Équations de Navier–Stokes (M2-AMS 2020-2021).

Examen de février 2021.

1 Unicité des solutions Mild de Fujita-Kato (5 pt.)

Soit $\vec{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale et soit $\vec{f} \in L^2([0,T[, L^2(\mathbb{R}^3))$ une force extérieure. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux solutions *mild* sur l'ensemble $[0,T[\times\mathbb{R}^3$ de l'équation de Navier-Stokes issues de la même condition initiale $\vec{u}_0$ et qui appartiennent à l'espace $\mathcal{C}([0,T[, H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T[, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$.

L'objectif de cet exercice est de montrer, qu'indépendamment du processus de construction de ces solutions, dans ce cadre de travail il y a unicité des solutions.

1. On note $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, vérifier que l'on a bien $\vec{w}(0,x) = 0$.
2. Montrer l'identité : $\vec{w} = -B(\vec{w}, \vec{v}) - B(\vec{u}, \vec{w})$, où $B(\cdot,\cdot)$ est l'application bilinéaire définie par
$$B(\vec{u}, \vec{v}) = \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}\big(div(\vec{u} \otimes \vec{v})\big)(s,x)ds$$
3. Soit $T^* \in [0,T[$ le temps maximal tel que l'on ait $\vec{w} = 0$ sur l'ensemble $[0,T^*[\times\mathbb{R}^3$. Démontrer que si l'on a $T^* < T$ et si $T^* < T_0 < T$ alors on a la majoration
$$\begin{aligned}\|\vec{w}\otimes\vec{v} + \vec{u}\otimes\vec{w}\|_{L^\infty([0,T_0[,H^1(\mathbb{R}^3))} \quad &\leq \quad C(T_0 - T^*)^{1/4}\|\vec{w}\|_{L^\infty([0,T_0[,H^1(\mathbb{R}^3))} \\ &\quad\quad \times(\|\vec{u}\|_{L^\infty([0,T_0[,H^1(\mathbb{R}^3))} + \|\vec{v}\|_{L^\infty([0,T_0[,H^1(\mathbb{R}^3))}).\end{aligned}$$
4. A partir de l'estimation précédente obtenir le contrôle
$$\begin{aligned}\|\vec{w}\|_{L^\infty([0,T_0[,H^1(\mathbb{R}^3))} \quad &\leq \quad C(T_0 - T^*)^{1/4}(1 + T_0^{1/2})(\|\vec{u}\|_{L^\infty([0,T_0[,H^1(\mathbb{R}^3))} + \|\vec{v}\|_{L^\infty([0,T_0[,H^1(\mathbb{R}^3))}) \\ &\quad\quad \times\|\vec{w}\|_{L^\infty([0,T_0[,H^1(\mathbb{R}^3))}.\end{aligned}$$
5. Vérifier que si la quantité $T_0 - T^*$ est suffisamment petite, alors on a $\|\vec{w}\|_{L^\infty([0,T_0[,H^1(\mathbb{R}^3))} = 0$, en déduire que l'on a $\vec{w} = 0$ sur l'ensemble $[0,T_0[\times\mathbb{R}^3$. Obtenir une contradiction afin de conclure que l'on a bien $\vec{u} = \vec{v}$ sur tout l'ensemble $[0,T[\times\mathbb{R}^3$.

2 Solutions Mild pour une équation fractionnaire (6 pt.)

Pour $u : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle, on considère l'équation
$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(t,x) + \Big((-\Delta)^{\frac{1}{2}}u(t,x)\Big)^2 * f(t,x), \qquad (1 < \alpha \leq 2) \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$
où $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^\infty([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^n))$ et où l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ avec $1 \leq \alpha \leq 2$ est la puissance fractionnaire du Laplacien ($\widehat{(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi}(\xi) = |\xi|^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)$). Le semi-groupe associé à l'opérateur $-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ sera noté

$e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}$ avec $t>0$ et son action est donnée au niveau de Fourier par $\left(e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\varphi\right)^{\widehat{}}(\xi) = e^{-t|\xi|^{\alpha}}\widehat{\varphi}(\xi)$. On a la formule $e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}(\varphi) = \mathfrak{p}_t^{\alpha} * \varphi$ et pour le noyau $\mathfrak{p}_t^{\alpha}$ on admettra les points suivants :

- pour tout $t>0$ on a $\|\mathfrak{p}_t^{\alpha}\|_{L^1} = 1$,
- pour tout $t>0$ et $s>0$ on a $\|(Id-\Delta)^{\frac{s}{2}}\mathfrak{p}_t^{\alpha}\|_{L^1} \leq C\max\{1, t^{-\frac{s}{\alpha}}\}$ où $C>0$ est une constante qui ne dépend que de la dimension.

On considère la formulation intégrale suivante

$$u(t,x) = e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}u_0(x) + \int_0^t e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}\left((-\Delta)^{\frac{1}{2}}u\right)^2 * f(s,x)\,ds, \qquad (1<\alpha\leq 2).$$

1. Montrer que l'on a l'estimation $\left\|e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}u_0\right\|_{L^\infty_t H^1_x} \leq \|u_0\|_{H^1}$.
2. Vérifier l'inégalité
$$\|B_f(u,u)\|_{L^\infty_t H^1_x} \leq C\sup_{0<t\leq T_0}\int_0^t \max\{1,(t-s)^{-\frac{1}{\alpha}}\}\left\|\left((-\Delta)^{\frac{1}{2}}u\right)^2(s,\cdot)\right\|_{L^1}\|f(s,\cdot)\|_{L^2}\,ds$$
3. Conclure que l'équation (1) admet une unique solution *mild* dans l'espace $L^\infty_t([0,T_0[, H^1_x(\mathbb{R}^n))$ où l'on donnera une borne supérieure pour le temps d'existence T_0 en fonction des données du problème.

3 Solutions faibles pour l'équation quasi-géostrophique linéaire (11 pt.)

On considère sur $\mathbb{R}^n$ l'équation suivante

$$\begin{cases}\partial_t\theta(t,x) = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(t,x) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\theta)(t,x)\\ \theta(0,x) = \theta_0(x),\end{cases} \tag{2}$$

où $\theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ est une donnée initiale et $\vec{v} : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteur à divergence nulle ($div(\vec{v}) = 0$) tel que $\vec{v} \in L^\infty_t L^\infty_x$.

1. Pour $\epsilon>0$ on pose
$$\partial_t\theta(t,x) = \epsilon\Delta\theta(t,x) - (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(t,x) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\theta)(t,x),$$
et on considère sa formulation intégrale :
$$\theta(t,x) = \mathfrak{g}_{\epsilon t} * \theta_0(x) - \int_0^t \mathfrak{g}_{\epsilon(t-s)} * (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(s,x)ds + \int_0^t \mathfrak{g}_{\epsilon(t-s)} * \vec{\nabla}\cdot(v\theta)(s,x)ds. \tag{3}$$
Vérifier que pour $0<t<T$ on a les estimations
   - $\|\mathfrak{g}_{\epsilon t} * \theta_0\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq \|\theta_0\|_{L^2}$ et $\|\mathfrak{g}_{\epsilon t} * \theta_0\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\theta_0\|_{L^2}$.
   - $\left\|\int_0^t \mathfrak{g}_{\epsilon(t-s)} * (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(s,\cdot)ds\right\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq C\sqrt{\frac{T}{\epsilon}}\|\theta\|_{L^\infty_t L^2_x}$ et
   $\left\|\int_0^t \mathfrak{g}_{\epsilon(t-s)} * (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(s,\cdot)ds\right\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C\sqrt{\frac{T}{\epsilon}}\|\theta\|_{L^2_t \dot{H}^1_x}$.

- $\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{\epsilon(t-s)} * \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\theta)(s,\cdot) ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq C\sqrt{\dfrac{T}{\epsilon}} \|\theta\|_{L^\infty_t L^2_x} \|\vec{v}\|_{L^\infty_t L^\infty_x}$ et
  $\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{\epsilon(t-s)} * \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\theta)(s,\cdot) ds \right\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C\sqrt{\dfrac{T}{\epsilon}} \|\theta\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \|\vec{v}\|_{L^\infty_t L^\infty_x}$.

  en déduire que pour $\epsilon > 0$, l'équation (3) admet une solution mild, notée θ_ϵ, dans l'espace $L^\infty([0,T[, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$.

2. Vérifier que pour $\theta_\epsilon \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ on a l'égalité

$$\frac{d}{dt}\|\theta_\epsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2} = -2\epsilon\|\vec{\nabla}\theta_\epsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2} - 2\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\theta_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2} + 2\int_{\mathbb{R}^n} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}\theta_\epsilon)\theta_\epsilon(s,x)dx.$$

   et en utilisant la propriété de divergence nulle de $\vec{v}$ obtenir le contrôle

$$\|\theta_\epsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2} + 2\epsilon\int_0^t \|\theta_\epsilon(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1} ds \leq \|\theta_0\|_{L^2}.$$

3. Montrer qu'avec cette estimation et pour $\epsilon > 0$ fixé on obtient des solutions mild θ_ϵ, dans l'espace $L^\infty([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$ pour le problème (3).
4. Faire tendre $\epsilon \to 0$ pour obtenir une solution *faible* θ du problème (2) qui appartient à l'espace $L^\infty([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^n))$ et montrer qu'elle vérifie le principe du maximum suivant

$$\|\theta(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|\theta_0\|_{L^2}.$$

5. Peut-on obtenir une solution faible dans l'espace $L^\infty([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,+\infty[, \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n))$?