Équations de Navier-Stokes
(M2-AMS 2024-2025).

Examen de février 2025.

1 Exercice (5 pt.)

Soit $\theta_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une donnée initiale et soit $b : [0, +\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \theta = \Delta\theta + \Big[(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\theta\Big]^2 * b, \\ \theta(0,\cdot) = \theta_0. \end{cases} \tag{1}$$

a) Si on a $\theta_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$ et si on suppose que $b \in L^1([0, T^*[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$ avec $0 < T^* \leq +\infty$, construire une solution *mild* du problème (1) dans l'espace de résolution $L^\infty([0, T[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^n))$. Sous quelles conditions peut-on avoir $T = +\infty$?

b) Si on suppose maintenant que $\theta_0 \in \dot{H}^k(\mathbb{R}^n)$ et que $b \in L^1([0, T^*[, \dot{H}^k(\mathbb{R}^n))$, montrer que la solution *mild* θ obtenue dans le point précédent vérifie $\theta \in L^\infty_t \dot{H}^k_x$.

c) Si l'on suppose que l'on a $\widehat{\theta_0}(\xi) > 0$ et $\widehat{b}(t,\xi) > 0$, montrer que la transformation de Fourier $\widehat{\theta}(t,\xi)$ de la solution *mild* obtenue au point $a)$ ci-dessus reste positive dans le temps, *i.e.* : $\widehat{\theta}(t,\xi) > 0$.

d) On définit l'espace de Fourier-Herz $\mathcal{F}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ par la condition

$$\mathcal{F}^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{F}^{s,p}} = \left\| |\xi|^s \widehat{f}(\cdot) \right\|_{L^p} < +\infty \right\},$$

et on considère le problème

$$\widehat{\theta}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\widehat{\theta}_0(\xi) + \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \Big[(|\xi|\widehat{\theta}(s,\xi)) * (|\xi|\widehat{\theta}(s,\xi))\Big] \widehat{b}(s,\xi) ds. \tag{2}$$

Si $\theta_0 \in \mathcal{F}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et si $b \in L^1_t \mathcal{F}^{1,2}_\xi$, construire une solution *mild* du problème (2) dans l'espace $L^\infty_t \mathcal{F}^{1,2}_\xi$.

e) On note $\theta_\mathbb{R}$ la solution *mild* du problème (1) obtenue dans la question $a)$ et $\theta_\mathbb{C}$ la solution *mild* du problème (2) obtenue dans la question $d)$. Quelle est la différence entre $\theta_\mathbb{R}$ et $\theta_\mathbb{C}$?

2 Exercice (10 pt.)

Soit $\vec{u}_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale à divergence nulle. On considère les équations de Navier-Stokes sous formulation intégrale

$$\vec{u}(t,x) = \mathfrak{g}_t * \vec{u}_0(x) - \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s,x) ds.$$

On fixe comme espace de résolution l'espace $L^\infty_t \dot{H}^{\frac{1}{2}}_x \cap L^4_t \dot{H}^1_x$ muni de la norme

$$\|\vec{f}(\cdot,\cdot)\|_{L^\infty_t \dot{H}^{\frac{1}{2}}_x \cap L^4_t \dot{H}^1_x} = \|\vec{f}(\cdot,\cdot)\|_{L^\infty_t \dot{H}^{\frac{1}{2}}_x} + \|\vec{f}(\cdot,\cdot)\|_{L^4_t \dot{H}^1_x}.$$

a) Montrer que l'on a

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L^\infty_t \dot{H}^{\frac{1}{2}}_x} \leq \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{et} \qquad \|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|_{L^4_t \dot{H}^1_x} \leq \|\vec{u}_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}.$$

Pour la dernière estimation on pourra écrire

$$\|\mathfrak{g}_t * \vec{u}_0\|^4_{L^4_t \dot{H}^1_x} = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2t|\xi|^2} |\xi| (|\xi| |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)|^2) d\xi \right) \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-2t|\eta|^2} |\eta| (|\eta| |\widehat{\vec{u}_0}(\eta)|^2) d\eta \right) dt,$$

et on remarquera que l'on a $\frac{|\xi||\eta|}{|\xi|^2 + |\eta|^2} \leq C$.

b) En utilisant les lois de produits, obtenir l'estimation

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s,\cdot)ds \right\|_{L^\infty_t \dot{H}^{\frac{1}{2}}_x} \leq C \|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{L^2_t \dot{H}^{\frac{1}{2}}_x} \leq C \|\vec{u}\|_{L^4_t \dot{H}^1_x} \|\vec{u}\|_{L^4_t \dot{H}^1_x}.$$

c) En admettant la propriété de régularité maximale du noyau de la chaleur suivante

$$\left\| \Delta \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \vec{f}(s,\cdot)ds \right\|_{L^4_t L^2_x} \leq C \|\vec{f}\|_{L^4_t L^2_x},$$

démontrer la majoration

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s,\cdot)ds \right\|_{L^4_t \dot{H}^1_x} \leq C \|\vec{u} \otimes \vec{u}\|_{L^4_t L^2_x}$$

d) En déduire le contrôle

$$\left\| \int_0^t \mathfrak{g}_{t-s} * \mathbb{P}(div(\vec{u} \otimes \vec{u}))(s,\cdot)ds \right\|_{L^4_t \dot{H}^1_x} \leq C \|\vec{u}\|_{L^\infty_t \dot{H}^{\frac{1}{2}}_x} \|\vec{u}\|_{L^4_t \dot{H}^1_x}.$$

e) A partir de tous les calculs précédents, montrer qu'il existe une solution *mild* des équations de Navier-Stokes dans l'espace $L^\infty_t \dot{H}^{\frac{1}{2}}_x \cap L^4_t \dot{H}^1_x$.

f) A quel espace appartient la pression p ?

3 Exercice (5 pt.)

Soit $\mathbb{F} = (f_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ un tenseur tel que l'on ait $f_{ij} \in L^p([0,T[, L^q(\mathbb{R}^3))$ pour tout $1 \leq i,j \leq 3$, où $0 < T < +\infty$ est un temps fixé et les indices p, q vérifient $1 < p, q < +\infty$. On considère l'équation

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} + div(\mathbb{F}), \\ \vec{v}(0,x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

a) Obtenir le contrôle

$$\|\vec{v}\|_{L^\infty_t L^\infty_x} \leq \sup_{0<t<T} C \int_0^t (t-s)^{-(\frac{1+3/q}{2})} \|\mathbb{F}(s,\cdot)\|_{L^q_x} ds.$$

b) En déduire que si l'on a le contrôle $\|\mathbb{F}\|_{L^p_t L^q_x} < +\infty$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$, alors on a bien $\vec{v} \in L^\infty([0,T[, L^\infty(\mathbb{R}^3))$.

c) Soit $\vec{u}$ une solution faible de Leray des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - div(\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p, \\ \vec{u}(0,x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

pour laquelle on suppose que l'on a l'information $\vec{u} \in L^p([0,T[, L^q(\mathbb{R}^3))$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < \frac{1}{2}$. Vérifier que la pression p appartient à l'espace $L^{\frac{p}{2}}([0,T[, L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^3))$. Obtenir que l'on a $\vec{u} \in L^\infty([0,T[, L^\infty(\mathbb{R}^3))$.