Équations de Navier–Stokes
(M2-AMS 2022-2023).

Examen de février 2023.

1 Solutions stationnaires de Navier—Stokes

On considère le problème

$$\Delta\vec{W} + \Delta\vec{F} - \mathrm{div}\,(\vec{W}\otimes\vec{W}) - \vec{\nabla}P = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{W} = 0, \tag{1}$$

avec une donnée $\vec{F} \in H^1(\mathbb{R}^3)$.
a) Montrer que $\|\frac{1}{\Delta}\mathbb{P}\mathrm{div}\,(\vec{u}\otimes\vec{v})\|_{H^1} \leq C\|\vec{u}\|_{H^1}\|\vec{v}\|_{H^1}$.
b) Montrer qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ et $C_0 > 0$ tels que, si $\|\vec{F}\|_{H^1} < \epsilon_0$, le problème (1) admet une solution $\vec{W} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ avec $\|\vec{W}\|_{H^1} \leq C_0\|\vec{F}\|_{H^1}$.

2 Solutions de Leray de Navier—Stokes

Préliminaires : Régularité maximale du noyau de la chaleur
On admettra le résultat suivant : si $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $f \in L^p(]0,+\infty[, L^q(\mathbb{R}^3))$ alors

$$G = \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \Delta f\, ds,$$

vérifie $G \in L^p_t L^q_x$ et on a $\|G\|_{L^p_t L^q_x} \leq C_{p,q}\|f\|_{L^p_t L^q_x}$.

Dans cette partie et les suivantes, on se donne $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ (à divergence nulle) et $\vec{F} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ avec $\|\vec{F}\|_{H^1} < \epsilon_0$ et on considère une solution $\vec{u}$ de

$$\vec{u}(t,x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) + \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}\Delta\vec{F}\, ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\mathrm{div}(\vec{u}\otimes\vec{u}))ds, \tag{2}$$

ou encore de

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{u} - \vec{\nabla}p + \Delta\vec{F} \qquad \mathrm{div}\,\vec{u} = 0, \\ \vec{u}(0,.) = \vec{u}_0. \end{cases}$$

a) Montrer (on pourra invoquer un théorème du cours) qu'il existe une solution $\vec{u}_1$ du problème de Navier–Stokes (2) telle que

$$\vec{u}_1 \in \bigcap_{T>0} L^\infty(]0,T[, L^2) \cap L^2(]0,T[, \dot{H}^1)$$

et $\vec{u}_1$ vérifie l'inégalité forte de Leray : pour presque tout $t_0 > 0$ et pour $t_0 = 0$ et pour tout $t \geq t_0$

$$\|\vec{u}_1(t,.)\|_2^2 + 2\int_{t_0}^t \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_1\|_2^2\, ds \leq \|\vec{u}(t_0,.)\|_2^2 - 2\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_1)\cdot(\vec{\nabla}\otimes\vec{F})\, dx\, ds. \tag{3}$$

b) On pose $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{W}$, où $\vec{W}$ est la solution du problème stationnaire (1). Montrer que $\vec{v}_1$ est une solution de

$$\vec{v}(t,x) = \mathfrak{g}_t * (\vec{u}_0 - \vec{W}) - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\mathrm{div}(\vec{v}\otimes\vec{v} + \vec{v}\otimes\vec{W} + \vec{W}\otimes\vec{v}))ds, \tag{4}$$

ou encore de

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v} = \Delta\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} - \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{W} - \vec{W}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} - \vec{\nabla}(p-P) \\ \operatorname{div}\vec{v} = 0 \\ \vec{v}(0,.) = \vec{u}_0 - \vec{W}. \end{cases}$$

Montrer que $\vec{v}_1$ vérifie

$$\vec{v}_1 \in \bigcap_{T>0} L^\infty(]0,T[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)),$$

et, pour presque tout $t_0 > 0$ et pour $t_0 = 0$ et pour tout $t \geq t_0$, l'inégalité

$$\|\vec{v}_1(t,.)\|_{L^2}^2 + 2\int_{t_0}^t \|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}_1\|_{L^2}^2\, ds \leq \|\vec{v}(t_0,.)\|_{L^2}^2 + 2\int_{t_0}^t \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}\otimes\vec{v}_1)\cdot(\vec{v}_1\otimes\vec{W})\, dx\, ds. \tag{5}$$

c) Montrer que $\|(\vec{\nabla}\otimes\vec{v})\cdot(\vec{v}\otimes\vec{W})\|_{L^1_x} \leq C\|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}\|_{L^2_x}^2\|\vec{W}\|_{L^3_x} \leq C_1\|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}\|_{L^2_x}^2\|\vec{F}\|_{H^1}$.

Dans la suite, on supposera que

$$C_1\|\vec{F}\|_{H^1} \leq \frac{1}{2}.$$

d) Montrer que

$$\vec{v}_1 \in L^\infty([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)). \tag{6}$$

3 Solutions mild de Navier—Stokes

On pose $\mathbb{E} = L^\infty(]0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^4(]0,+\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$. On munit $\mathbb{E}$ de la norme

$$\|\vec{u}\|_{\mathbb{E}} = \|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x} + \|\vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} + \|\vec{u}\|_{L^4_t \dot{H}^1_x}.$$

a) Pour $\vec{u}$, $\vec{v}$ dans $\mathbb{E}$ on pose

$$B(\vec{u},\vec{v}) = \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u}\otimes\vec{u}))ds.$$

Montrer qu'il existe C tel que, pour tous $\vec{u}$, $\vec{v}$ dans $\mathbb{E}$, on a

$$\|\vec{u}\otimes\vec{v}\|_{L^2_t L^2_x} \leq C\|\vec{u}\|_{L^4_t \dot{H}^1_x}\|\vec{v}\|_{L^4_t \dot{H}^{1/2}_x}$$

et

$$\|\vec{u}\otimes\vec{v}\|_{L^2_t \dot{H}^{1/2}_x} \leq C\|\vec{u}\|_{L^4_t \dot{H}^1_x}\|\vec{v}\|_{L^4_t \dot{H}^1_x}.$$

En déduire qu'il existe C_2 tel que, pour tous $\vec{u}$, $\vec{v}$ dans $\mathbb{E}$, on a

$$\|B(\vec{u},\vec{v})\|_{\mathbb{E}} \leq C_2\|\vec{u}\|_{L^4_t \dot{H}^1_x}\|\vec{v}\|_{\mathbb{E}} + C_2\|\vec{v}\|_{L^4_t \dot{H}^1_x}\|\vec{u}\|_{\mathbb{E}}$$

et

$$\|B(\vec{u},\vec{v})\|_{L^4\dot{H}^1} \leq C_2\|\vec{u}\|_{L^4\dot{H}^1}\|\vec{v}\|_{L^4\dot{H}^1}.$$

b) Pour $\alpha > 0$, on pose $\|\vec{u}\|_{\mathbb{E},\alpha} = \|\vec{u}\|_{L^4\dot{H}^1} + \alpha\|\vec{u}\|_{\mathbb{E}}$. Montrer que les normes $\|\cdot\|_{\mathbb{E},\alpha}$ et $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$ sont équivalentes sur $\mathbb{E}$ et que pour tous $\vec{u}$, $\vec{v}$ dans $\mathbb{E}$ et tout $\alpha > 0$, on a

$$\|B(\vec{u},\vec{v})\|_{\mathbb{E},\alpha} \leq C_2\|\vec{u}\|_{\mathbb{E},\alpha}\|\vec{v}\|_{\mathbb{E},\alpha}.$$

c) Pour $\vec{w}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, on pose

$$\vec{U}_0(t,x) = \mathfrak{g}_t * \vec{w}_0(x).$$

Montrer que $\vec{U}_0$ appartient à $\mathbb{E}$.
d) Pour $\vec{W} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ et $\vec{v} \in \mathbb{E}$, on pose

$$L(\vec{v}) = \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{W} + \vec{W} \otimes \vec{v}))ds.$$

Montrer que

$$\|\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{W} + \vec{W} \otimes \vec{v}))\|_{L^2} \leq C\|\vec{W}\|_{\dot{H}^{1/2}}\|\vec{v}\|_{\dot{H}^1}$$

et

$$\|\frac{1}{\Delta}\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{W} + \vec{W} \otimes \vec{v}))\|_{\dot{H}^1} \leq C\|\vec{W}\|_{\dot{H}^{1/2}}\|\vec{v}\|_{\dot{H}^1}$$

et en conclure qu'il existe une constante C_2 telle que

$$\|L(\vec{v})\|_{L^\infty_t L^2_x} + \|L(\vec{v})\|_{L^2_t \dot{H}^1_x} \leq C_3\|\vec{W}\|_{\dot{H}^{1/2}}\|\vec{v}\|_{L^2_t \dot{H}^1_x}$$

et (en utilisant la régularité maximale L^4L^2 du noyau de la chaleur)

$$\|L(\vec{v})\|_{L^4_t \dot{H}^1_x} \leq C_3\|\vec{W}\|_{\dot{H}^{1/2}}\|\vec{v}\|_{L^4_t \dot{H}^1_x}.$$

e) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\|L(\vec{v})\|_{\mathbb{E},\alpha} \leq C_3\|\vec{W}\|_{H^1}\|\vec{v}\|_{\mathbb{E},\alpha}.$$

f) Montrer que si $\|\vec{U}_0\|_{L^4_t \dot{H}^1_x} < \frac{1}{8C_2}$ et $\|\vec{W}\|_{H^1} < \frac{1}{2C_3}$, le problème

$$\vec{v}(t,x) = \mathfrak{g}_t * \vec{w}_0(x) - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{u}))ds - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{W} + \vec{W} \otimes \vec{v}))ds,$$

a une solution $\vec{v} \in \mathbb{E}$.

4 Comportement au temps l'infini des solutions de Leray

On se donne donc $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ (à divergence nulle) et $\vec{F} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ avec $\|\vec{F}\|_{H^1} < \min(\epsilon_0, \frac{1}{2C_1}, \frac{1}{2C_0C_3})$ et on considère une solution $\vec{u}_1$ du le problème de Navier–Stokes (2) telle que telle que

$$\vec{u}_1 \in \bigcap_{T>0} L^\infty(]0,T[, L^2) \cap L^2(]0,T[, \dot{H}^1)$$

et $\vec{u}_1$ vérifie l'inégalité forte de Leray. On pose $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{W}$, où $\vec{W}$ est la solution du problème stationnaire (1).
a) Déduire de (6) qu'il existe $t_1 > 0$ tel que
- $\vec{u}_1(t_1, .) \in H^1$
- pour le problème de Navier–Stokes (avec $\mathbb{F}$ est un tenseur suffisamment régulier)

$$\vec{u}(t,x) = \mathfrak{g}_{t-t_1} * \vec{u}(t_1, .) + \int_{t_1}^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(\operatorname{div}(\mathbb{F} - \vec{u} \otimes \vec{u}))ds, \tag{7}$$

$\vec{u}_{1|_{[t_1,+\infty[}}$ est une solution de (7) qui vérifie l'inégalité de Leray

$$\|\vec{u}_1(t,.)\|^2_{L^2} + 2\int_{t_1}^t \|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_1\|^2_{L^2}\,ds \leq \|\vec{u}_1(t_1,.)\|^2_{L^2} + 2\int_{t_1}^t \int_{\mathbb{R}^3} \vec{u}_1 \cdot \operatorname{div}\mathbb{F}\,dx\,ds,$$

- en particulier, $\vec v_{1|[t_1,+\infty[}$ est une solution de

$$\vec v(t,x)=\mathfrak{g}_t*\vec v_1(t_1,.)-\int_{t_1}^t \mathfrak{g}_{t-s}*\mathbb{P}(\operatorname{div}(\vec v\otimes\vec v+\vec v\otimes\vec W+\vec W\otimes\vec v))\,ds \tag{8}$$

  qui vérifie, pour tout $t\geq t_1$, l'inégalité

$$\|\vec v_1(t,.)\|_{L^2}^2+2\int_{t_1}^t \|\vec\nabla\otimes\vec v_1\|_{L^2}^2\,ds\leq\|\vec v(t_1,.)\|_{L^2}^2+2\int_{t_1}^t\int_{\mathbb{R}^3}(\vec\nabla\otimes\vec v_1)\cdot(\vec v_1\otimes\vec W)\,dx\,ds. \tag{9}$$

- il existe une solution $\vec w_1$ de (8) qui vérifie $\vec w_1\in L^\infty(]t_1,+\infty[,L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^2(]t_1,+\infty[,\dot H^1(\mathbb{R}^3))\cap L^4(]t_1,+\infty[,\dot H^1(\mathbb{R}^3))$.

b) Soit $t_1<T<+\infty$. Montrer que

$$\vec u_1\in L^2(]t_1,T[,H^1(\mathbb{R}^3)),\quad \partial_t\vec u_1\in L^{4/3}(]t_1,T[,\dot H^{-1}(\mathbb{R}^3)),$$

$$\vec W+\vec w_1\in L^4(]t_1,T[,H^1(\mathbb{R}^3)),\qquad \partial_t(\vec W+\vec u_1)\in L^2(]t_1,T[,\dot H^{-1}(\mathbb{R}^3)).$$

En conclure que $\partial_t(\vec u_1\cdot(\vec W+\vec w_1))=(\partial_t\vec u_1)\cdot(\vec W+\vec w_1))+\vec u_1\cdot\partial_t(\vec W+\vec w_1))$.
c) Montrer que, pour $t>t_1$,

$$\begin{aligned}\|\vec v_1-\vec w_1(t,.)\|_{L^2}^2+2\int_{t_1}^t\|\vec\nabla\otimes(\vec v_1-\vec w_1)\|_{L^2}^2\,ds\leq&2\int_{t_1}^t\int(\vec W+\vec w_1)\cdot((\vec v_1-\vec w_1)\cdot\vec\nabla(\vec v_1-\vec w_1))\,ds\\ \leq&C\int_{t_1}^t\|\vec W+\vec w_1\|_{\dot H^1}\|\vec v_1-\vec w_1\|_{\dot H^{1/2}}\|\vec v_1-\vec w_1\|_{\dot H^1}ds\\ \leq&\int_{t_1}^t\|\vec\nabla\otimes(\vec v_1-\vec w_1)\|_{L^2}^2\,ds+C'\int_{t_1}^t\|\vec W+\vec w_1\|_{\dot H^1}^4\|\vec v_1-\vec w_1\|_{L^2}^2ds.\end{aligned}$$

En conclure que $\vec v_1=\vec w_1$.
e) Montrer pour $t_1<t_2<t$ que

$$\vec v_1(t,x)=\mathfrak{g}_{t-t_2}*\vec v_1(t_2,.)-\int_{t_2}^t\mathfrak{g}_{t-s}*\mathbb{P}(\operatorname{div}((\vec v_1\otimes\vec v_1+\vec v_1\otimes\vec W+\vec W\otimes\vec v_1))\,ds,$$

et que

$$\limsup_{t\to+\infty}\|\vec v_1(t,.)\|_{L^2}\leq C(\int_{t_2}^{+\infty}\|\mathbb{F}(s,.)\|_{L^2}^2+\|\vec v_1(s,.)\|_{L^2}\|\vec v_1(s,.)\|_{\dot H^1}^3+\|\vec v_1(s,.)\|_{\dot H^1}^2\|\vec W\|_{\dot H^{1/2}}^2\,ds)^{1/2}.$$

f) Montrer que $\lim_{t\to+\infty}\|\vec u_1(t,.)-\vec W\|_{L^2}=0$.