

Fonction R

ks.test

Le modèle linéaire

Modèle

$$Y = X\theta + \epsilon$$

$$\text{où } \epsilon \sim N(0, \sigma^2 I_p)$$

Remarque

Le modèle linéaire est linéaire en ses paramètres (et non en X)

Les données

Exemple 1

Etude de la durée de survie de patients atteints d'un cancer du poumon en fonction de l'âge, du sexe et du statut tabagique

Exemple 2

Etude du rendement de champs de maïs en fonction du type d'engrais utilisé

Exemple 3

Etude de la tension arterielle en fonction de l'âge du patient

Le modèle linéaire

Objectifs

- Expliquer les variations de Y en fonction de X
- Prédire les valeurs de Y à partir des valeurs de X

Intérêt

- Simplicité des algorithmes d'estimation et des tests
- Utilisable dans la plupart des situations

Le modèle linéaire

Types de modèles linéaires

On distingue 3 cas :

- X qualitative (ANOVA)
- X quantitatif (REGRESSION)
- X des 2 types (ANCOVA)

Théorème de Cochran

Théorème

Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon de la variable aléatoire X où $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- μ est estimé sans biais par la moyenne $\overline{X}$; $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- σ^2 est estimé sans biais par la variance empirique corrigée : $S^{\star 2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$;
  $Q^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{n-1}$
- Q^2 et $\overline{X}$ sont indépendants.

Notations

$$X_{i+} = \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \qquad X_{i\bullet} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{n_i} X_{i+}$$

$$X_{+j} = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} \qquad X_{\bullet j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} = \frac{1}{n_j} X_{+j}$$

$$X_{++} = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \qquad X_{\bullet\bullet} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \frac{1}{n} X_{++}$$

Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Exemple

- On souhaite comparer trois traitements contre l'asthme : le traitement 2 est un nouveau traitement, que l'on souhaite mettre en compétition avec les traitements classiques 1 et 3.
- On répartit par tirage au sort les patients venant consulter dans un centre de soin et on leur affecte l'un des trois traitements. On mesure sur chaque patient la durée, en jours séparant de la prochaine crise d'asthme.

Traitement 1	Traitement 2	Traitement 3
26 ; 27 ; 35 ; 36 ; 38	29 ; 42 ; 44 ; 44 ; 45	26 ; 26 ; 30 ; 30 ; 33
38 ; 41 ; 42 ; 45 ; 50	48 ; 48 ; 52 ; 56 ; 56	36 ; 38 ; 38 ; 39 ; 46
65	58 ; 58 ; 60 ; 61 ; 63	47 ; 51 ; 51 ; 56 ; 75
	63 ; 69	

Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Problème des tests multiples

- Lors du test d'une seule hypothèse H_0 (au niveau α), le risque de commettre une erreur de type I est :

$$\mathbb{P}(P < \alpha | H_0) \leq \alpha$$

- Lors du test de n hypothèses $H_0^1; ...; H_0^n$ (au niveau α pour chacun des tests), le risque de commettre (au moins) une erreur de type I est :

$$\mathbb{P}(\bigcup \{P_i < \alpha | H_0^i\}) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(P_i < \alpha | H_0^i) = n\alpha$$

Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

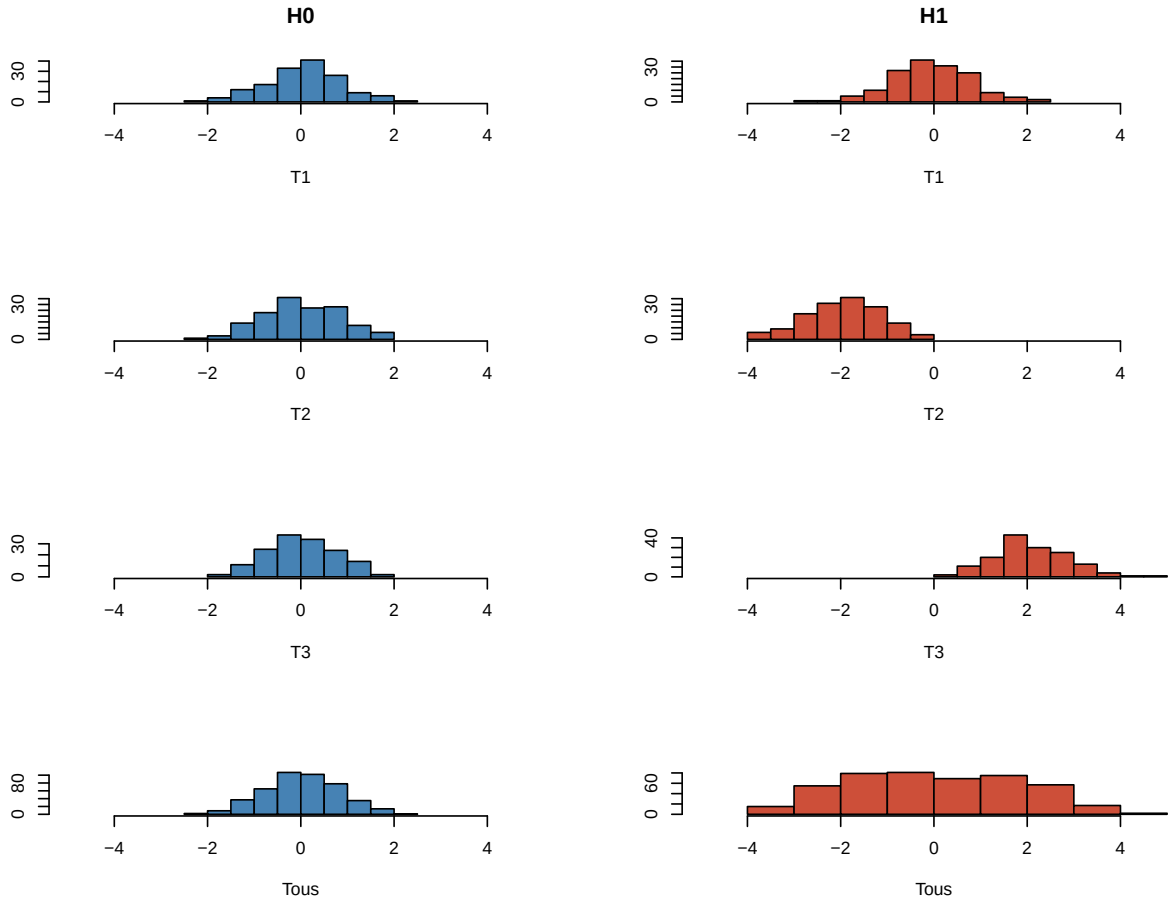
Test global

Pour comparer k espérances, au lieu de comparer toutes les espérances deux à deux (ce qui conduirait à un problème de tests multiples important), on effectue un test global des hypothèses nulle et alternative suivantes :

$$H_0 : \mu_1 = ... = \mu_k$$
$$H_1 : \exists (i,j) | \mu_i \neq \mu_j$$

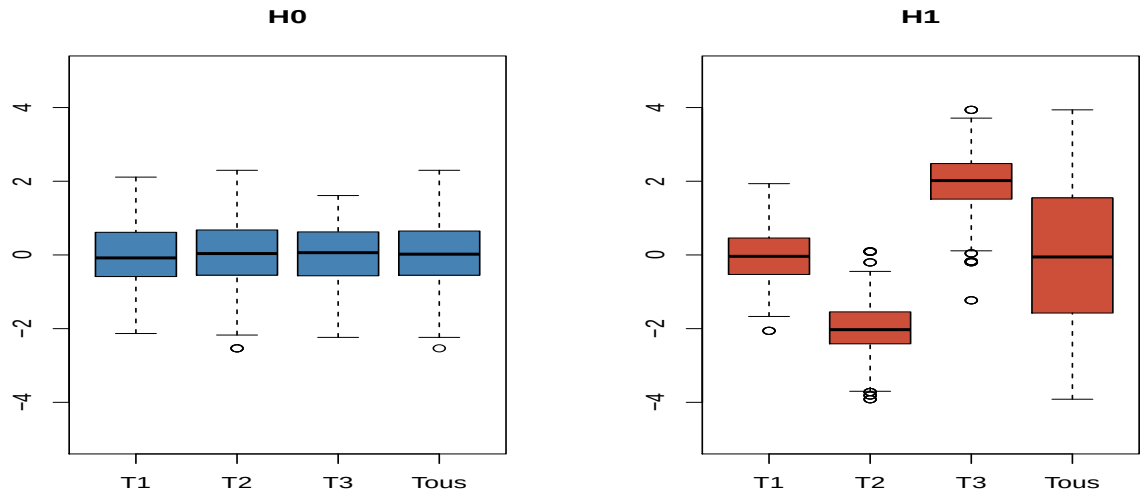
Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Idée générale



Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Idée générale



1. Trouver un estimateur de la variance σ^2 valable sous H_0 et sous H_1
2. Trouver un estimateur de la variance σ^2 valable uniquement sous H_0
3. Comparer les deux variances estimées

Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Modèle

- Observations : Y_{ij} $i = 1, ..., k$, $j = 1, ..., n_i$
- Modèle : Y_{ij} indépendantes avec

$$Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$$

Remarque

L'hypothèse d'homogénéité des variances ($\sigma_1^2 = ... = \sigma_k^2 = \sigma^2$) est appelée hypothèse d'**homoscédasticité**.

Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Autre formulation

- Observations : Y_{ij} $i = 1, ..., k$, $j = 1, ..., n_i$
- Modèle : Y_{ij} indépendantes avec

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \epsilon_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \alpha_i = 0$$

$$\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

Remarque

- La distribution des ϵ_{ij} ne dépend pas du groupe
- μ s'interprète comme l'effet 'global', α_i comme l'effet spécifique du groupe i et ϵ_{ij} comme le résidu (bruit gaussien)

Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Sommes des carrés

Résiduels : $SCR(i) = \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - Y_{i\bullet})^2$ avec $SCR(i) \sim \sigma^2 \chi^2_{n_i -$

$SCR = \sum_{i=1}^{k} SCR(i)$ avec $SCR \sim \sigma^2 \chi^2_{n-k}$

Totaux : $SCT = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - Y_{\bullet\bullet})^2$ avec $SCT \underset{H_0}{\sim} \sigma^2 \chi^2_{n-1}$

Factoriels : $SCF = \sum_{i=1}^{k} n_i (Y_{i\bullet} - Y_{\bullet\bullet})^2$ avec $SCF \underset{H_0}{\sim} \sigma^2 \chi^2_{k-1}$

Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Carrés moyens

Résiduel : $CMR = \frac{1}{n-k} SCR$ estimateur sans biais de σ^2

Total : $CMT = \frac{1}{n-1} SCT$ estimateur sans biais (sous H_0) de σ

Factoriel : $CMF = \frac{1}{k-1} SCF$ estimateur sans biais (sous H_0) de σ

Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Théorème fondamental (décomposition de la variance)

En utilisant les notations introduites précédemment, on a :

1. $$SCT = SCF + SCR$$

2. $$SCF \perp\!\!\!\perp SCR$$

Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Statistique de test

$$F = \frac{SCF/(k-1)}{SCR/(n-k)} = \frac{CMF}{CMR} \underset{H_0}{\sim} \mathcal{F}(k-1, n-k)$$

Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Présentation des résultats

Source	Degrés de liberté	Sommes des carrés	Carrés moyens	F
Facteur	$k-1$	SCF	$CMF = SCF/(k-1)$	CMF/CM
Résidus	$n-k$	SCR	$CMR = SCR/(n-k)$	
Total	$n-1$	SCT		

Comparaison des espérances de k échantillons ($k > 2$)

Exemple

Source	Degrés de liberté	Sommes des carrés	Carrés moyens	F
Facteur	2	1426.84	713.42	5.467
Résidus	40	5219.44	130.49	
Total	42	6646.28		

Fonctions R

```
anova(lm(Y as.factor(X)))
```

Test de Student : un cas particulier de l'ANOVA

Equivalence entre test de Student et ANOVA

- Test de Student :

$$\Gamma = \{T = \frac{|Y_{1\bullet} - Y_{2\bullet}|}{\sqrt{CMR(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} > q_{t_{n_1+n_2-2};1-\alpha/2}\}.$$

- ANOVA :

$$\Gamma = \{F = \frac{CMF}{CMR} > q_{\{\mathcal{F}_{1;n_1+n_2-2};1-\alpha\}}\}.$$

Remarque

$T^2 = F \Rightarrow$ Les deux régions de réjets précédentes sont identiques

Validité du modèle

Normalité

- Test de Stephens
- Test de Shapiro-Wilk

Homoscédasticité

- Test de Bartlett
- Test de Levene

Exemples

Exemple 1

On veut mesurer l'effet de trois traitements, U, V, W contre les arthralgies chroniques. On sélectionne 9 patients que l'on soumet successivement à chacun des traitements, en laissant une période jugée assez longue entre deux traitements pour que l'on puisse considérer qu'il n'y a pas d'effet résiduel d'un traitement sur le suivant. On mesure, selon une échelle adéquate, l'amélioration apportée dans l'arthralgie, que l'on reporte dans le tableau qui suit :

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
U	5.20	6.10	7.40	6.80	5.80	4.70	5.40	5.40	4.70
V	7.70	7.00	7.50	8.10	5.70	7.30	7.10	6.30	6.40
W	7.40	7.30	8.20	7.80	6.30	6.30	5.90	7.00	6.60

Exemples

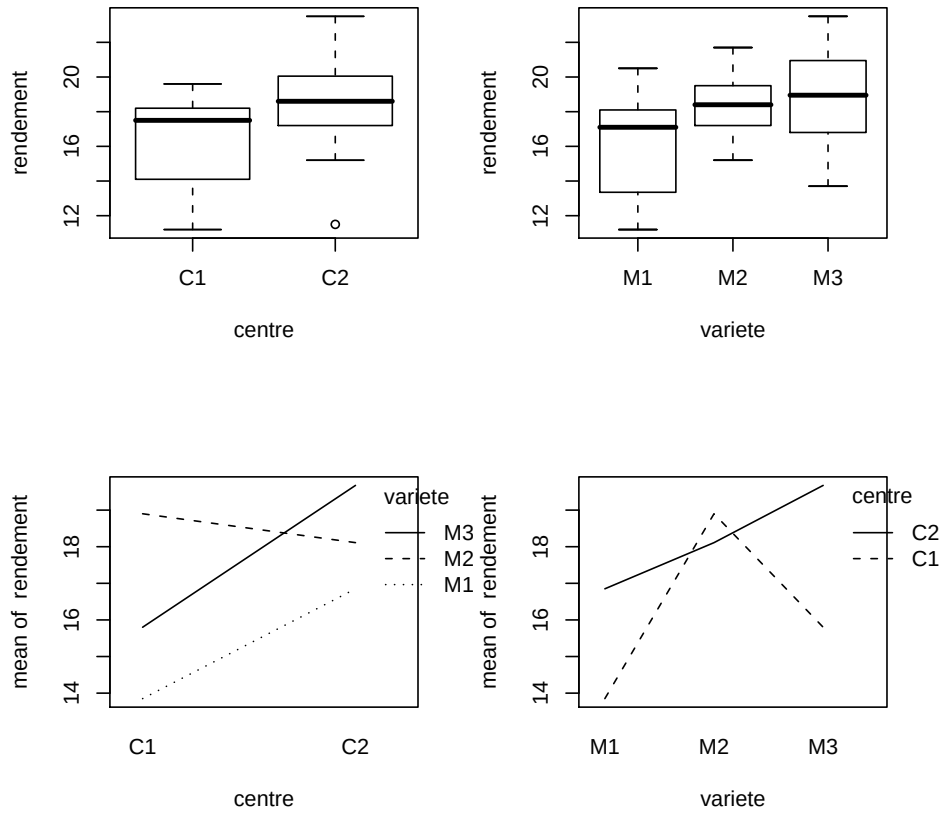
Exemple 2

On mesure le rendement de trois variétés de maïs M1, M2, et M3, dans deux centres expérimentaux, C1 et C2 de l'INRA. Le tableau suivant résume les données recueillies :

	Variété M1			Variété M2			Variété M3		
Centre C1	11.2	16.5	19.6	18.2	18.9	13.7	17.9	17.5	14.1
	20.5	18.1	17.3	21.7	15.2	23.5	23.3	19.3	19.6
Centre C2	17.7	18.1	19.4	18.6	16.5	17.3	15.5	21.3	19.4
	15.2	11.5	19.6	17.1	17.6	21.4	20.6	16.3	18.6

Représentations graphiques

Exemple 2



Cas général

Les données

	B_1	...	B_b	
A_1	n_{11}	...	n_{1b}	n_{1+}
...	...	...	...	...
A_a	n_{a1}	...	n_{ab}	n_{a+}
	n_{+1}	...	n_{+b}	n_{++}

Questions d'intérêt

- Y a-t-il un effet lié au facteur A ?
- Y a-t-il un effet lié au facteur B ?
- Y a-t-il une interaction entre les deux facteurs ?

Plans d'expériences

Définitions

- La **matrice d'incidence** indique le nombre d'observations dans chaque case du tableau de données
- Un plan d'expérience est dit **complet** (ou factoriel d'ordre 2) si l'on dispose d'au moins une mesure pour toutes les combinaisons possibles
- Un plan d'expérience est dit **avec répétitions** si on a au moins deux expériences par combinaison
- Un plan est dit **équilibré** si le nombre d'expériences pour chaque combinaison ij vérifie : $n_{ij} = \frac{n_{i+} n_{+j}}{n}$
- Un plan est dit **équirépété** si on fait le même nombre d'expriences pour chaque combinaison ij

Modèles à deux facteurs

Modèle général

Notons jk la combinaison des facteurs A et B aux niveaux j et k.

$$Y_{ijk} = \mu_{jk} + \epsilon_{ijk}$$

- μ_{jk} est l'espérance de la combinaison jk (effet fixe ou effet principal)
- ϵ_{ijk} représente un aléa individuel.

Hypothèses

Les ϵ_{ijk} sont supposés indépendants et gaussiens de même variance σ^2 et d'espérance nulle.

Modèles à deux facteurs

Modèle général reparamétré

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_k + \gamma_{jk} + \epsilon_{ijk}$$

- $\mu_{j\bullet} = \frac{1}{n_{j+}} \sum_k n_{jk}\mu_{jk}$ est l'effet moyen pour $A = j$,
- $\mu_{\bullet k} = \frac{1}{n_{k+}} \sum_j n_{jk}\mu_{jk}$ est l'effet moyen pour $B = k$,
- $\mu = \frac{1}{n} \sum_{jk} n_{jk}\mu_{jk}$ est l'effet moyen des deux facteurs,
- $\alpha_j = \mu_{j\bullet} - \mu$ représente l'effet du facteur A lorsqu'il est au niveau j,
- $\beta_k = \mu_{\bullet k} - \mu$ représente l'effet du facteur B lorqu'il est au niveau k,
- $\gamma_{jk} = \mu_{jk} - \alpha_j - \beta_k$ représente l'effet supplémentaire dû à l'interaction des niveaux j et k des facteurs A et B.

Modèles à deux facteurs

Exemple 2

Dans l'exemple des cultures INRA, nous testons le modèle suivant :

$$rendement = centre + variete + centre * variete$$

Modèles à deux facteurs

Modèle additif

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_k + \epsilon_{ijk}$$

Remarques

Ce modèle est utlisé lorsque l'interaction peut être négligée ou lorsque l'estimation de l'interaction ne permet pas les tests (une seule réptition par combinaison d'effet).

Modèles à deux facteurs

Exemple 1

Dans l'exemple de l'arthralgie, l'interaction entre les facteurs ne peut pas être estimée (car une seule répétition par combinaison de facteur). Le modèle choisi est donc un modèle simplifié :

$$amelioration = traitement + patient$$

Analyse de la variance

Théorème (décomposition de la variance)

$$SCT = SCR + SCA + SCB + SCAB - 2\sum_{jk} n_{jk}(Y_{j\bullet} - Y_{\bullet\bullet})(Y_{\bullet l} - Y_{\bullet\bullet})$$

Analyse de la variance

Proposition

Lorsque le plan d'expérience est orthogonal, la formule de décomposition de la variance s'écrit :

$$SCT = SCR + SCA + SCB + SCAB$$

Tabeau de synthèse

Modèle général

Source	Degrés de liberté	Sommes des carrés	Carrés moyens	F
Facteur A	a-1	SCA	$\frac{SCA}{a-1}$	$F_A = \frac{(n-ab)SCA}{(a-1)SCR}$
Facteur B	b-1	SCB	$\frac{SCB}{b-1}$	$F_B = \frac{(n-ab)SCB}{(b-1)SCR}$
Interaction	(a-1)(b-1)	SCAB	$\frac{SCAB}{(a-1)(b-1)}$	$F_{AB} = \frac{(n-ab)SCAB}{(a-1)(b-1)SCR}$
Résiduelle	n-ab	SCR	$\frac{SCR}{(n-ab)}$	
Total	n-1	SCT		

Tabeau de synthèse

Modèle additif

Source	Degrés de liberté	Sommes des carrés	Carrés moyens	F
Facteur A	a-1	SCA	$\frac{SCA}{a-1}$	$F_A = \frac{(n-a-b+1)SCA}{(a-1)SCR}$
Facteur B	b-1	SCB	$\frac{SCB}{b-1}$	$F_B = \frac{(n-a-b+1)SCB}{(b-1)SCR}$
Résiduelle	n-a-b+1	SCR	$\frac{SCR}{(n-a-b+1)}$	
Total	n-1	SCT		

Tableau de synthèse

Exemple 2

```
> anova(lm(rendement~centre*variete))

               Df  Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
centre          1  30.507  30.507  5.1350 0.03082 *
variete         2  38.000  19.000  3.1981 0.05508 .
centre:variete  2  29.440  14.720  2.4777 0.10095
Residuals      30 178.231   5.941
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 '
```

Tableau de synthèse

Exemple 1

```
> anova(lm(amelioration~ patient+traitement))

            Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
patient      8 11.3807  1.4226   4.710 0.0041026 **
traitement   2  9.5141  4.7570  15.750 0.0001657 ***
Residuals   16  4.8326  0.3020
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 '
```

Choix de modèle

Interaction significative

- Si l'interaction est significative, les deux facteurs sont pertinents pour expliquer la variance. Les deux doivent être conservés.
- Les test sur les effets principaux (A et B) sont utiles pour l'interprétation mais ne permettent pas de conclure qu'un effet est absent puisque chaque effet est présent dans l'interaction.

Interaction non significative

- Si l'interaction est non significative, il est possible de considérer un modèle additif. On préfère cependant garder l'estimation de la variance du modèle complet ($SCR/(n-ab)$).
- Le modèle additif n'est donc utilisé que lorsque les tests sur l'interaction ne sont pas calculables.

Régression linéaire simple

Exemples

- Tension artérielle = f(age)
- Rendement de blé = f(dose de fertilisant)
- Concentration ozone = f(température)
- Effet d'un traitement = f(dose)
- Taux de DDT = f(age du brochet)

Régression linéaire simple

Le modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i$$

Hypothèses :

- $E(\epsilon_i) = 0$
- $V(\epsilon_i) = \sigma^2$ (constante)
- $\epsilon_i \perp\!\!\!\perp \epsilon_j; \forall i \neq j$
- $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ (hypothèse nécessaire pour les tests)

Remarque

Le modèle est linéaire en ses paramètres (pas nécessairement en X)

Régression linéaire simple

Vocabulaire

- X est une variable, aléatoire ou contrôlée, dite **explicative**
- Y est une variable aléatoire dite **à expliquer**

Remarque

Si X n'est pas aléatoire, $cov(X, Y)$ peut être calculé mais n'a pas de sens

Régression linéaire simple

Questions d'intérêt

- Existe-t-il une relation entre X et Y ?
- Quelle est la forme de la relation ?
- Peut-on prédire Y à partir des valeurs de X ?

Démarche

- Estimation des paramètres du modèle (β_0,β_1, et σ^2)
- Tests (paramètres / validité du modèle)
- Réalisation de prédictions

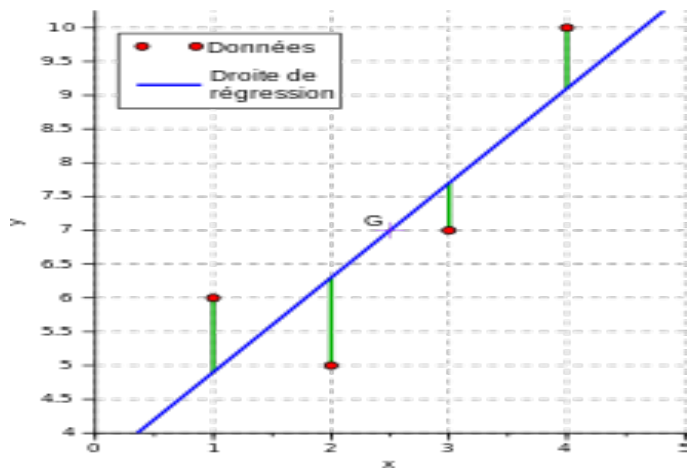
Estimation des paramètres

Estimateurs des moindres carrés

Les **estimateurs des moindres carrés ordinaires** (MCO) de β_0 et β_1 sont ceux qui minimisent la somme des carrés des résidus :

$$SCR = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_i))^2$$

Illustration graphique



Estimation des paramètres

Proposition

Les estimateurs des moindres carrés ordinaires ont pour expressions :

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

Remarques

- Si les résidus suivent une distribution normale, les estimateurs des moindres carrés sont les mêmes que les estimateurs du maximum de vraisemblance
- La droite des moindres carrés passe par le barycentre du nuage de points $(\overline{X}, \overline{Y})$

Estimation des paramètres

Propriétés

- $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ sont des estimateurs sans biais de β_0 et β_1
- Les variances des estimateurs sont :

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \right)$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

- Leur covariance est : $Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -\frac{\sigma^2 \overline{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$
- Si les résidus suivent une distribution normale, $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$ suivent aussi une distribution normale

Estimation des paramètres

Résidus estimés

Les résidus estimés sont :

$$\hat{\epsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

où $\hat{Y}_i$ est la valeur prédite par le modèle :

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

Propriété

$$\sum \hat{\epsilon}_i = 0$$

Remarque : Contrairement aux résidus ϵ_i, les résidus estimés $\hat{\epsilon}_i$ ne sont pas indépendants

Estimation de la variance résiduelle σ^2

Théorème

- La variance σ^2 est estimée sans biais par :

$$s^{*2} = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \hat{\epsilon}_i^2$$

- Sous l'hypothèse que les résidus sont normalement distribués :

$$(n-2)s^{*2} \sim \sigma^2 \chi^2_{n-2}$$

Tests sur les paramètres du modèle

On suppose : $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Hypothèses testées

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

Statistique de test

$$\frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\frac{s^{*2}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}} \underset{H_0}{\sim} t_{n-2}$$

Tests sur les paramètres du modèle

On suppose : $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Hypothèses testées

$$\begin{cases} H_0 : \beta_0 = 0 \\ H_1 : \beta_0 \neq 0 \end{cases}$$

Statistique de test

$$\frac{\hat{\beta}_0}{\sqrt{s^{*2}\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right)}} \underset{H_0}{\sim} t_{n-2}$$

Prédiction

Valeur prédite

Soit x_{n+1} une nouvelle observation. La valeur prédite par le modèle est : $Y_{n+1} = \beta_0 + \beta_1 X_{n+1} + \epsilon_{n+1}$. Cette valeur peut être approchée par :

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{n+1}$$

Remarque

Deux types d'erreurs entâchent cette prédiction :

- La non connaissance de ϵ_{n+1}
- L'incertitude sur l'estimation des paramètres β_0 et β_1

Analyse de la variance

Interprétation géométrique

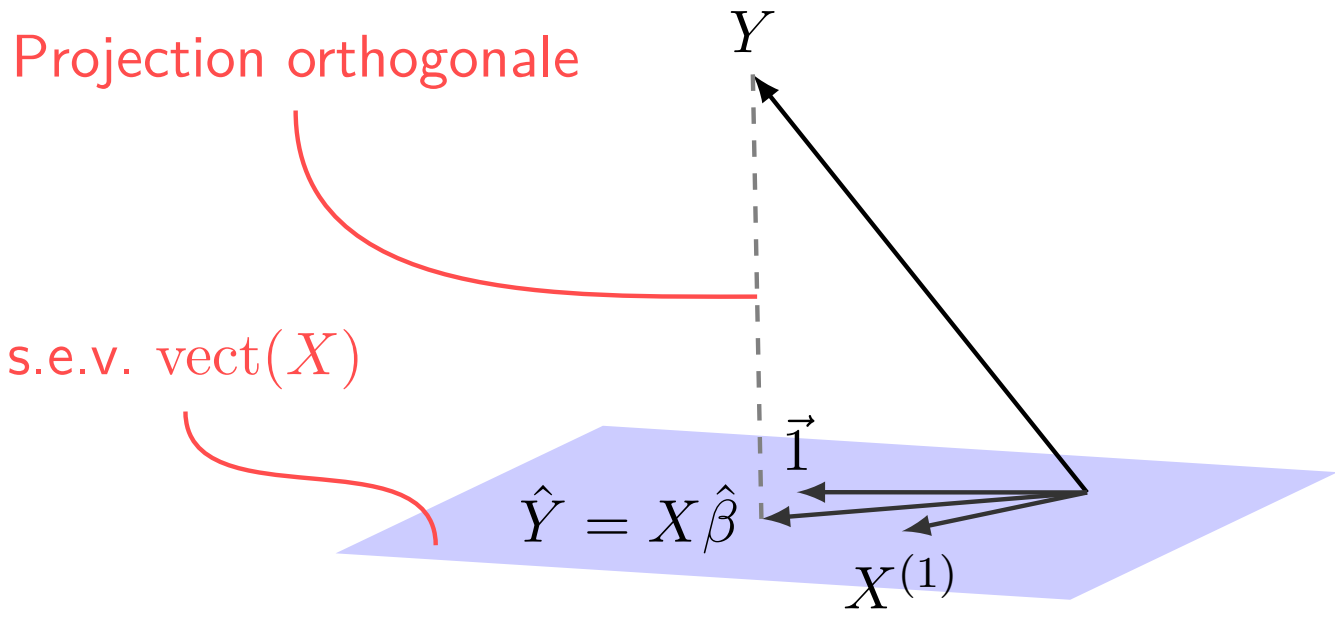


FIGURE – Dans $\mathbb{R}^3$

Analyse de la variance

Théorème fondamental (Pythagore)

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}_{SCT} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}_{SCR} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}_{SCM}$$

Sommes de carrés

- $SCR = (n-2)s^{*2} \sim \sigma^2 \chi^2_{n-2}$
- Sous l'hypothèse $\{H_0 : \beta_1 = 0\}$: $SCT \underset{H_0}{\sim} \sigma^2 \chi^2_{n-1}$
- Sous l'hypothèse $\{H_0 : \beta_1 = 0\}$: $SCM \underset{H_0}{\sim} \sigma^2 \chi^2_1$

Remarque

D'après le théorème de Cochran : $SCR \perp\!\!\!\perp SCM$

Analyse de la variance

Coefficient d'ajustement

Le coefficient d'ajustement est défini par :

$$R^2 = \frac{SCM}{SCT}$$

Remarque

Le coefficient d'ajustement peut être interprété comme le pourcentage de variance expliquée par le modèle

Analyse de la variance

Tableau de synthèse

Source	Degrés de liberté	Sommes des carrés	Carrés moyens	F
Modèle	1	SCM	SCM	F=$\frac{(n-2)SCM}{SCR}$
Résiduelle	n-2	SCR	$\frac{SCR}{(n-2)}$	
Total	n-1	SCT		

Test de linéarité

Dans le cas de mesures répétées (plusieurs valeurs de y pour chaque valeur de x), il est possible de tester l'hypothèse de linéarité.

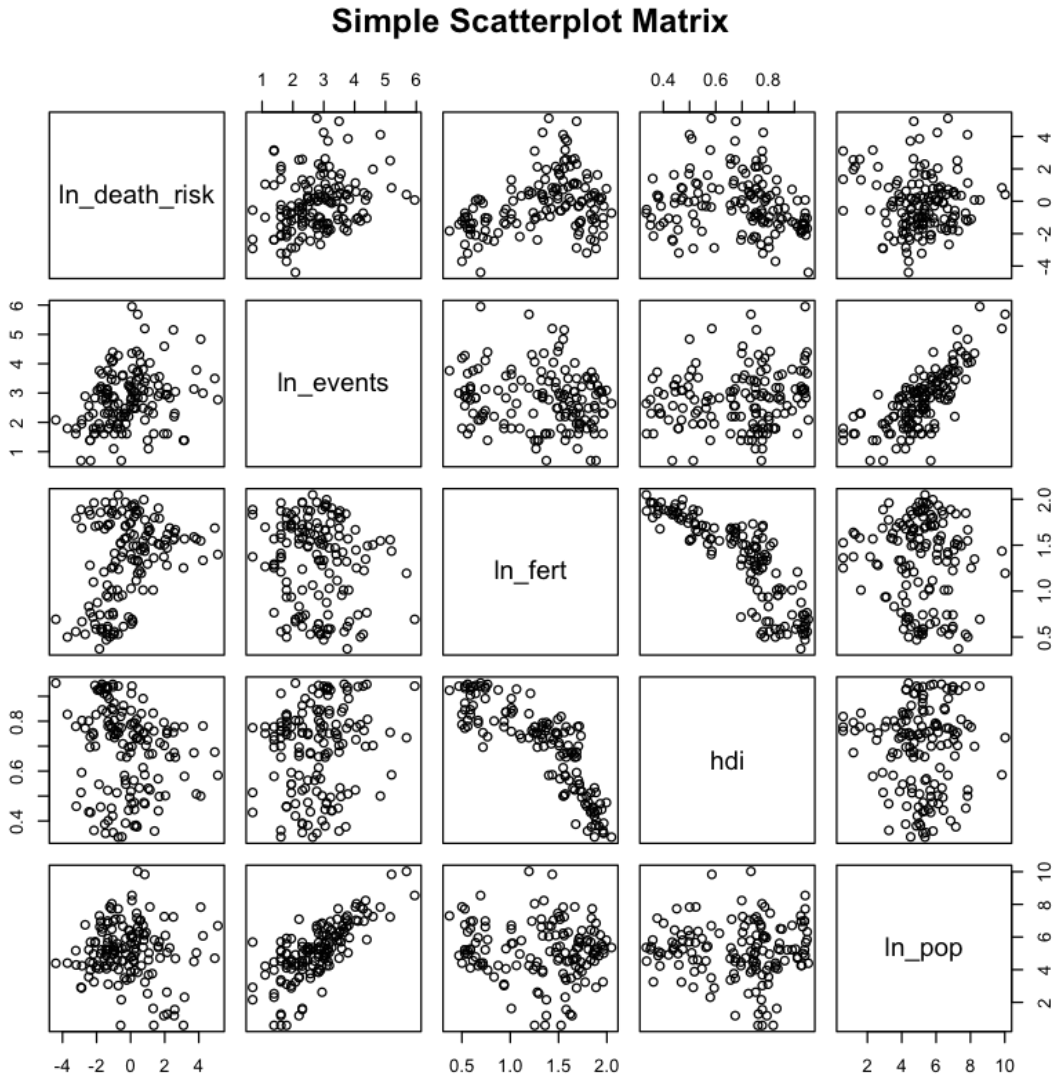
Validité du modèle

On doit vérifier les hypothèses du modèle, i.e.

- les hypothèses sur X (de plein rang)
- les hypothèses sur les erreurs
- la présence d'individus "influents"

Validité du modèle

Vérification de l'hypothèse de linéarité



Régression linéaire multiples

Exemples

- Concentration d'ozone=f(température,vent,nébulosité)
- Vitesse de circulation coronarienne=f(poids, taux de cholestérol)

Régression linéaire multiple

Le modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + ... + \beta_k X_{ki} + \epsilon_i$$

Hypothèses :

- $E(\epsilon_i) = 0$
- $V(\epsilon_i) = \sigma^2$ (constante)
- $\epsilon_i \perp\!\!\!\perp \epsilon_j; \forall i \neq j$
- $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ (hypothèse nécessaire pour les tests)

Régression linéaire multiple

Le modèle - écriture matricielle

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ . \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \dots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ . \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

Hypothèses :

- $E(\epsilon) = \mathbf{0}$
- $Var(\epsilon) = \sigma^2 \mathbf{I_n}$
- $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I_n})$ (pour les tests)

Estimation des paramètres

Estimateurs des moindres carrés

L'**estimateurs des moindres carrés ordinaires** (MCO) de β est le vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$ $\hat{\beta}$ qui minimise la somme des carrés des résidus :

$$SCR(\beta) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\beta\|^2$$

Théorème

Si la matrice $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ est inversible, l'estimateur des moindres carrés ordinaires de β est :

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Estimation des paramètres

Propriétés

- L'estimateur $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ est un estimateur sans biais de β
- La variance de $\hat{\beta}$ est : $V(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$
- σ^2 est estimé sans biais par :

$$\hat{\sigma}^2 = CMR = \frac{SCR(\beta)}{n-(k+1)} = \frac{\|\mathbf{Y}-\mathbf{X}\beta\|^2}{n-(k+1)}$$

avec

$$\hat{\sigma}^2 \sim \frac{\sigma^2}{n-(k+1)}\chi^2_{n-(k+1)}$$

Analyse de la variance

Notations

- Soit H_p un modèle à p paramètres. $SCR(H_p)$ est la somme des carrés résiduels associée.
- Soit H_q un modèle à q paramètres emboîté dans H_p (donc $q < p$). $SCR(H_q)$ est la somme des carrés résiduels associée.
- Soit $SCE = SCR(H_q) - SCR(H_p)$ la partie de la SCR expliquée par le passage du petit modèle H_q au grand modèle H_p.
- Soit n le nombre total de mesures.

Comparaison de modèles emboîtés

Théorème

Si les résidus ϵ_i sont indépendants de loi $N(0, \sigma^2)$, alors sous H_q :

- $SCR(H_q) \sim \sigma^2 \chi^2_{n-q}$
- $SCR(H_p) \sim \sigma^2 \chi^2_{n-p}$
- $SCE \sim \sigma^2 \chi^2_{p-q}$
- $SCE \perp\!\!\!\perp SCR(H_p)$

Comparaison de modèles emboîtés

Tableau de synthèse

Source	Degrés de liberté	Sommes des carrés	Carrés moyens	F
Gain Hp/H_q	$p-q$	SCE	$CME = \frac{SCE}{p-q}$	F=$\frac{CME}{CMR}$
H_p	$n-p$	$SCR(H_p)$	$CMR = \frac{SCR(H_p)}{(n-p)}$	
H_q	$n-q$	$SCR(H_q)$		

Vue d'ensemble

Le modèle - écriture matricielle

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$$

ANOVA

$\mathbf{X}$ qualitative :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1_{A_1}(1) & \dots & 1_{A_k}(1) \\ 1 & 1_{A_1}(2) & \dots & 1_{A_k}(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1_{A_1}(n) & \dots & 1_{A_k}(n) \end{pmatrix}$$

Régression

$\mathbf{X}$ quantitative :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \dots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

Modèle linéaire généralisé

Le modèle

$$g(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}\beta + \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(g(Y)) = \mathbf{X}\beta$$

Estimation des paramètres

$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ est estimé par la méthode du maximum de vraisemblance.

Modèle linéaire généralisé

Régression logistique

- Modèle : On suppose : $Y_i \sim \mathcal{B}(\pi)$
- Fonction lien : $g(\pi) = logit(\pi) = log(\frac{\pi}{1-\pi})$
- Modèle :

$$logit(\pi) = \mathbf{X}\beta$$

- Interprétation des coefficients (odds ratios) :

$$logit(\mathbb{P}(Y = 1|X_j = 1)) - logit(\mathbb{P}(Y = 1|X_j = 0)) = \beta_i$$

$$\Leftrightarrow e_i^{\beta} = OddsRatio = \frac{\frac{\mathbb{P}(Y=1|X_j=1)}{\mathbb{P}(Y=0|X_j=1)}}{\frac{\mathbb{P}(Y=1|X_j=0)}{\mathbb{P}(Y=0|X_j=0)}}$$