Équations de Navier–Stokes (M2-AMS 2023-2024).

Examen de février 2024.

1 Problème 1 (15 pt.)

L'objectif de cet exercice est de montrer que si l'on considère un opérateur qui possède un effet suffisamment régularisant, alors à partir de données initiales grandes et régulières, on peut obtenir des solutions globales et uniques pour des équations de type Navier-Stokes. Plus précisément, nous allons remplacer l'opérateur Laplacien usuel Δ par l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{5}{4}}$ et nous considérons le système suivant sur l'espace $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ tout entier :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = -(-\Delta)^{\frac{5}{4}}\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p, \quad div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0(x), \quad div(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où nous supposerons que l'on a $\vec{u}_0 \in H^{\frac{5}{4}}(\mathbb{R}^3) = L^2(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^{\frac{5}{4}}(\mathbb{R}^3)$.

On commence par étudier la formulation intégrale du problème (1) :

$$\vec{u}(t,x) = \mathfrak{p}_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t \mathfrak{p}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u}\otimes\vec{u}))ds. \tag{2}$$

On admettra que l'on a $\|\mathfrak{p}_t\|_{L^1} < C$ et que l'on a l'estimation $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}\mathfrak{p}_t\|_{L^p} \leq Ct^{-\left[\frac{2s+6(1-1/p)}{5}\right]}$, pour $0 \leq s$ et $1 \leq p < +\infty$.

1. Si $\vec{u}_0 \in H^{\frac{5}{4}}(\mathbb{R}^3)$, obtenir les inégalités suivantes pour $0 < t < T$:

$$\|\mathfrak{p}_t * \vec{u}_0\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq C\|\vec{u}_0\|_{L^2}, \quad \|\mathfrak{p}_t * \vec{u}_0\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \leq C\|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1}, \quad \|\mathfrak{p}_t * \vec{u}_0\|_{L^2_t \dot{H}^{\frac{5}{4}}_x} \leq CT^{\frac{1}{2}}\|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{5}{4}}}.$$

2. Montrer que l'on a le contrôle suivant dans l'espace $L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$:

$$\left\|\int_0^t \mathfrak{p}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u}\otimes\vec{u}))ds\right\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq CT^{\frac{2}{5}}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x}.$$

3. Dans l'espace $L^\infty([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, obtenir l'estimation

$$\left\|\int_0^t \mathfrak{p}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u}\otimes\vec{u}))ds\right\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x} \leq CT^{\frac{2}{5}}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x}\|\vec{u}\|_{L^\infty_t \dot{H}^1_x}.$$

4. Pour $\vec{f} : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction telle que $\vec{f} \in L^2_t L^2_x$, démontrer l'estimation de régularité maximale suivante

$$\left\|(-\Delta)^{\frac{5}{4}}\int_0^t \mathfrak{p}_{t-s} * \vec{f}ds\right\|_{L^2_t L^2_x} \leq C\|\vec{f}\|_{L^2_t L^2_x}.$$

   En déduire le contrôle

$$\left\|\int_0^t \mathfrak{p}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u}\otimes\vec{u}))ds\right\|_{L^2_t \dot{H}^{\frac{5}{4}}_x} \leq C\|\vec{u}\|_{L^\infty_t L^2_x}\|\vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^{\frac{5}{4}}_x}.$$

5. A l'aide des estimations précédentes, montrer que le problème intégral (2) admet un unique point fixe dans l'espace
$$L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^\infty([0,T],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))\cap L^2([0,T],\dot{H}^{\frac{5}{4}}(\mathbb{R}^3)),$$
où l'on explicitera le lien entre le temps d'existence $T>0$ et la taille de la donnée initiale.
6. Montrer maintenant que la solution $\vec{u}$ obtenue ci-dessus, qui vérifie la formulation intégrale (2) et qui appartient à l'espace $L^\infty_tL^2_x\cap L^\infty_t\dot{H}^1_x\cap L^2_t\dot{H}^{\frac{5}{4}}_x$, appartient également à l'espace $L^2([0,T],\dot{H}^{\frac{9}{4}}(\mathbb{R}^3))$. En déduire que l'on a $p=(-\Delta)^{-1}div(div(\vec{u}\otimes\vec{u}))\in L^2_t\dot{H}^{\frac{3}{4}}_x$.
7. Vérifier que $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\in L^1_tL^2_x$, en déduire que le terme $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\cdot\vec{u}$ est défini bien au sens des distributions. Montrer également que le terme $\vec{\nabla}p\cdot\vec{u}$ est bien défini au sens des distributions. En utilisant la structure de l'équation (1) obtenir, pour tout $0<t<T$, l'identité d'énergie suivante
$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{L^2}+2\int_0^t\|\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{5}{4}}}ds=\|\vec{u}_0\|^2_{L^2}.$$
8. Montrer que si $\vec{u}\in L^\infty_tL^2_x\cap L^\infty_t\dot{H}^1_x\cap L^2_t\dot{H}^{\frac{5}{4}}_x\cap L^2_t\dot{H}^{\frac{9}{4}}_x$, alors $(-\Delta)^{\frac{5}{4}}\vec{u}\in L^2_t\dot{H}^{-\frac{1}{4}}_x$, $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\in L^2_t\dot{H}^{-\frac{1}{4}}_x$ et $\vec{\nabla}p\in L^2_t\dot{H}^{-\frac{1}{4}}_x$. Obtenir que l'on a $\partial_t\vec{u}\in L^2_t\dot{H}^{-\frac{1}{4}}_x$ puis que $\Delta\vec{u}\in L^2_t\dot{H}^{\frac{1}{4}}_x$. En déduire que les termes $\partial_t\vec{u}\cdot\Delta\vec{u}$, $(-\Delta)^{\frac{5}{4}}\vec{u}\cdot\Delta\vec{u}$, $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\cdot\Delta\vec{u}$ et $\vec{\nabla}p\cdot\Delta\vec{u}$ sont bien définis au sens des distributions.
9. A partir des informations de la question précédente, étudier l'évolution dans le temps de $\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{\dot{H}^1}$ et obtenir la majoration
$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|^2_{\dot{H}^1}\leq\|\vec{u}_0\|^2_{\dot{H}^1}exp\left(\int_0^t\|\vec{u}(s,\cdot)\|^2_{\dot{H}^{\frac{9}{4}}}ds\right),$$
en déduire que la norme $L^\infty_t\dot{H}^1_x$ de $\vec{u}$ est contrôlée par les informations sur la donnée initiale $\vec{u}_0$.
10. Conclure que l'équation (1) admet une unique solution mild globale en temps qui est issue d'une donnée initiale quelconque.

2 Problème 2 (9 pt.)

On considère les équations de Navier–Stokes
$$\begin{cases}\partial_t\vec{u}=-\Delta\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}-\vec{\nabla}p, \quad div(\vec{u})=0,\\[2ex] \vec{u}(0,x)=\vec{u}_0(x), \quad div(\vec{u}_0)=0,\end{cases}\tag{3}$$
où nous supposerons que l'on a $\vec{u}_0\in\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$. On sait qu'il existe $T_0=C_0\|\vec{u}_0\|^{-\frac{1}{4}}_{\dot{H}^1}$ (pour une constante $C_0>0$) et une solution $\vec{u}$ de (3) définie sur $[0,T_0]\times\mathbb{R}^3$ avec $\vec{u}\in\mathcal{C}([0,T_0],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$. On note $U(t,\xi)$ la transformée de Fourier de $\vec{u}(t,x)$. On veut montrer qu'il existe T assez petit tel que
$$\int|\xi|^2\left(\sup_{0<t<T}e^{\sqrt{t}|\xi|}|U(t,\xi)|\right)^2d\xi<+\infty.$$

1. On note $M(\xi)$ la matrice
$$M(\xi)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{|\xi|^2}\begin{pmatrix}\xi_1^2&\xi_1\xi_2&\xi_1\xi_3\\\xi_1\xi_2&\xi_2^2&\xi_2\xi_3\\\xi_1\xi_3&\xi_2\xi_3&\xi_3^2\end{pmatrix}.$$
Montrer que $\vec{u}\in\mathcal{C}([0,T],\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ est solution de (3) si et seulement si sa transformée de Fourier U est solution de
$$U(t,\xi)=e^{-t|\xi|^2}U_0(\xi)-\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^t\int e^{-(t-s)|\xi|^2}i\xi\cdot M(\xi)U(s,\xi-\eta)\otimes U(s,\eta)\,d\eta\,ds\tag{4}$$
où U_0 est la transformée de Fourier de $\vec{u}_0$.

2. On note E_T l'espace des champs de vecteurs $U(t,\xi) \in \mathcal{C}([0,T], L^2(|\xi|^2\, d\xi))$ tels que
$$\mathcal{M}_U(\xi) = \sup_{0<t<T} e^{\sqrt{t}|\xi|}|U(t,\xi)| \in L^2(|\xi|^2\, d\xi)$$
muni de la norme
$$\|U\|_{E_T} = \|\mathcal{M}_U\|_{L^2(|\xi|^2\, d\xi)}.$$
Pour U et $V \in E_T$, on note
$$B(U,V)(t,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^t \int e^{-(t-s)|\xi|^2} i\xi \cdot M(\xi) U(s,\xi-\eta) \otimes V(s,\eta)\, d\eta\, ds. \tag{5}$$
Montrer que $W = B(U,V)$ vérifie, pour une constante C_1 indépendante de T,
$$\mathcal{M}_W(\xi) \leq C_1 \frac{T^{1/4}}{|\xi|^{1/2}} \mathcal{M}_U * \mathcal{M}_V(\xi).$$
Indication : On pourra commencer par vérifier que, pour $0 < s < t$ et $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$,
$$\sqrt{t}|\xi| \leq \sqrt{t-s}|\xi| + \sqrt{s}|\xi-\eta| + \sqrt{s}|\eta|$$
et
$$-(t-s)|\xi|^2 \leq -\frac{1}{2}(t-s)|\xi|^2 - \sqrt{t-s}|\xi| + \frac{1}{2}.$$
3. Montrer que pour une constante C_2 on a
$$\||\xi|^{1/2}(\mathcal{M}_U * \mathcal{M}_V)\|_2 \leq C_2 \||\xi|\mathcal{M}_U\|_2 \||\xi|\mathcal{M}_U\|_2$$
(on pourra par exemple utiliser les lois de produits dans les espaces de Sobolev) et en conclure que
$$\|B(U,V)\|_{E_T} \leq C_1 C_2 T^{1/4} \|U\|_{E_T} \|V\|_{E_T}.$$
4. Montrer que
$$\|e^{-t|\xi|^2} U_0(\xi)\|_{E_T} \leq \sqrt{e}\|U_0\|_{,^2(|\xi|^2\, d\xi)}.$$
5. Montrer qu'il existe des constantes $C_3, C_4 > 0$ telles que, pour $T = C_3 \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1}^{-\frac{1}{4}}$, le problème de Cauchy (3) a une solution $\vec{u} \in \mathcal{C}([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ dont la transformée de Fourier $U(t,\xi)$ vérifie
$$\int |\xi|^2 \left(\sup_{0<t<T} e^{\sqrt{t}|\xi|} |U(t,\xi)| \right)^2 d\xi \leq C_4^2 \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1}^2.$$
6. Montrer que pour tout $t \in]0,T]$ et tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$, on a $\partial_x^\alpha \vec{u}(t,x) \in \dot{H}^1$ et, pour une constante C_5 (qui ne dépend ni de t ni de α), on a
$$\|\partial_x^\alpha \vec{u}(t,.)\|_{\dot{H}^1} \leq C_5 |\alpha|!\, t^{-\frac{|\alpha|}{2}} \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^1}.$$