Équations de Navier–Stokes (M2-AMS 2021-2022).

Examen de février 2022.

1 Théorème de Kato (8 pt.)

On considère ici $\vec{u}_0$ une donnée initiale à divergence nulle telle que l'on ait $\vec{u}_0 \in L^p(\mathbb{R}^3)$ où $p = \frac{3}{\epsilon}$ avec $0 < \epsilon < 1$ un paramètre fixé une fois pour toutes.

1. Vérifier l'inégalité $\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L^\infty_t L^p_x} \leq \|\vec{u}_0\|_{L^p}$.
2. Démontrer l'estimation
$$\|(-\Delta)^{-\frac{\epsilon}{2}}\vec{f}\|_{L^p} \leq C\|\vec{f}\|_{L^q},$$
où $\epsilon + \frac{3}{p} = \frac{3}{q}$. On remarquera en particulier que l'on a $2q = p$.
3. On étudie le problème suivant
$$\vec{u}(t,x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u}\otimes\vec{u}))ds.$$
Avec les estimations précédentes, appliquer un argument de point fixe pour obtenir une solution mild des équations de Navier-Stokes dans l'espace $L^\infty([0,T[, L^p(\mathbb{R}^3))$ pour un certain temps $T > 0$: pour cela on démontrera que l'on a l'estimation
$$\left\|\int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u}\otimes\vec{u})ds\right\|_{L^\infty_t L^p_x} \leq CT^{\frac{1-\epsilon}{2}}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^p_x}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^p_x}.$$
On pourra considérer par exemple l'expression
$$\left\|\int_0^t (-\Delta)^{\frac{1+\epsilon}{2}}\mathfrak{g}_{t-s} * (-\Delta)^{-\frac{\epsilon}{2}}\mathbb{P}(\vec{u}\otimes\vec{u})ds\right\|_{L^p},$$
et on pourra utiliser l'estimation $\|(-\Delta)^{\frac{1+\epsilon}{2}}\mathfrak{g}_{t-s}\|_{L^1} \leq C(t-s)^{-\frac{1+\epsilon}{2}}$, puis on utilisera les inégalités de Minkowski, de Young et les points précédents (on notera que l'on a $\frac{1+\epsilon}{2} < 1$, ce qui rend la singularité en temps produite par le noyau de la chaleur intégrable).

2 Solutions faibles pour l'équation quasi-géostrophique (12 pt.)

Pour une fonction $\theta : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ on considère l'équation suivante
$$\begin{cases} \partial_t\theta(t,x) = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(t,x) + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\theta)(t,x) \\ \theta(0,x) = \theta_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1}$$
où $\theta_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une donnée initiale telle que $\theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et où $\vec{v} : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un champ de vecteur défini par :
$$\vec{v}(t,x) = \vec{v}_\theta(t,x) = \begin{bmatrix} -R_2(\theta(t,x)) \\ R_1(\theta(t,x)) \end{bmatrix},$$

où R_1, R_2 sont les transformées de Riesz définies au niveau de Fourier par $\widehat{R_j(\varphi)}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{\varphi}(\xi)$ pour $1 \leq j \leq 2$.

1. Montrer que l'on a $\|\vec{v}(t,\cdot)\|_{L^2} \leq C\|\theta(t,\cdot)\|_{L^2}$.
2. Vérifier que l'on a $div(\vec{v}) = 0$.
3. Pour $\epsilon > 0$ on considère $\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^2}\varphi(x/\epsilon)$ avec φ une fonction régulière positive, à support dans la boule $B(0,1)$. Montrer que $div(\varphi_\epsilon * \vec{v}) = 0$.
4. Pour $\epsilon > 0$ on pose

$$\partial_t\theta(t,x) = \epsilon\Delta\theta(t,x) - (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(t,x) + \vec{\nabla}\cdot\big([\varphi_\epsilon * \vec{v}]\theta\big)(t,x). \tag{2}$$

   Ecrire la formulation intégrale associée au problème (2).

5. Vérifier que pour $0 < t < T$ on a les estimations

   - $\|\mathfrak{g}_{\epsilon t} * \theta_0\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq \|\theta_0\|_{L^2}$ et $\|\mathfrak{g}_{\epsilon t} * \theta_0\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\|\theta_0\|_{L^2}$.
   - $\left\|\int_0^t \mathfrak{g}_{\epsilon(t-s)} * (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(s,\cdot)ds\right\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq C\sqrt{\frac{T}{\epsilon}}\|\theta\|_{L^\infty_t L^2_x}$ et
   $\left\|\int_0^t \mathfrak{g}_{\epsilon(t-s)} * (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta(s,\cdot)ds\right\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C\sqrt{\frac{T}{\epsilon}}\|\theta\|_{L^2_t \dot{H}^1_x}$.
   - $\left\|\int_0^t \mathfrak{g}_{\epsilon(t-s)} * \vec{\nabla}\cdot([\varphi_\epsilon * \vec{v}]\theta)(s,\cdot)ds\right\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq C\sqrt{\frac{T}{\epsilon}}\|\theta\|_{L^\infty_t L^2_x}\|\varphi_\epsilon\|_{L^2_x}\|\theta\|_{L^\infty_t L^2_x}$ et
   $\left\|\int_0^t \mathfrak{g}_{\epsilon(t-s)} * \vec{\nabla}\cdot([\varphi_\epsilon * \vec{v}]\theta)(s,\cdot)ds\right\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C\sqrt{\frac{T}{\epsilon}}\|\theta\|_{L^2_t \dot{H}^1_x}\|\varphi_\epsilon\|_{L^2_x}\|\theta\|_{L^\infty_t L^2_x}$.

   en déduire que pour $\epsilon > 0$, l'équation (2) admet une solution mild, notée θ_ϵ, dans l'espace $L^\infty([0,T[, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$.

6. Vérifier que pour $\theta_\epsilon \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ on a l'égalité

$$\frac{d}{dt}\|\theta_\epsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2} = -2\epsilon\|\vec{\nabla}\theta_\epsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2} - 2\|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\theta_\epsilon(t,\cdot)\|_{L^2} + 2\int_{\mathbb{R}^n}\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\theta_\epsilon)\theta_\epsilon(s,x)dx.$$

   et obtenir le contrôle

$$\|\theta_\epsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2} + 2\epsilon\int_0^t \|\theta_\epsilon(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}ds \leq \|\theta_0\|_{L^2}.$$

7. Montrer qu'avec cette estimation et pour $\epsilon > 0$ fixé on obtient des solutions mild θ_ϵ, dans l'espace $L^\infty([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^2([0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$ pour le problème (2).
8. Faire tendre $\epsilon \to 0$ pour obtenir une solution *faible* θ du problème (1) qui appartient à l'espace $L^\infty([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^n))$ et montrer qu'elle vérifie le principe du maximum suivant

$$\|\theta(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|\theta_0\|_{L^2}.$$