Habilitation à diriger des recherches

Mémoire présenté par **Diego Chamorro**

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry (LaMME)
Université Paris-Saclay/Evry

Quelques résultats de régularité et d'unicité pour des équations de la mécanique des fluides

Soutenue le 21 Mai 2026, après avis des rapporteurs :

M. Raphaël Danchin (Université Paris-Est Créteil)
M. Grzegorz Karch (Université de Wrocław)
M. James Robinson (Université de Warwick)

Devant le jury composé de :

M. Lorenzo Brandolese (Université de Lyon 1)
M. Raphaël Danchin (Université Paris-Est Créteil)
M. Grzegorz Karch (Université de Wrocław)
M. Pierre Gilles Lemarié-Rieusset (Université d'Evry)
M. Stéphane Menozzi (Université d'Evry)
M. Marius Paicu (Université de Bordeaux)
M. James Robinson (Université de Warwick)

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire sont présentés quelques travaux que j'ai effectués autour des équations aux dérivées partielles et qui ont été entrepris après ma thèse, qui portait quant à elle sur des inégalités fonctionnelles dans le cadre des groupes de Lie stratifiés.

Le premier chapitre de ce document présente quelques résultats de régularité des solutions faibles de l'équation quasi-geostrophique de surface. En effet, à partir d'une nouvelle information donnée en termes d'espaces de Besov et qui provient du bilan d'énergie, il est possible, en utilisant la dualité des espaces de Hardy et des espaces de Hölder, d'obtenir un gain de régularité pour les solutions faibles de cette équation à partir de données initiales uniquement dans des espaces de Lebesgue. La méthode présentée ici consiste à établir une équation retrograde duale avec une donnée initiale qui appartient à un espace de Hardy, ainsi, étant donné que le crochet de dualité Hardy-Hölder se préserve dans l'évolution, il suffit de contrôler convenablement la déformation de cette donnée initiale pour en déduire, toujours par dualité, un gain de régularité de type höldérien. Ce gain de régularité peut se généraliser à des équations qui possèdent la même structure que celle de l'équation quasi-geostrophique de surface, comme par exemple des équations de transport-diffusion avec une diffusion donnée par une puissance fractionnaire du Laplacien et un terme de transport non linéaire à divergence nulle.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des équations de Navier-Stokes incompressibles classiques et on s'intéressera ici aux théories de régularité pour les solutions faibles de Leray ainsi qu'au rôle de la pression dans ces théories. En effet, on notera tout d'abord que pour une solution quelconque $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ nous disposons du critère de Serrin qui nous permet d'obtenir (sans aucune condition particulière sur la pression) un gain de régularité en variable spatiale si l'on suppose des informations d'intégrabilité supplémentaires sur $\vec{u}$. Ces conditions sont usuellement exprimées en termes d'espaces de Lebesgue et l'on demandera alors $\vec{u} \in L^p_t L^q_x$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 1$, indiquons que des généralisations en termes d'espaces de Morrey paraboliques ont également été utilisées, mais en l'état actuel de nos connaissances, nous ne savons pas obtenir ces informations d'intégrabilité pour une solution de Leray quelconque. Une deuxième approche, proposée par Caffarelli, Kohn et Nirenberg, permet d'obtenir (avec quelques hypothèses sur la pression) un gain de régularité sur des petits voisinages de points où le gradient de la vitesse peut être contrôlé. En combinant ces deux théories, il est possible de proposer une troisième approche qui permet d'obtenir un gain de régularité proche de la théorie de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg tout en supposant une pression très générale. Ce point de vue nous mènera à introduire dans ce chapitre la notion de solutions dissipatives.

Dans le troisième chapitre nous étudierons les théories de régularité pour quelques équations de la mécanique des fluides. On commencera tout d'abord par les équations de la magnéto-hydrodynamique qui présentent un couplage très symétrique des variables et qui permettent de ce fait d'adapter assez directement les résultats de régularité présentés dans le chapitre précédent. Nous étudierons ensuite les équations de Boussinesq, ici le couplage entre les variables permet de réaliser une étude séparée de celles-ci, et cela nous amènera à introduire des critères de régularité partiels, dans le sens où il suffira de demander des hypothèses d'intégrabilité sur une seule variable pour obtenir un gain de régularité dans les deux variables et l'on parlera alors d'un phénomène de domination d'une variable sur l'autre. Pour terminer ce chapitre, nous considérerons les équations micro-polaires, qui permettent de modéliser des fluides non-Newtoniens et dont le couplage permet également d'exhiber un effet de domination d'une variable sur l'autre. Pour ces équations micro-polaires nous pousserons notre analyse un peu plus loin et nous présenterons quelques critères de concentration de la norme L^3 près de points singuliers.

Finalement, dans le dernier et quatrième chapitre nous étudierons quelques problèmes d'unicité pour les équations de Navier-Stokes stationnaires. S'il n'est pas très difficile de construire des solutions faibles $\vec{u} \in \dot{H}^1$ pour le système de Navier-Stokes stationnaire, le problème de l'unicité de ces solutions reste aujourd'hui totalement ouvert. Toutefois, si l'on suppose une certaine décroissance à l'infini de ces solutions (et cette décroissance est imposée en termes d'espaces fonctionnels bien choisis) alors on peut montrer que l'unique solution de ce système est la solution triviale $\vec{u} \equiv 0$. On remarquera que par les injections de Sobolev on dispose directement de l'information $\vec{u} \in L^6$ et donc d'une certaine décroissance à l'infini, mais ceci ne semble pas suffisant pour déduire que l'unique solution est la solution triviale. Ainsi, nous montrerons dans un premier temps comment le fait de supposer une meilleure décroissance à l'infini (exprimée en termes des espaces de Lebesgue usuels L^q avec $3 \leq q \leq \frac{9}{2}$) permet d'obtenir l'unicité de cette solution triviale. Dans un deuxième temps, nous étudierons le système de Navier-Stokes fractionnaire, où la diffusion est donnée par une puissance fractionnaire du Laplacien $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$. Le fait de considérer un opérateur non local induit un comportement assez différent des solutions car l'espace de résolution naturel n'est plus $\dot{H}^1$ mais $\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}$, où $0 < \alpha < 2$ est la puissance fractionnaire du Laplacien, et ceci induit des informations différentes provenant des injections de Sobolev. De plus, d'un point de vue technique, il sera nécessaire de considérer les effets non-locaux de cette puissance fractionnaire du Laplacien ce qui nous permettra pour certaines valeurs de α d'obtenir des résultats d'unicité intéressants. Pour terminer, nous reviendrons au système des équations de Navier-Stokes stationnaires classiques et nous verrons comment les espaces de Lebesgue d'exposant variable permettent de donner un éclairage différent au problème de l'unicité de la solution triviale.

Articles publiés

Voici à présent la liste complète de mes articles acceptés à ce jour (mai 2025). Les articles dont les noms des auteurs sont soulignés sont ceux qui ont été utilisés pour la rédaction de ce mémoire.

— D. Chamorro, F. Cortez. *The role of the dimension in uniqueness results for the stationary quasi-geostrophic system.* Mathematical Methods in the Applied Sciences (2025). [24]

— D. Chamorro, A.-N. Marcoci & L.-G. Marcoci. *A new pointwise inequality for rough operators and applications.* Journal of Mathematical Analysis and Applications (2025). [45]

— D. Chamorro, O. Jarrín. *A turbulent study for a damped Navier-Stokes equation : turbulence and problems.* Journal of Elliptic and Parabolic Equations (2025). [30]

— D. Chamorro, D. Llerena. *Partial regularity and L^3-norm concentration effects around possible blow-up points for the micropolar fluid equations.* Nonlinear Differential Equations and Applications (2025). [41]

— D. Chamorro, G. Vergara-Hermosilla. *Liouville type theorems for stationary Navier-Stokes equations with Lebesgue spaces of variable exponent.* Documenta Mathematica (2025). [54]

— D. Chamorro, M. Yangari. *Some existence and regularity results for a non-local transport-diffusion equation with fractional derivatives in time and space.* Journal of Differential Equations, Volume 428, Pages 389-421 (2025). [55]

— D. Chamorro, B. Poggi. *On an almost sharp Liouville type theorem for fractional Navier-Stokes equations.* Publ. Mat. 69, 27–43, (2025). [52]

— D. Chamorro, S. Menozzi. *Non Linear Singular Drifts and Fractional Operators.* Partial Differential Equations and Applications, Volume 5, 33, (2024). [49]

— D. Chamorro, D. Llerena. *Partial suitable solutions for the micropolar equations and regularity properties.* Annales Mathématiques Blaise Pascal, Volume 31, no 2, p. 137-187, (2024). [40]

— D. Chamorro, N. Meunier. *Analysis of a nonlocal and nonlinear system for cell-cell communication.* Acta Applicandae Mathematicae, 193 :7 (2024). [50]

— D. Chamorro, C. Mîndrila. *A new approach for the regularity of weak solutions of the 3D Boussinesq system.* Nonlinearity, Volume 37, Number 6, (2024). [51]

— D. Chamorro, G. Vergara-Hermosilla. *Lebesgue spaces with variable exponent : some applications to the Navier-Stokes equations.* Positivity, Vol. 28, Article number : 24 (2024) [53]

— D. Chamorro, D. Llerena & G. Vergara-Hermosilla. *Some remarks about the stationary*

Micropolar fluid equations : existence, regularity and uniqueness. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Volume 536, Issue 2, (2024). [42]

— D. Chamorro, A.-N. Marcoci & L.-G. Marcoci. *Improved Sobolev inequalities : generalizations to classical Lorentz spaces.* Results in Mathematics (2023) 78 :219. [44]

— D. Chamorro, D. Llerena. *A crypto-regularity result for the micropolar fluids equations.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 520, Issue 2, (2023). [39]

— D. Chamorro, D. Llerena. *Interior ϵ-regularity theory for the solutions of the magneto-micropolar equations with a perturbation term.* Journal of Elliptic and Parabolic Equations, Vol 8, pages 555–616, (2022). [38]

— D. Chamorro. *Mixed Sobolev-like Inequalities in Lebesgue spaces of variable exponents and in Orlicz spaces.* Positivity, Vol. 26, Article number : 5 (2022). [22]

— D. Chamorro, E. Issoglio. *Blow-up for a nonlinear PDE with fractional Laplacian and singular quadratic nonlinearity.* Mathematische Nachrichten 295 :1462–1479 (2022). [28]

— D. Chamorro, J. He. *Regularity theory for the dissipative solutions of the MHD equations.* SIAM, Journal on Mathematical Analysis. Volume : 53. Issue : 5. (2021). [27]

— D. Chamorro, J. He. *On the partial regularity theory for the MHD equations.* J. Math. Anal. Appl. Vol. 494, Issue 1 (2021). [26]

— D. Chamorro, F. Cortez, J. He & O. Jarrín. *On the local regularity theory for the MHD equations.* Documenta Mathematica 26 (2021) 103–126. [25]

— D. Chamorro, P. G. Lemarié-Rieusset & O. Jarrín. *On the Kolmogorov dissipation law in a damped Navier-Stokes equation.* Journal of Dynamics and Differential Equations, volume 33, pages 1109–1134 (2021). [32]

— D. Chamorro, P. G. Lemarié-Rieusset & O. Jarrín. *Frequency decay for Navier-Stokes stationary solutions.* Comptes Rendus Mathématique Volume 357, (2019), Pages 175-179. [31]

— D. Chamorro, P. G. Lemarié-Rieusset & O. Jarrín. *Some Liouville theorems for stationary Navier-Stokes equations in Lebesgue and Morrey spaces.* Annales de l'Institut Henri Poincaré, Volume 38, Issue 3, May–June 2021, Pages 689-710 (2018). [33]

— D. Chamorro, P. G. Lemarié-Rieusset & K. Mayoufi. *The role of the pressure in the partial regularity theory for weak solutions of the Navier-Stokes equations.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 228(1), 237-277. (2018). [37]

— D. Chamorro, S. Menozzi. *Nonlinear singular drifts : when Besov meets Morrey and Campanato.* Potential Analysis, Volume 49, Issue 1, pp 1–35 (2018). [48]

— D. Chamorro, P. G. Lemarié-Rieusset & K. Mayoufi. *Local stability of energy estimates* *for the Navier–Stokes equations.* Contemporary Mathematics (2017). [36]

— D. Chamorro, S. Menozzi. *Fractional operators with singular drift : Smoothing properties and Morrey-Campanato spaces.* Rev. Mat. Iberoam. 32 (2016), no. 4, 1447–1501. [47]

— D. Chamorro, O. Jarrín. *Fractional Laplacians and Nilpotent Lie groups.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 517–522. [29]

— D. Chamorro. *A molecular method applied to a non-local PDE in stratified Lie groups.* J. Math. Anal. Appl. 413 (2014) 583–608. [18]

— D. Chamorro, P.G. Lemarié-Rieusset. *Real Interpolation method, Lorentz spaces and refined Sobolev inequalities.* Journal of Functional Analysis 265 (2013) 3219–3232. [35]

— D. Chamorro. *A counterexample for Improved Sobolev Inequalities over the 2-adic group.* Commun. Korean Math. Soc. 28 (2013), No. 2, pp. 231–241. [17]

— D. Chamorro, P.G. Lemarié-Rieusset. *Quasi-geostrophic equation, nonlinear Bernstein inequalities and alpha-stable processes.* Rev. Mat. Iberoam. 28 (2012), no. 4, 1109–1122. [34]

— D. Chamorro. *Some functional inequalities on polynomial volume growth Lie groups.* Canad. J. Math. 64 (2012), 481-496. [16]

— D. Chamorro. *Improved Sobolev Inequalities and Muckenhoupt weights on stratified Lie groups.* J. Math. Anal. Appl. 377 (2011) 695–709. [15]

Prépublications

— D. Chamorro, M. Mansais. *Some general external forces and critical mild solutions for the fractional Navier-Stokes equations.* (2025). [43]

— D. Chamorro, M. E. Martínez. *Global weak solutions for a variation of the Whitham equation.* (2025). [46]

Livres publiés

— D. Chamorro. *Introduction aux équations de Navier-Stokes incompressibles.* Editions EDPSciences (2025). [23]

— D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, 3.* Editions Amarun (2020).[21]

— D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, 2.* Editions Amarun (2017).[20]

— D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, 1.* Editions Amarun (2015). [19]

Chapitre 1

Gain de régularité pour des équations de Transport-Diffusion

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre nous nous intéressons à l'étude de certaines propriétés de régularité des solutions faibles d'une classe d'équations de transport-diffusion. La motivation principale pour l'étude de ce type d'équations provient de l'analyse de l'équation *quasi-géostrophique* en dimension 2 qui est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\theta + (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\theta + \mathrm{div}(\mathbb{A}_{[\theta]}\theta) = 0, & 0<\alpha<2, \\ \theta(0,x) = \theta_0(x), & x\in\mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\theta : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'inconnue et $\theta_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une donnée initiale. Ici le vecteur $\mathbb{A}_{[\theta]}$ dépend de θ et est défini à l'aide des transformées de Riesz :

$$\mathbb{A}_{[\theta]}(t,x) = \begin{bmatrix} -R_2(\theta)(t,x) \\ R_1(\theta)(t,x) \end{bmatrix},$$

avec $\widehat{R_j(\theta)}(t,\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{\theta}(t,\xi)$ pour $j=1,2$. Avec cette expression de $\mathbb{A}_{[\theta]}$, nous avons bien la condition de divergence nulle $\mathrm{div}(\mathbb{A}_{[\theta]}) = 0$, condition qui intervient assez naturellement dans le terme de transport des équations provenant de la mécanique des fluides. Rappelons finalement que la puissance fractionnaire de l'opérateur Laplacien $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ pour $0<\alpha<2$ peut se caractériser très facilement au niveau de Fourier par l'expression $\widehat{(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\varphi}(\xi) = |\xi|^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)$.

En plus de son interêt dans la modélisation de certains phénomènes de la mécanique des fluides (voir par exemple le livre [105]), le système (1.1) a été largement étudié d'un point de vue mathématique (voir les références [7], [11], [34], [60], [62], [86], [87], [100], [110]), mais il recèle encore quelques problèmes largement ouverts, en particulier lorsqu'on s'intéresse à la régularité des solutions faibles.

Une manière très simple de présenter ces problèmes de régularité consiste à comparer les interactions entre l'opérateur de diffusion $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ avec le terme de transport non linéaire $\mathrm{div}(\mathbb{A}_{[\theta]}\theta)$. En effet, puisque l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ induit naturellement une régularisation d'ordre α, trois cas de figure se dégagent :

- Si l'on a $1 < \alpha < 2$, dans ce cas l'opérateur de diffusion $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ "produit" plus de régularité que n'en "consomme" le terme de transport $\operatorname{div}(\mathbb{A}_{[\theta]}\theta)$. On parlera alors d'une situation *sous-critique.*

- Si $\alpha = 1$, nous avons un "équilibre" entre l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ et le terme de transport, et de cas on se place dans un cadre *critique.*

- Si $0 < \alpha < 1$, alors l'effet régularisant de l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ est clairement moins fort et nous avons un cas *sur-critique.*

S'il n'est pas trop difficile d'obtenir des solutions faibles du système (1.1) à partir de données initiales $\theta_0 \in L^p(\mathbb{R}^3)$, l'étude de la régularité pour ce type de solutions est beaucoup plus délicate, et ce dans chacun des trois cas évoqués ci-dessus. Nous verrons dans ce qui suit comment obtenir des résultats de régularité pour ces solutions faibles.

1.2 Une inégalité d'énergie et des estimations de régularité

Lorsque l'on a $\theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, Resnick [106] a construit en 1995 des solutions faibles du système (1.1) qui vérifient l'inégalité d'énergie suivante

$$\|\theta(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\theta|^2 dxds \le \|\theta_0\|_{L^2}^2, \tag{1.2}$$

et qui appartiennent donc à l'espace $L^\infty([0,+\infty[, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2([0,+\infty[, \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2))$. Un peu plus tard, en 2008, Marchand [100] a obtenu des solutions faibles à partir d'une donnée initiale $\theta_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$ avec $\frac{4}{3} \le p < +\infty$, telles que

$$\|\theta(t,\cdot)\|_{L^p}^p + p\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \theta|\theta|^{p-2}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\theta dxds \le \|\theta_0\|_{L^p}^p. \tag{1.3}$$

Comme cela a été établi en 2004 par Córdoba & Córdoba [62], la quantité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \theta|\theta|^{p-2}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\theta dx$ qui intervient dans l'inégalité d'énergie ci-dessus est positive car elle peut être minorée de la manière suivante

$$0 \le 2\int_{\mathbb{R}^2} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}(|\theta|^{\frac{p}{2}})|^2 dx \le \int_{\mathbb{R}^2} \theta|\theta|^{p-2}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\theta dx, \tag{1.4}$$

et ainsi, à partir de l'estimation (1.3), il est relativement direct d'obtenir des solutions faibles qui appartiennent à l'espace $L^\infty([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^2))$ puisqu'on dispose du contrôle uniforme en temps $\|\theta(t,\cdot)\|_{L^p} \le \|\theta_0\|$.

On notera ici qu'il existe une différence notable entre les inégalités (1.2) et (1.3). En effet, s'il est évident d'obtenir une information de type Sobolev dans le premier cas, puisque l'on a directement

$$\int_{\mathbb{R}^2} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\theta(t,\cdot)|^2 dx = \|\theta(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}^2,$$

dans le deuxième cas, la quantité

$$\int_{\mathbb{R}^2} \theta|\theta|^{p-2}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\theta dx,$$

ne semblait pas correspondre de manière élémentaire et en toute généralité à une information de régularité mesurée dans un espace fonctionnel connu.

Il est toutefois possible de préciser le contrôle (1.4), car nous avons un résultat qui a été établi en 2012 dans notre article [34] :

Théorème 1.2.1 *Si $2 \leq p < +\infty$ et si $0 < \alpha < 2$, alors pour une fonction $\theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ on a l'estimation*

$$\|\theta\|^p_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha}{p},p}} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \theta|\theta|^{p-2}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\theta dx, \tag{1.5}$$

où l'espace $\dot{B}_p^{\frac{\alpha}{p},p}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Besov homogène.

Ce résultat permet donc de compléter l'information disponible sur les solutions faibles obtenues par Marchand dans [100] pour l'équation (1.1) : si la donnée initiale appartient à un espace $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour $2 \leq p < +\infty$, alors les solutions faibles appartiennent à l'espace $L^\infty_t L^p_x \cap L^p_t \dot{B}_{p,x}^{\frac{\alpha}{p},p}$.

Indiquons que le Théorème 1.2.1 est un cas particulier d'un résultat plus général qui étudie les semi-groupes de diffusion symétriques au sens de Stein (voir [111]) dont nous rappelons la définition :

Définition 1.2.1 *Un semi-groupe de diffusion symétrique avec générateur infinitésimal L est une famille d'opérateurs $(e^{tL})_{t\geq 0}$ telle que*

1) *l'opérateur e^{tL} est auto-adjoint pour $t \geq 0$,*
2) *l'action de l'opérateur e^{tL} est donnée par convolution avec un noyau positif $p_t(x) \geq 0$ et normalisé $\displaystyle\int_0^{+\infty} p_t(x)dx = 1$,*
3) *nous avons la propriété de semi-groupe $e^{(t+s)L} = e^{tL}e^{sL}$ pour tout $s, t \geq 0$ et pour $f \in L^2$, on a la limite forte $\lim\limits_{t\to 0}\|e^{tL}(f) - f\|_{L^2} = 0$,*
4) *on a la limite $L(f) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^{tL}(f)-f}{t}$ dans un sous espace dense de L^2,*
5) *on a l'identité $\partial_t(e^{tL}(f)) = L(e^{tL}(f))$.*

Ainsi, le résultat (donné dans notre article [34]) qui généralise le Théorème 1.2.1 est le suivant :

Théorème 1.2.2 *Soit $(e^{tL})_{t\geq 0}$ un semi-groupe de diffusion symétrique avec générateur infinitésimal L, alors :*

1) *Si $2 \leq p < +\infty$, on a les estimations*

$$p\int_{\mathbb{R}^n} f|f|^{p-2}L(f)dx \leq -\int_{\mathbb{R}^n} \left|(-L)^{\frac{1}{2}}(f|f|^{\frac{p}{2}-1})\right|^2 dx. \tag{1.6}$$

2) *Si $1 \leq p \leq 2$ alors il vient*

$$C\int_{\mathbb{R}^n} f|f|^{\frac{p}{2}-1}L(f|f|^{\frac{p}{2}-1})dx \leq p\int_{\mathbb{R}^n} f|f|^{p-2}L(f)dx.$$

On notera que l'estimation (1.6) ne fournit pas directement le contrôle (1.5). En effet si l'on applique l'inégalité (1.6) au semi-groupe $e^{-t(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}}$ il vient

$$\|f|f|^{\frac{p}{2}-1}\|^2_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}} = \int_{\mathbb{R}^n} \left|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}(f|f|^{\frac{p}{2}-1})\right|^2 dx \leq p \int_{\mathbb{R}^n} f|f|^{p-2}(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(f)dx,$$

de sorte qu'il manque le contrôle

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha}{p},p}} \leq C\|f|f|^{\frac{p}{2}-1}\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}},$$

qui se déduit quant à lui de l'inégalité

$$|f(x)-f(y)|^p \leq 2^p|f(x)|f(x)|^{\frac{p}{2}-1} - f(y)|f(y)|^{\frac{p}{2}-1}|^2,$$

et de la caractérisation des espaces de Besov par des modules de continuités :

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha}{p},p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha}}dydx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On notera que lorsque $1 \leq p \leq 2$, alors le sens des inégalités s'inversent.

Le Théorème 1.2.1 est à la base de certains développements que nous avons réalisé dans l'étude des equations de transport-diffusion qui généralisent le système (1.1). On citera en particulier nos articles [47], [48] et [49] dont l'idée générale est exposée dans la section qui suit.

1.3 Une méthode moléculaire pour un gain de régularité

Nous allons tout d'abord généraliser les équations (1.1) en considérant le système suivant : pour une fonction $\theta : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $n \geq 2$, on considère l'équation

$$\begin{cases} \partial_t\theta - \nabla\cdot(\mathbb{A}_{[\theta]}\,\theta) + \mathcal{L}^\alpha\theta = 0, \qquad div(\mathbb{A}_{[\theta]}) = 0, \qquad 0<\alpha<2, \\ \theta(0,x) = \theta_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.7}$$

où $\mathcal{L}^\alpha$ est un opérateur de diffusion α-stable et où $\mathbb{A}_{[\theta]} = \mathbb{K}(\theta)$ est un champ de vitesse non local *à divergence nulle* qui est donné comme un vecteur $\mathbb{K}$ d'intégrales singulières. Nous donnerons dans la Section 1.3.1 ci-dessous une définition précise des termes $\mathcal{L}^\alpha$ et $\mathbb{A}_{[\theta]}$. Indiquons seulement que lorsqu'on a $n=2$, si l'on considère $\mathcal{L}^\alpha = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ ainsi que

$$\mathbb{K}(\theta) = [-R_2(\theta), R_1(\theta)],$$

où $(R_j)_{1\leq j\leq 2}$ désigne les transformées de Riesz données par $\widehat{R_j(\theta)} = -i\frac{\xi_j}{|\xi|}\widehat{\theta}$, alors on récupère sans problème le système (1.1).

Avant de présenter nos principaux théorèmes sur le système non linéaire (1.7), il convient de rappeler quelques résultats dans le cas *linéaire*, *i.e.* lorsque le terme de transport $\mathbb{A} = [A_1,\cdots,A_n]$ est indépendant de la solution. En effet, dans ce cas nous avons le problème

$$\begin{cases} \partial_t\psi \pm \nabla\cdot(\mathbb{A}\,\psi) + \mathcal{L}^\alpha\psi = 0, \qquad div(\mathbb{A}) = 0, \qquad 0<\alpha<2, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.8}$$

et nous avons alors prouvé dans [47] que, si le terme de transport $\mathbb{A}$ est borné (dans la variable d'espace) dans un espace de Morrey-Campanato $\mathcal{M}^{q,a}(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire si pour $1 \leq i \leq n$ on a

$$\|A_i\|_{\mathcal{M}^{q,a}} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \sup_{0<r<+\infty} \left(\frac{1}{r^a} \int_{B(x_0,r)} |A_i(x) - \overline{A_i}_{B(x_0,r)}|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

où les paramètres q, a sont liés à la dimension n et au degré de régularité α de l'opérateur de diffusion $\mathcal{L}^\alpha$ par l'expression

$$\frac{a-n}{q} = 1 - \alpha, \tag{1.9}$$

alors, à partir d'une donnée initiale $\psi_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, il est possible d'obtenir un gain de régularité Höldérien $\mathcal{C}^\gamma(\mathbb{R}^n)$ pour les solutions faibles du système (1.8) où $0 < \gamma < \alpha$. Remarquons en particulier que, suite à la relation ci-dessus, si $1 < \alpha < 2$ alors l'espace correspondant $\mathcal{M}^{q,a}(\mathbb{R}^n)$ peut contenir des objets qui ne sont pas forcément réguliers (rappelons que $L^q(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^{q,0}(\mathbb{R}^n)$), tandis que si $\alpha = 1$ nous devrions avoir $a = n$ et alors l'espace correspondant est $\mathcal{M}^{q,n}(\mathbb{R}^n) \simeq BMO(\mathbb{R}^n)$. Enfin, si $0 < \alpha < 1$, nous avons l'identification $\mathcal{M}^{q,a}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{C}^{1-\alpha}(\mathbb{R}^n)$, ce qui correspond à la régularité usuellement demandée pour le terme de transport afin d'obtenir un gain de régularité pour les solutions faibles (voir par exemple [60]). Ainsi, dans tous les cas énoncés ci-dessus (sous-critique, critique et super-critique), tant que le terme de transport est borné dans les espaces de Morrey-Campanato $\mathcal{M}^{q,a}$ tels que l'on ait la relation (1.9) alors il est possible d'obtenir un gain de régularité. Cependant, il est important de souligner que si cette condition n'est pas satisfaite, des contre-exemples à ce gain de régularité peuvent être produits, voir pour plus de détails l'article [110]. Notez que les contre-exemples construits dans l'article mentionné (qui étudie le cas 2D) sont associés à des termes de transports linéaires spécifiques $\mathbb{A}$ qui remplissent des propriétés de symétrie très particulières qui permettent un phénomène de concentration conduisant à une explosion des modules de continuité.

Comme on peut le voir, lorsqu'on recherche un gain de régularité, le cas linéaire est très rigide car il n'est pas possible de contourner la condition (1.9). Mais, si l'on considère les équations *non linéaires* comme (1.7) où l'on a $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{[\theta]}$ alors, en exploitant des informations qui proviennent du cadre non linéaire, on pourra alléger la relation (1.9) dans le sens suivant :

Pour une donnée initiale θ_0 dans un espace de Lebesgue (aucune régularité n'est demandée pour les données initiales) et pour un terme de transport non linéaire $\mathbb{A}_{[\theta]}$ qui satisfait quelques hypothèses de continuité, on peut obtenir un *gain* de régularité pour les solutions $\theta(t,x)$ (en termes d'espaces de Hölder dans la variable d'espace) pour un degré de régularité α *plus petit que celui donné par la condition d'homogénéité linéaire (1.9).*

Un exemple particulier de cette situation est donné dans l'article [7] qui étudie l'équation (1.1) avec une donnée initiale $\theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{M}^{2,0}(\mathbb{R}^2)$. En suivant la relation (1.9) puisque $n = 2$ nous devrions avoir $\alpha = 2$, mais avec un traitement très (trop ?) subtil du terme non linéaire, il est montré que $\alpha = 1$ est suffisant pour obtenir un gain de régularité pour ces solutions. Notez que cela a été fait en deux étapes : il y a d'abord une procédure de "désingularisation" dans la variable spatiale qui permet de passe d'un cadre $L^\infty_t L^2_x$ à un cadre $L^\infty_t L^\infty_x$ et ensuite un gain de régularité Höldérien (dans la variable spatiale) est déduit pour un degré de régularité correspondant à $\alpha = 1$.

Un autre exemple a été discuté dans notre article [48] dans le cas sous-critique $\frac{5}{4} < \alpha < 2$ où il était possible de demander un peu moins de régularité sur le terme de transport que la condition de Morrey-Campanato (1.9). L'idée principale de cet article reposait sur la remarque que l'équation (1.7) admet un *principe maximum* en termes d'espaces de Lebesgue :

$$\|\theta(t,\cdot)\|_{L^p} \leq \|\theta_0\|_{L^p},$$

pour $2 \leq p < +\infty$, mais l'on dispose également d'une estimation d'énergie a priori donnée en termes d'espaces de Besov qui se lit comme suit :

$$\|\theta(\cdot,\cdot)\|_{L^p_t(\dot{B}^{\frac{\alpha}{p},p}_{p,x})} \leq C\|\theta_0\|_{L^p} \qquad \text{pour } 2 \leq p < +\infty, \tag{1.10}$$

ce qui nous fournit une information de régularité d'ordre $\frac{\alpha}{p}$ pour la solution faible θ et cette information peut également être récupérée pour le terme de transport non linéaire : en effet, dans le cadre de l'équation (1.7), en supposant des propriétés continuité pour le terme de transport $\mathbb{A}_{[\theta]}$ dans des espaces de Lebesgue (dans la variable t) et de Besov (dans la variable x) du type

$$\|\mathbb{A}_{[\theta]}(\cdot,\cdot)\|_{L^p_t(\dot{B}^{\frac{\alpha}{p},p}_{p,x})} \leq C\|\theta(\cdot,\cdot)\|_{L^p_t(\dot{B}^{\frac{\alpha}{p},p}_{p,x})},$$

et en couplant cette estimation avec le contrôle Besov précédent (1.10), il a été possible de *casser* la relation d'homogénéité (1.9) grâce à une interaction entre les propriétés de stabilité (continuité) du terme de transport dans les espaces de Morrey-Campanato et de Besov. Cependant, dans notre article [48] nous n'avons pu traiter que le cas sous-critique $\frac{5}{4} < \alpha < 2$.

Il est toutefois possible d'aller encore plus loin : en effet en utilisant *toutes* les informations a priori disponibles on peut obtenir un meilleur gain de régularité pour les solutions $\theta(t,x)$ de l'équation (1.7). Ce travail qui a été réalisé dans notre article [49], représente un condensé des méthodes développées dans nos travaux [47] et [48] et nous allons en donner les principales lignes dans les pages qui suivent.

1.3.1 Hypothèses

Afin d'énoncer nos théorèmes, nous devons être plus précis sur les objets qui définissent l'équation (1.7) car certaines propriétés de ces objets sont essentielles pour mener à bien nos calculs.

(A) L'opérateur de diffusion $\mathcal{L}^\alpha$.
L'opérateur de type Lévy $\mathcal{L}^\alpha$ qui apparaît dans l'équation (1.7) peut être considéré comme une généralisation assez naturelle du laplacien fractionnaire habituel $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$. En effet, pour $0 < \alpha < 2$ et pour une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ assez régulière, on peut définir l'opérateur $\mathcal{L}^\alpha$ dans la variable de Fourier par l'expression

$$\widehat{\mathcal{L}^\alpha\varphi}(\xi) = a(\xi)\widehat{\varphi}(\xi),$$

où le symbole a est de la forme $a(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \big(1-\cos(\xi\cdot y)\big)\pi(y)dy$, où π est une fonction symétrique, c'est-à-dire $\pi(y) = \pi(-y)$, satisfaisant pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_1|y|^{-n-\alpha} \leq &\pi(y) \leq \mathfrak{c}_2|y|^{-n-\alpha} \qquad \text{pour } |y| \leq 1,\\ 0 \leq &\pi(y) \leq \mathfrak{c}_2|y|^{-n-\alpha} \qquad \text{pour } |y| > 1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ici $0 < \mathfrak{c}_1 \leq \mathfrak{c}_2$ sont des constantes positives qui sont fixées une fois pour toutes. Le point important ici est que le paramètre α (appelé le degré de *régularité*) donne la puissance régularisante de l'opérateur $\mathcal{L}^\alpha$ dans le sens où pour un tel α, l'effet régularisant de $\mathcal{L}^\alpha$ est similaire au laplacien fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$. Voir [82] pour des propriétés supplémentaires concernant les opérateurs de Lévy.

(B) Le transport non linéaire $\mathbb{A}_{[\theta]}$.
Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$\mathbb{K}_i(\theta)(t,x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \kappa_i(x-y)\theta(t,y)dy,$$

où $\kappa_i = \kappa_i(x)$ est le noyau associé à un opérateur d'intégrale singulière $\mathbb{K}_i$ qui n'agit que dans la variable d'espace : dans la formule précédente la dépendance dans la variable de temps ne provient que de la solution $\theta(t,\cdot)$. On considère alors le vecteur

$$\mathbb{A}_{[\theta]}(t,x) = [\mathbb{K}_1(\theta), \cdots, \mathbb{K}_n(\theta)](t,x), \tag{1.12}$$

que l'on supposera à divergence nulle. Ces opérateurs $\mathbb{K}_i$ satisfont des propriétés de continuités qui sont explicitées ci-dessous.

(C) Continuité du terme de transport $\mathbb{A}_{[\theta]}$.
Nous précisons maintenant quelques propriétés du vecteur $\mathbb{A}_{[\theta]}$ donné dans (1.12) qui seront utiles par la suite :

- *Continuité dans les espaces de Lebesgue* : pour $1 < p < +\infty$ nous aurons besoin de la condition générale suivante

$$\|\mathbb{A}_{[\theta]}(t,\cdot)\|_{L^p} \leq C\|\theta(t,\cdot)\|_{L^p}. \tag{1.13}$$

  On notera que cette condition équivaut à demander l'hypothèse de continuité $\|\mathbb{K}_i(\theta)(t,\cdot)\|_{L^p} \leq C\|\theta(t,\cdot)\|_{L^p}$ pour tous les opérateurs $\mathbb{K}_i$.

- *Continuité dans les espaces de Besov* : nous étudions ici le caractère borné du terme de transport en termes d'espaces de Besov dans la variable spatiale. Ainsi pour $1 < p,q < +\infty$ et $0 < \sigma < 2$ nous supposerons la propriété de continuité suivante :

$$\|\mathbb{A}_{[\theta]}(t,\cdot)\|_{\dot{B}^{\sigma,p}_q} \leq C\|\theta(t,\cdot)\|_{\dot{B}^{\sigma,p}_q}, \tag{1.14}$$

  et nous supposerons également la propriété de permutation :

$$\|(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\mathbb{A}_{[\theta]}(t,\cdot)\|_{L^p} = \|\mathbb{A}_{[(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\theta]}(t,\cdot)\|_{L^p}, \tag{1.15}$$

  pour $1 < p < +\infty$ et $0 < \sigma < 2$.

Il convient de noter ici que tous les opérateurs de Calderón-Zygmund classiques (tels que les transformées de Riesz par exemple) satisfont ces conditions et qu'*aucune propriété régularisante n'est demandée* pour les opérateurs $\mathbb{K}_i$.

(D) La donnée initiale θ_0. Nous supposerons ici que la donnée initiale $\theta_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à tous les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \bar{\mathbf{p}} < +\infty$ où $\bar{\mathbf{p}}$ est fixé. Nous adopterons désormais la notation suivante :

$$1 \leq \mu = \max_{1\leq p\leq \bar{\mathbf{p}}} \|\theta_0\|_{L^p} < +\infty, \tag{1.16}$$

et la constante μ correspond à la *taille* des données initiales. On notera que nous avons considéré la borne inférieure $1 \leq \mu$ car nous ne voulons pas imposer d'hypothèse de petitesse sur les données initiales.

Dans le cadre donné par les hypothèses **(A)**-**(D)** nous pouvons maintenant énoncer nos résultats.

Nous présentons d'abord un résultat d'existence qui est crucial pour notre analyse mais qui est en quelque sorte assez standard, voir *e.g.* [47], [48] :

Théorème 1.3.1 (Cas non linéaire) *Soit $n \geq 2$. Sous les hypothèses* **(A)**-**(D)**, *pour tout $T > 0$ fixe, il existe une solution faible $\theta(t,x)$ à l'équation non linéaire* (1.7) *qui appartient à l'espace $L^\infty([0,T], L^p(\mathbb{R}^n)) \cap L^p([0,T], \dot{B}_p^{\frac{\alpha}{p},p}(\mathbb{R}^n))$ pour tout p tel que $\mathbf{2} \leq p \leq \bar{\mathbf{p}} < +\infty$.*

De plus, pour tout $0 < t \leq T$, on a le principe du maximum :

$$\|\theta(t,\cdot)\|_{L^p} \leq \|\theta_0\|_{L^p} \leq \mu, \tag{1.17}$$

et nous avons le contrôle a priori suivant

$$\|\theta\|_{L_t^p(\dot{B}_{p,x}^{\frac{\alpha}{p},p})} = \left(\int_0^T \|\theta(t,\cdot)\|^p_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha}{p},p}} dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|\theta_0\|_{L^p} \leq C\mu. \tag{1.18}$$

De plus, pour $\alpha = 1+\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, si l'indice d'intégrabilité limite $\bar{\mathbf{p}}$ est suffisamment grand, disons $\bar{\mathbf{p}} > \frac{n}{\varepsilon}$, il existe une unique solution faible satisfaisant les propriétés ci-dessus.

L'existence de telles solutions peut être obtenue par des arguments de compacité relativement classiques à travers une approche d'hyperviscosité combinée aux conditions de continuité (1.13) et (1.14) du terme de transport non linéaire. L'unicité est étudiée dans un deuxième temps et découle du fait que toute solution faible bénéficiant des propriétés ci-dessus peut être représentée par une formulation intégrale. On notera également que la restriction $\mathbf{2} \leq p$ est fondamentale pour obtenir le contrôle de la norme Besov (1.18) qui est l'un des principaux ingrédients de ce travail : en effet, cette information a priori de la norme Besov n'est plus disponible dans le cas $1 < p < 2$, voir le Théorème 1.2.2 ci-dessus et l'article [34]. Remarquons finalement que la régularité Besov donnée dans (1.18) est naturellement liée au degré de régularité α de l'opérateur de diffusion $\mathcal{L}^\alpha$ et à l'information L^p sur la donnée initiale : elle est maximale et égale à $\frac{\alpha}{2}$ quand $p = 2$ et s'annule si l'on fait $p \to +\infty$.

Avec le résultat précédent nous disposons du cadre de travail nécessaire pour présenter le théorème principal de ce chapitre (voir [49]).

Théorème 1.3.2 (Régularité Höldérienne) *Soit $n \geq 2$ et considérons sur $\mathbb{R}^n$ l'équation (1.7) où l'opérateur de diffusion $\mathcal{L}^\alpha$ satisfait la condition* **(A)** *avec $\alpha = 1+\varepsilon$ où $0 < \varepsilon \ll 1$. On supposera également que le terme de transport non linéaire $\mathbb{A}_{[\theta]}$ donné dans* **(B)** *vérifie l'hypothèse* **(C)** *et les données initiales θ_0 satisfont les conditions* **(D)**. *Soit θ une solution faible de l'équation* (1.7) *et qui appartient à l'espace $\displaystyle\bigcap_{\mathbf{2}\leq p\leq\bar{\mathbf{p}}} L^\infty([0,T], L^p(\mathbb{R}^n)) \cap L^p([0,T], \dot{B}_p^{\frac{\alpha}{p},p}(\mathbb{R}^n))$. Alors, il existe un temps $0 < T_0 < T$ tel que pour tout $t > T_0$ la solution $\theta(t,\cdot)$ appartient à l'espace de Hölder $\mathcal{C}^\gamma(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $0 < \gamma < 1$.*

Comme on peut le voir, lorsque $\alpha > 1$ et bien que les données initiales ne sont pas régulières, on peut obtenir un gain de régularité Höldérien pour les solutions faibles. Les principaux arguments utilisés pour prouver ce théorème sont les suivants : nous devons tout d'abord préparer les informations disponibles sur les solutions faibles, car à un moment donné, nous aurons besoin de passer d'un contrôle $L_t^p(\dot{B}_{p,x}^{\frac{\alpha}{p},p})$ donné par (1.18) à un contrôle du type

$L^\infty_t(\dot{B}^{\frac{\sigma}{p},p}_{p,x})$. Cette première étape n'est pas totalement triviale et le prix à payer pour obtenir un contrôle L^∞ dans la variable temps se voit dans la variable d'espace avec une perte de régularité (car on aura $\sigma < \alpha$) mais cette petite perte de régularité pourra être compensée grâce au degré de régularité $\alpha > 1$ considéré ici. Ensuite, avec ces informations L^∞-Besov, nous pouvons étudier l'évolution des solutions faibles du problème (1.7) via une équation duale (voir Section 1.3.4) et nous pourrons obtenir ainsi, par dualité, le gain de régularité recherché.

Remarquons que lorsque $\alpha \leq 1$ la perte de régularité observée dans la première étape pour obtenir l'information L^∞-Besov semble trop forte et nous pensons qu'une étape supplémentaire de préparation des informations est sans doute nécessaire pour étudier le cas $\alpha = 1$ ou le cas $\alpha < 1$, mais ces deux cas restent encore ouverts.

1.3.2 Estimations préliminaires pour le système non linéaire

Voici un premier résultat utile pour préparer les informations disponibles sur les solutions faibles.

Lemme 1.3.1 (Représentation intégrale des solutions faibles) *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1, soit une solution faible $\theta(t,x)$ de l'équation (1.7). Alors, on dispose de la représentation intégrale suivante*

$$\theta(t,x) = \mathfrak{p}^\alpha_t * \theta_0(x) + \int_0^t \mathfrak{p}^\alpha_{t-s} * \nabla \cdot (\mathbb{A}_{[\theta]}\, \theta(s,x))ds, \tag{1.19}$$

où $\mathfrak{p}^\alpha_t$ représente le noyau du semi-groupe associé à l'opérateur $\mathcal{L}^\alpha$.

Nous avons comme conséquence le résultat d'unicité suivant.

Proposition 1.3.1 *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1, pour $\alpha = 1+\varepsilon$ et si $\bar{\mathbf{p}} > \frac{n}{\varepsilon}$, alors il existe une unique solution θ de* (1.7) *dans* $\displaystyle\bigcap_{2\leq p\leq \bar{\mathbf{p}}} L^\infty([0,T], L^p(\mathbb{R}^n)) \cap L^p([0,T], \dot{B}^{\frac{\alpha}{p},p}_p(\mathbb{R}^n))$.

La preuve de cette proposition découle d'un bon contrôle de la quantité $L^p([0,T], \dot{B}^{\frac{\alpha}{p},p}_p(\mathbb{R}^n))$ qui permet d'utiliser le lemme de Grönwall. Pour les détails, on pourra consulter [49].

Un deuxième résultat préliminaire est donné dans la proposition qui suit.

Proposition 1.3.2 (De $L^\infty_t(L^p_x)$ à $L^\infty_t(L^1_x)$) *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1, si θ est une solution faible de l'équation non linéaire* (1.7), *alors cette solution faible appartient à l'espace $L^\infty([0,T], L^1(\mathbb{R}^n))$ et donc par interpolation, elle appartient aux espaces $L^\infty([0,T], L^p(\mathbb{R}^n))$ avec $1 < p < \bar{\mathbf{p}}$ et où $0 < T < +\infty$.*

La preuve repose essentiellement sur la formulation intégrale (1.19). On notera en particulier que si $1 < p < 2$, alors par interpolation, pour un paramètre $0 < \nu < 1$ tel que $\frac{1}{p} = 1 - \frac{\nu}{2}$ nous pouvons établir le contrôle suivant ;

$$\|\theta\|_{L^\infty_t(L^p_x)} \leq \|\theta\|^{1-\nu}_{L^\infty_t(L^1_x)} \|\theta\|^{\nu}_{L^\infty_t(L^2_x)} \leq C\big(\|\theta_0\|_{L^1} + \|\theta_0\|^2_{L^2}\big)^{1-\nu} \|\theta_0\|^{\nu}_{L^2}. \tag{1.20}$$

Dans le résultat suivant nous montrerons comment obtenir un petit gain de régularité pour les solutions faibles.

Proposition 1.3.3 *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.1, soit $\theta(t,x)$ une solution faible de l'équation non linéaire (1.7). Alors cette solution faible appartient à l'espace fonctionnel*[1] $L^\infty([1,N],\dot{W}^{\frac{\sigma_0}{2},p_0}(\mathbb{R}^n))$ *où* $1<p_0<2$, *avec* $N\geq 10$ *et*

$$\sigma_0 = 1+3\varepsilon = \alpha+2\varepsilon \leq 2\alpha. \tag{1.21}$$

De plus nous avons l'estimation

$$\|\theta\|_{L^\infty_t(\dot{W}_x^{\frac{\sigma_0}{2},p_0})} \leq C\Big(\|\theta_0\|_{L^{p_0\prime}}\|\theta_0\|_{L^2} + \big(\|\theta_0\|_{L^1}+\|\theta_0\|_{L^2}^2\big)^{1-\nu}\|\theta_0\|_{L^2}^\nu\Big) < +\infty,$$

pour un paramètre d'interpolation $0<\nu<1$ *tel que* $\frac{1}{p_0}=1-\frac{\nu}{2}$.

Preuve. Nous introduisons une fonction de coupure positive et régulière dans la variable temporelle $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(s)\equiv 0$ sur $[0,\frac{1}{2}]\cap[N+1,+\infty[$, telle que $\phi(s)\equiv 1$ sur $[1,N]$ et telle que $\|\phi\|_{L^\infty}=1$ et on définit pour $(t,x)\in\mathbb{R}^3_+\times\mathbb{R}^n$, la fonction

$$u(t,x)=\phi(t)\theta(t,x).$$

On notera que les fonctions $u(t,x)$ et $\theta(t,x)$ coïncident si $1\leq t\leq N$ et de plus u satisfait l'équation suivante

$$\begin{cases}\partial_t u - \nabla\cdot(\mathbb{A}_{[\theta]}\, u) + \mathcal{L}^\alpha u - (\partial_t\phi)\theta = 0, \qquad div(\mathbb{A}_{[\theta]})=0, \qquad 0<\alpha<2,\\ u(t,x)=0, \quad t\in[0,\frac{1}{2}].\end{cases}$$

De la même manière que pour le Lemme 1.3.1, et en rappelant que $(\mathfrak{p}^\alpha)_{t\geq 0}$ représente le noyau du semi-groupe associé à l'opérateur $\mathcal{L}^\alpha$, il en ressort de la formule de représentation de Duhamel que pour tout $t_0\in[0,\frac{1}{2}]$ on a :

$$u(t,x)=\int_{t_0}^t \mathfrak{p}^\alpha_{t-s}*\nabla\cdot(\mathbb{A}_{[\theta]}\,\theta(s,x)\phi(s))ds + \int_{t_0}^t \mathfrak{p}^\alpha_{t-s}*\theta(s,x)\partial_s\phi(s)ds.$$

Il s'agit maintenant d'étudier, pour un $1<t<N$ fixe, la norme de Sobolev $\dot{W}^{\frac{\sigma_0}{2},p_0}$ dans la variable spatiale de la fonction $u(t,\cdot)$ où σ_0 satisfait (1.21) et où le paramètre p_0 satisfait $1<p_0<2$. En effet, écrivons d'abord pour t et t_0 fixes :

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot)\|_{\dot{W}^{\frac{\sigma_0}{2},p_0}} &\leq \left\|\int_{t_0}^t (-\Delta)^{\frac{\sigma_0}{4}}\mathfrak{p}^\alpha_{t-s}*\nabla\cdot(\mathbb{A}_{[\theta]}\,\theta(s,\cdot)\phi(s))ds\right\|_{L^{p_0}}\\ &+\left\|\int_{t_0}^t (-\Delta)^{\frac{\sigma_0}{4}}\mathfrak{p}^\alpha_{t-s}*\theta(s,\cdot)\partial_s\phi(s)ds\right\|_{L^{p_0}}.\end{aligned}$$

Ensuite on intègre par rapport à $t_0\in[0,\frac{1}{2}]$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\|u(t,\cdot)\|^2_{\dot{W}^{\frac{\sigma_0}{2},p_0}}dt_0\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left\|\int_\cdot^t (-\Delta)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{p}^\alpha_{t-s}*(-\Delta)^{\frac{\sigma_0}{4}}(\mathbb{A}_{[\theta]}\,\theta(s,\cdot)\phi(s))ds\right\|_{L^2_{t_0}(L^{p_0}_x)}\\ &+\left\|\int_\cdot^t (-\Delta)^{\frac{\sigma_0}{4}}\mathfrak{p}^\alpha_{t-s}*\theta(s,\cdot)\partial_s\phi(s)ds\right\|_{L^2_{t_0}(L^{p_0}_x)}.\end{aligned}$$

1. L'espace $\dot{W}^{\frac{\sigma_0}{2},p_0}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Sobolev homogène usuel.

A partir de ce point, par les inégalité de régularité maximales pour les noyaux fractionnaires on obtient :

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \|u(t,\cdot)\|^2_{\dot{W}^{\frac{\sigma_0}{2},p_0}} dt_0\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\Big(\underbrace{\left\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}(\mathbb{A}_{[\theta]}\,\theta\phi)\right\|_{L^2_{t_0}(L^{p_0}_x)}}_{E_1} + \underbrace{\|\theta\partial_s\phi\|_{L^2_{t_0}(L^{p_0}_x)}}_{E_2}\Big). \quad (1.22)$$

En utilisant pour le premier terme les inégalités de Kato-Ponce (connues également comme la règle de Leibniz fractionnaire, voir [76]) on obtient :

$$E_1 \quad \leq \quad C\|\phi\|_{L^\infty}\Big(\left\|\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\mathbb{A}_{[\theta]}\|_{L^2_x}\right\|_{L^2_{t_0}}\|\theta\|_{L^\infty_t L^{p_0\prime}_x} + \left\|\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\theta\|_{L^2_x}\right\|_{L^2_{t_0}}\|\mathbb{A}_{[\theta]}\|_{L^\infty_t L^{p_0\prime}_x}\Big),$$

ce qui nous permet d'écrire (en utilisant (1.15)-(1.13) et (1.17))

$$E_1 \leq C\|\theta\|_{L^\infty_t(L^{p_0\prime}_x)}\left\|\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\theta\|_{L^2_x}\right\|_{L^2_{t_0}} = C\|\theta\|_{L^\infty_t(L^{p_0\prime}_x)}\|\theta\|_{L^2_t(\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}_x)}.$$

Par le principe du maximum (1.17) car $p_0' > 2$ on obtient

$$\|\theta\|_{L^\infty_t(L^{p_0\prime}_x)} \leq C\|\theta_0\|_{L^{p_0\prime}},$$

et par l'inégalité a priori (1.18) avec $p = 2$ (puisqu'on a l'identification $\dot{B}^{\frac{\alpha}{2},2}_2(\mathbb{R}^n) = \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^n)$)

$$\|\theta\|_{L^2_t(\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}_x)} \leq \|\theta_0\|_{L^2},$$

nous avons

$$E_1 \leq C\|\theta_0\|_{L^{p_0\prime}}\|\theta_0\|_{L^2}.$$

Le terme E_2 de (1.22) est plus facile à étudier car $1 < p_0 < 2$ et par l'expression (1.20) ci-dessus on a :

$$E_2 \leq C\|\theta\|_{L^\infty_t(L^{p_0}_x)}\|\partial_s\phi\|_{L^2_t} \leq C\big(\|\theta_0\|_{L^1} + \|\theta_0\|^2_{L^2}\big)^{1-\nu}\|\theta_0\|^\nu_{L^2}.$$

mais puisque u et θ coïncident sur l'intervalle $[1, N]$, nous avons $\theta \in L^\infty([1,N], \dot{W}^{\frac{\sigma_0}{2},p_0})$ et il vient alors

$$\|\theta(t,\cdot)\|_{\dot{W}^{\frac{\sigma_0}{2},p_0}} \leq C\Big(\|\theta_0\|_{L^{p_0\prime}}\|\theta_0\|_{L^2} + \big(\|\theta_0\|_{L^1} + \|\theta_0\|^2_{L^2}\big)^{1-\nu}\|\theta_0\|^\nu_{L^2}\Big) < +\infty,$$

ce qui termine la démonstration de la Proposition 1.3.3 ■

Ce premier résultat de régularité sera fondamental par la suite comme on pourra le voir dans la Remarque 1.3.5 ci-dessous.

1.3.3 Régularité Hölderienne

Pour étudier la régularité Höldérienne d'une solution $\theta(t,x)$ de l'équation (1.7), nous utiliserons le fait que l'espace dual des espaces de Hardy $h^{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^n)$ est précisément [2] les espaces de Hölder $\mathcal{C}^\gamma(\mathbb{R}^n)$. En effet, soit $\frac{n}{n+1} < \mathfrak{s} < 1$ et fixons γ par la relation

$$0 < \gamma = n(\frac{1}{\mathfrak{s}} - 1) < 1, \quad (1.23)$$

2. Voir [75] pour une preuve de ce fait et voir [58] et [112] pour un traitement détaillé des espaces de Hardy.

alors l'espace dual de l'espace Hardy local $h^{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hölder $\mathcal{C}^\gamma(\mathbb{R}^n)$, *i.e.* on a l'identification $(h^{\mathfrak{s}})' \simeq \mathcal{C}^\gamma$. On rappelle maintenant que l'espace de Hardy local $h^{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions f qui admettent une décomposition *moléculaire* de la forme $f = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j \psi_j$, où $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres telle que $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j|^{\mathfrak{s}} < +\infty$ et $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille de molécules donnée par la définition suivante.

Définition 1.3.1 *Soit* $\frac{n}{n+1} < \mathfrak{s} < 1$, *et soit* γ *fixé par la condition (1.23). Soit un nombre réel* ω *tel que* $0 < \gamma < \omega < 1$ *et considérons un paramètre réel* $\zeta > 0$. *Pour* $0 < r \ll 1$, *nous dirons qu'une fonction intégrable* ψ *est une* petite molécule *de centre* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *et de* taille ζr *si l'on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)||x - x_0|^\omega dx \leq (\zeta r)^{\omega-\gamma}, \text{ pour } x_0 \in \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad \|\psi\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(\zeta r)^{n+\gamma}} \tag{1.24}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0. \tag{1.25}$$

Dans le cas où $1 \leq \zeta r < +\infty$ *(c'est-à-dire pour les grandes molécules), nous n'avons besoin que des conditions (1.24) tandis que la condition de moment (1.25) est abandonnée.*

Remarque 1.3.1 *Avec l'identification* $(h^{\mathfrak{s}})' \simeq \mathcal{C}^\gamma$ *et en utilisant la décomposition moléculaire des espaces de Hardy, le fait que* $\theta \in \mathcal{C}^\gamma$ *équivaut au fait que* $|\langle \theta, \psi\rangle_{\mathcal{C}^\gamma \times h^{\mathfrak{s}}}| < +\infty$ *pour toute molécule* ψ.

Remarque 1.3.2 *Le paramètre technique* ω *satisfait les inégalités* $0 < \gamma < \omega$ *et donne ainsi un seuil maximal pour la régularité Hölderienne* γ. *Nous supposerons toujours que nous avons*

$$0 < \gamma < \omega < 1 < \alpha = 1 + \varepsilon,$$

où α *est le degré de régularité associé à l'opérateur de diffusion* $\mathcal{L}^\alpha$. *Ces inégalités reflètent le fait qu'il n'est pas possible d'obtenir (par la méthode présentée ici) un premier gain de régularité avec un indice de Hölder* γ *supérieur au degré* α.

Remarque 1.3.3 *Les conditions (1.24) impliquent l'estimation* $\|\psi\|_{L^1} \leq C\,(\zeta r)^{-\gamma}$ *(voir par exemple la Section 4.1 dans [47]). Ainsi, chaque molécule appartient à* $L^q(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 < q < +\infty$ *puisque nous avons*

$$\|\psi\|_{L^q} \leq C(\zeta r)^{-n+\frac{n}{q}-\gamma}. \tag{1.26}$$

Rappelons également que la classe Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *est dense en* $h^{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^n)$, *ce fait est bien sûr très utile pour des procédures d'approximation.*

Nous nous référons à [47] pour des remarques supplémentaires sur cette définition. Voir aussi [112, Chapitre III, §5.7], [116, Chapitre XIV, §6.6] ou l'article [87].

1.3.4 L'équation duale

Une fois que nous avons décrit les éléments des espaces de Hardy, nous allons dériver une équation duale du problème original (1.7), et pour cela nous procédons comme suit. Pour $\mathcal{L}^\alpha$ avec $\alpha = 1 + \varepsilon$ un opérateur de type Lévy satisfaisant l'hypothèse **(A)**, pour un terme de transport non linéaire $\mathbb{A}_{[\theta]}$ donné par **(B)** et satisfaisant l'hypothèse **(C)** et pour une donnée initiale θ_0 satisfaisant **(D)**, il résulte du Théorème 1.3.1 que l'on peut construire sur l'intervalle $[0, T]$, avec $0 < T < +\infty$ fixé, une solution faible correspondante $\theta(\cdot, \cdot) \in L^\infty\big([0, T], L^p(\mathbb{R}^n)\big) \cap L^p([0, T], \dot{B}^{\frac{\alpha}{p},p}_p(\mathbb{R}^n))$ à (1.7) qui satisfait les inégalités (1.17) et

(1.18).

Fixons maintenant un temps $t > 0$ tel que $2 < t \leq N$ avec N assez grand (disons $N \geq 10$, voir la Proposition 1.3.3), considérons ψ_0 une molécule au sens de la Définition 1.3.1 et considérons une deuxième variable temporelle s telle que $0 \leq s \leq t$. Le choix $t > 2$ est ici arbitraire et répond à un souci de simplicité. Avec tous ces objets, à chaque molécule ψ_0 on peut associer la *équation duale linéaire* suivante

$$\begin{cases} \partial_s \psi(s,x) + \nabla \cdot [\mathbb{A}_{[\theta]}(t-s,x)\psi(s,x)] + \mathcal{L}^\alpha \psi(s,x) = 0, & s \in [0,t], \\ \psi(0,x) = \psi_0(x). \end{cases} \tag{1.27}$$

Cette équation partage de nombreuses caractéristiques communes avec l'équation non linéaire (1.7). Cependant, comme nous sommes dans un cadre linéaire, certaines particularités doivent être prises en compte. Nous exposons ci-dessous les principaux résultats nécessaires pour la suite de notre exposé (les preuves sont données [47] et [48]).

Proposition 1.3.4 (Existence) *Soit $n \geq 2$. Si $\psi_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ est une donnée initiale, sous les hypothèses* **(A)-(D)**, *il existe une solution faible $\psi(s,x)$ à l'équation* (1.27) *dans $L^\infty([0,t], L^q(\mathbb{R}^n))$ avec $1 \leq q \leq +\infty$.*

Proposition 1.3.5 (Principe du maximum et information Besov) *Dans le cadre de la Proposition 1.3.4, les solutions faibles de l'équation (1.27) satisfont le principe maximum suivant pour $s \in [0,t]$:*

$$\|\psi(s,\cdot)\|_{L^q} \leq \|\psi_0\|_{L^q} \qquad \text{avec} \quad 1 \leq q \leq +\infty, \tag{1.28}$$

et de plus nous avons également le contrôle a priori de Besov suivant pour $2 \leq q < +\infty$:

$$\|\psi\|_{L^q_t(\dot{B}^{\frac{\alpha}{q},q}_{q,x})} \leq C\|\psi_0\|_{L^q}. \tag{1.29}$$

Proposition 1.3.6 (Principe de positivité) *Soit $\psi_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ une donnée initiale telle que $0 \leq \psi_0 \leq M$ p.p. où $M > 0$ est une constante. Alors la solution faible de l'équation (1.27) satisfait $0 \leq \psi(s,x) \leq M$ pour tout $s \in [0,t]$.*

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant (emprunté à [87]) qui est crucial pour prouver le Théorème 1.3.2 en utilisant la dualité Hardy-Hölder.

Proposition 1.3.7 (Propriété de Transfert) *Dans le cadre des hypothèses* **(A)-(D)**, *soit θ_0 une donnée initiale et soit $\theta(t,x)$ une solution faible de l'équation (1.7) dans l'intervalle $[0,T]$. Soit $2 < t \leq N$ et soit $\psi(s,x)$ une solution avec une donnée moléculaire initiale ψ_0 du problème rétrograde (1.27) pour $0 \leq s \leq t$. Nous avons alors l'identité*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta(t,x)\psi(0,x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \theta\,(t-s,x)\,\psi\,(s,x)\,dx. \tag{1.30}$$

Cette identité sera fondamentale pour obtenir le gain de régularité pour les solutions faibles de l'équation (1.7).

1.3.5 Preuve du Théorème 1.3.2.

Nous voulons établir la régularité Höldérienne pour les solutions θ de l'équation non linéaire (1.7) et suite à la Remarque 1.3.1 nous devons prouver que le crochet de dualité $|\langle\theta(t,\cdot),\psi_0(\cdot)\rangle_{\mathcal{C}^\lambda\times h^s}|$ est fini pour toute molécule ψ_0. Alors par la propriété de transfert donnée dans la proposition ci-dessus nous avons l'identité

$$\langle\theta(t,\cdot),\psi_0(\cdot)\rangle_{\mathcal{C}^\lambda\times h^s}=\langle\theta(t-s,\cdot),\psi(s,\cdot)\rangle_{L^p\times L^{p'}},$$

qui transforme un crochet de dualité Hölder-Hardy en une crochet de dualité purement Lebesgue avec $\mathbf{2}\leq p\leq\bar{\mathbf{p}}$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. En appliquant le principe du maximum (1.17) et en utilisant l'hypothèse **(D)** dans l'identité précédente on peut déduire les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}|\langle\theta(t,\cdot),\psi_0(\cdot)\rangle_{\mathcal{C}^\lambda\times h^s}| &\leq \|\theta(t-s,\cdot)\|_{L^p}\|\psi(s,\cdot)\|_{L^{p'}}\\ &\leq \|\theta_0\|_{L^p}\|\psi(s,\cdot)\|_{L^{p'}}\leq\mu\|\psi(s,\cdot)\|_{L^{p'}},\end{aligned}\tag{1.31}$$

où μ est donné dans (1.16). Ainsi, pour prouver le Théorème 1.3.2, il suffit d'estimer la quantité $\|\psi(s,\cdot)\|_{L^{p'}}$ qui provient d'une donnée moléculaire initiale ψ_0.

Maintenant, grâce au principe du maximum (appliqué cette fois à $\psi(s,x)$) nous pouvons diviser notre preuve en deux étapes en suivant la taille de la molécule. En effet, pour les *grandes* molécules, *i.e.* si $\zeta r\geq C$, on a par (1.26) l'inégalité

$$\|\psi(s,\cdot)\|_{L^{p'}}\leq\|\psi_0\|_{L^{p'}}\leq C(\zeta r)^{-n+\frac{n}{p'}-\gamma}<+\infty,\tag{1.32}$$

qui est immédiatement bornée. Il ne reste plus qu'à étudier le contrôle $L^{p'}$ pour les *petites* molécules et cela sera réalisé dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 *Sous les hypothèses du Théorème 1.3.2, soit ψ_0 une petite molécule et considérons $\psi(s,\cdot)$ la solution associée du problème inverse (1.27). Pour tout temps $0<\mathcal{T}_0<1$ nous avons le contrôle suivant de la norme $L^{p'}$ de $\psi(s,\cdot)$:*

$$\|\psi(s,\cdot)\|_{L^{p'}}\leq C\mathcal{T}_0^{-n+\frac{n}{p'}-\gamma},\mathcal{T}_0\leq s\leq t-2,\tag{1.33}$$

où $0<\gamma<\alpha$ et où $C>0$ est une constante positive (indépendante de la molécule et du temps $\mathcal{T}_0$ choisi).

Preuve du Théorème 1.3.2. En acceptant pour un moment le Théorème 1.3.3 précédent, on a alors un bon contrôle sur la quantité $\|\psi(s,\cdot)\|_{L^{p'}}$ pour les *grandes* et les *petites* molécules et en revenant à (1.31) on obtient que le crochet de dualité $|\langle\theta(t,\cdot),\psi_0\rangle_{\mathcal{C}^\gamma\times h^s}|$ est toujours borné pour toute molécule ψ_0. Cela prouve le Théorème 1.3.2 par dualité et donc les solutions $\theta(t,x)$ de l'équation non linéaire (1.7) sont γ-Hölder régulières. ■

Remarque 1.3.4 *Les contrôles (1.32) et (1.33) reflètent un gain γ-höldérien de régularité des solutions $\theta(t,\cdot)$ de l'équation (1.7), cependant ce gain n'est pas instantané et il faut être séparé de l'origine pour obtenir le résultat souhaité.*

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 1.3.3 en deux étapes. Tout d'abord, dans la Section 1.3.6 nous étudions l'évolution du profil des solutions ψ de l'équation duale (1.27) puis dans la Section 1.3.7 par une itération appropriée nous obtiendrons la limite uniforme (1.33).

1.3.6 Evolution des Molécules

Le théorème suivant montre comment les molécules se déforment avec l'évolution de l'équation duale/linéaire (1.27) au temps $0 < s_0 \ll 1$.

Théorème 1.3.4 *Soit ψ_0 une petite molécule au sens de la Définition 1.3.1 pour l'espace de Hardy local $h^{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^n)$ où $\frac{n}{n+1} < \mathfrak{s} < 1$ et soit $\psi(s_0, x)$ une solution à l'instant s_0 du problème (1.27) associé à ces données moléculaires initiales ψ_0.*

Alors il existe des constantes positives K et $\mathfrak{e}$ suffisamment petites telles que pour tout temps $0 < s_0 \leq \mathfrak{e} r^\alpha$, nous avons les estimations suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(s_0, x)||x - x(s_0)|^\omega dx \leq \big((\zeta r)^\alpha + K s_0\big)^{\frac{\omega-\gamma}{\alpha}}, \tag{1.34}$$

$$\|\psi(s_0, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\big((\zeta r)^\alpha + K s_0\big)^{\frac{n+\gamma}{\alpha}}}, \tag{1.35}$$

$$\|\psi(s_0, \cdot)\|_{L^1} \leq \frac{2 v_n^{\frac{\omega}{n+\omega}}}{\big((\zeta r)^\alpha + K s_0\big)^{\frac{\gamma}{\alpha}}}, \tag{1.36}$$

où γ est défini dans (1.23), ω est le paramètre technique donné dans la Définition 1.3.1, $\alpha = 1 + \varepsilon$ est le degré de régularité de l'opérateur de diffusion $\mathcal{L}^\alpha$ et v_n désigne le volume de la boule unité.

Le centre de la nouvelle molécule $x(s_0)$ utilisé dans la formule (1.34) est donné par l'évolution du système différentiel

$$\begin{cases} x'(s) &= \bar{\mathbb{A}}_{[\theta]}(t - s, x(s)) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{A}_{[\theta]}(t - s, x(s) - y)\varphi_{\rho_0}(y)dy, \quad s \in [0, s_0], \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{1.37}$$

où $\varphi_{\rho_0}(x) = \frac{1}{\rho_0^n}\varphi\big(\frac{x}{\rho_0}\big)$ (rappelons que $\mathbb{A}_{[\theta]}$ est donné dans (1.12)). Ici φ est une fonction positive dans $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que supp$(\varphi) \subset B(0, 1)$ avec $\rho_0 = \zeta r \ll 1$.

Démonstration du Théorème 1.3.4. Nous adopterons la stratégie suivante : nous étudions d'abord la condition de Concentration (1.34) puis nous prouvons la condition de Hauteur (1.35). Avec ces deux conditions réunies, on pourra déduire l'estimation L^1 (1.36) sans problèmes.

Condition de concentration

Pour établir l'estimation (1.34), nous introduisons pour $s \in [0, s_0]$ la fonction $\Omega_s(x) = |x - x(s)|^\omega$. Pour une donnée initiale moléculaire ψ_0 on écrit $\psi_0(x) = \psi_{0,+}(x) - \psi_{0,-}(x)$ où les fonctions $\psi_{0,\pm}(x) \geq 0$ ont un support disjoint et on note $\psi_\pm(s_0, x)$ deux solutions de l'équation (1.27) à l'instant s_0 avec $\psi_\pm(0, x) = \psi_{0,\pm}(x)$.

Le point de départ de notre étude est le suivant : pour tout $s \in [0, s_0]$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(s_0, x)|\Omega_{s_0}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_0(x)|\Omega_0(x)dx + \int_0^{s_0} \partial_s \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(s, x)|\Omega_s(x)dx\right) ds,$$

maintenant par le principe de positivité énoncé dans la Proposition 1.3.6 nous avons $\psi_\pm(s_0,x)\geq 0$, alors

$$|\psi(s_0,x)| = |\psi_+(s_0,x)-\psi_-(s_0,x)| \leq \psi_+(s_0,x)+\psi_-(s_0,x),$$

et on écrit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(s_0,x)|\Omega_{s_0}(x)dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_0(x)|\Omega_0(x)dx \\ &+ \int_0^{s_0}\left|\partial_s\int_{\mathbb{R}^n}\psi_+(s,x)\Omega_s(x)dx\right|ds + \int_0^{s_0}\left|\partial_s\int_{\mathbb{R}^n}\psi_-(s,x)\Omega_s(x)dx\right|ds.\end{aligned}$$

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que nous avons

$$\int_0^{s_0}\left|\partial_s\int_{\mathbb{R}^n}\psi_-(s,x)\Omega_s(x)dx\right|ds \leq \int_0^{s_0}\left|\partial_s\int_{\mathbb{R}^n}\psi_+(s,x)\Omega_s(x)dx\right|ds, \tag{1.38}$$

et pour la suite de la preuve nous nous concentrerons sur le dernier terme ci-dessus. Puisque $\psi_+(s,\cdot)$ est la solution de l'équation linéaire correspondante (1.27) avec les données initiales $\psi_{0,+}(x)$, pour $s\in[0,s_0]$ on peut écrire

$$\begin{aligned}I_s &:= \left|\partial_s\int_{\mathbb{R}^n}\psi_+(s,x)\Omega_s(x)dx\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\Big(-\nabla\cdot\big(\mathbb{A}_{[\theta]}(t-s,x)\,\psi_+(s,x)\big)-\mathcal{L}^\alpha\psi_+(s,x)\Big)\Omega_s(x)+\psi_+(s,x)\partial_s\Omega_s(x)dx\right|,\end{aligned}$$

en rappelant que $\Omega_s(x)=|x-x(s)|^\omega$ et en réorganisant les termes précédents que nous avons

$$=\left|\int_{\mathbb{R}^n}-\nabla\Omega_s(x)\cdot x'(s)\psi_+(s,x)-\Omega_s(x)\nabla\cdot\big(\mathbb{A}_{[\theta]}(t-s,x)\,\psi_+(s,x)\big)-\Omega_s(x)\mathcal{L}^\alpha\psi_+(s,x)dx\right|.$$

Par une intégration par parties dans le deuxième terme ci-dessus et puisque l'opérateur $\mathcal{L}^\alpha$ est symétrique on a

$$\begin{aligned}I_s &= \left|\int_{\mathbb{R}^n}-\nabla\Omega_s(x)\cdot x'(s)\psi_+(s,x)+\nabla\Omega_s(x)\cdot\mathbb{A}_{[\theta]}(t-s,x)\psi_+(s,x)-\mathcal{L}^\alpha\Omega_s(x)\psi_+(s,x)dx\right| \\ &\leq \left|\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\Omega_s(x)\cdot\Big(\mathbb{A}_{[\theta]}(t-s,x)-x'(s)\Big)\psi_+(s,x)dx\right|+\left|\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{L}^\alpha\Omega_s(x)\psi_+(s,x)dx\right| \\ &\leq I_{s,1}+I_{s,2},\end{aligned}$$

et on obtient

$$\int_0^{s_0}I_sds\leq\int_0^{s_0}I_{s,1}ds+\int_0^{s_0}I_{s,2}ds. \tag{1.39}$$

Proposition 1.3.8 *Pour le terme* $\int_0^{s_0}I_{s,1}ds$*, nous avons*

$$\int_0^{s_0}I_{s,1}ds\leq\Theta_1\,r^{\omega-\gamma-\alpha}\times s_0,$$

où Θ_1 *est une constante qui peut être rendue petite.*

Preuve de la Proposition 1.3.8. Avec $\rho_0 = \zeta r \ll 1$, on considère la décomposition $\mathbb{R}^n = B_{\rho_0} \cup \bigcup_{k\geq 1} E_k$ où

$$\begin{aligned} B_{\rho_0} &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x(s)| \leq \rho_0\} \quad \text{et} \\ E_k &= \{x \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1}\rho_0 < |x - x(s)| \leq 2^k \rho_0\}, \qquad \text{pour } k \geq 1. \end{aligned} \tag{1.40}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} I_{s,1} \leq & \underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\mathbb{1}_{B_{\rho_0}} \nabla\Omega_s(x) \cdot \left(\mathbb{A}_{[\theta]}(t-s,x) - \bar{\mathbb{A}}_{[\theta]}(t-s,\cdot) \right) \right) \psi_+(s,x)dx \right|}_{I_{s,B_{\rho_0}}} \\ + & \underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{E_{k,s}} \nabla\Omega_s(x) \cdot \left(\mathbb{A}_{[\theta]}(t-s,x) - \bar{\mathbb{A}}_{[\theta]}(t-s,\cdot) \right) \right) \psi_+(s,x)dx \right|}_{I_{s,E}}, \end{aligned}$$

en rappelant (1.37) pour la dernière inégalité. Nous avons alors

$$\int_0^{s_0} I_{s,1} ds \leq \int_0^{s_0} I_{s,B_{\rho_0}} ds + \int_0^{s_0} I_{s,E} ds. \tag{1.41}$$

Lemme 1.3.2 (De Lebesgue à Besov) *On a les estimations suivantes sur les ensembles B_{ρ_0} et E_k, avec $k \geq 1$, définis dans l'expression (1.40) :*

$$\left\| \mathbb{A}_{[\theta]}(t-s,\cdot) - \bar{\mathbb{A}}_{[\theta]}(t-s,\cdot) \right\|_{L^p(B_{\rho_0})} \leq C\rho_0^{\frac{\sigma}{p}} \|\mathbb{A}_{[\theta]}(t-s,\cdot)\|_{\dot{B}_p^{\frac{\sigma}{p},p}} \tag{1.42}$$

$$\|\mathbb{A}_{[\theta]}(t-s,\cdot) - \bar{\mathbb{A}}_{[\theta]}(t-s,\cdot)\|_{L^p(E_k)} \leq C(2^k\rho_0)^{\frac{\sigma}{p}} (2^k)^{\frac{n}{p}} \|\mathbb{A}_{[\theta]}(t-s,\cdot)\|_{\dot{B}_p^{\frac{\sigma}{p},p}}, \tag{1.43}$$

pour un indice de régularité $0 < \sigma$.

La preuve de ce résultat est donnée dans le Lemme 4.1 de notre article [48].

Remarque 1.3.5 *En prenant la norme L^∞ dans les contrôles (1.42) et (1.43) nous pourrons mener à bien tous les calculs nécessaires. C'est donc ici que nous aurons besoin de la Proposition 1.3.3 qui nous fournit les estimations L^∞-Besov indispensables pour la suite et qui correspondent aux termes de droite ci-dessus.*

Avec ce lemme, nous pouvons estimer chaque terme de (1.41) de la manière suivante :

Lemme 1.3.3 (Contrôle sur les boules B_{ρ_0}) *Nous avons*

$$\int_0^{s_0} I_{s,B_{\rho_0}} ds \leq \Theta_{1,1}\, r^{\omega-\gamma-\alpha} \times s_0, \tag{1.44}$$

où la quantité technique $\Theta_{1,1}$ peut être rendue très petite.

Lemme 1.3.4 (Contrôles sur les couronnes $\bigcup_{k\geq 1} E_k$) *Nous avons*

$$\int_0^{s_0} I_{s,E} ds \leq \Theta_{1,2}\, r^{\omega-\gamma-\alpha} \times s_0,$$

où la quantité technique $\Theta_{1,2}$ peut être rendue petite.

La preuve de ces lemmes techniques peut se consulter dans notre article [49].

A partir des estimations des Lemmes 1.3.3 et 1.3.4 on déduit alors :

$$\int_0^{s_0} I_{s,1}ds \leq \int_0^{s_0} I_{s,B} + I_{s,E}\, ds \leq (\Theta_{1,1} + \Theta_{1,2}) \times r^{\omega-\gamma-\alpha} \times s_0,$$

et en définissant $\Theta_1 := \Theta_{1,1} + \Theta_{1,2} \ll 1$, ceci termine la preuve de la Proposition 1.3.8. ■

Pour continuer, on remarque maintenant que la contribution $I_{s,2}$ dans (1.39) dépend uniquement de l'opérateur $\mathcal{L}^\alpha$. Plus précisément, on obtient :

Proposition 1.3.9 *Pour la deuxième intégrale* $\displaystyle\int_0^{s_0} I_{s,2}ds$ *dans (1.39), nous avons :*

$$\int_0^{s_0} I_{s,2}ds \leq \Theta_2 \times r^{\omega-\gamma-\alpha} \times s_0,$$

où Θ_2 *est telle que la quantité* $\frac{\Theta_2(\zeta)}{\zeta^{\omega-\gamma-\alpha}}$ *peut être rendue petite lorsque* ζ *est suffisamment grand.*

Il suffit de suivre essentiellement les mêmes idées utilisées pour la Proposition 1.3.8 avec des modifications mineures qui rendent les calculs beaucoup plus faciles. Voir les détails dans l'article [49].

On termine maintenant la preuve de l'évolution de la condition de concentration (1.34). Ainsi, à partir de l'équation (1.38) on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(s_0,x)|\Omega_{s_0}(x)dx \quad &\leq \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_0(x)|\Omega_0(x)dx + \int_0^{s_0} \left|\partial_s \int_{\mathbb{R}^n} \psi_+(s,x)\Omega_s(x)dx\right| ds\\ &\quad + \int_0^{s_0} \left|\partial_s \int_{\mathbb{R}^n} \psi_-(s,x)\Omega_s(x)dx\right| ds.\end{aligned}$$

Etant donnée que l'on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_0(x)|\Omega_0(x)dx = (\zeta r)^{\omega-\gamma}$ (puisque la donnée initiale est une molécule) et que les parties positives et négatives de ψ sont contrôlées de la même manière, nous obtenons à partir des Propositions 1.3.8, 1.3.9 un paramètre $\Theta := \Theta_1 + \Theta_2 \ll 1$ tel que :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(s_0,x)|\Omega_{s_0}(x)dx \quad &\leq \quad (\zeta r)^{\omega-\gamma} + 2\left(\Theta \times r^{\omega-\gamma-\alpha} \times s_0\right)\\ &\leq \quad (\zeta r)^{\omega-\gamma}\big(1 + 2\frac{\Theta}{\zeta^{\omega-\gamma}}\frac{s_0}{r^\alpha}\big).\end{aligned}$$

En rappelant que $\Omega_{s_0}(x) = |x - x(s_0)|^\omega$ et que nous avons supposé $0 \leq s_0 \leq \mathfrak{e} r^\alpha$ nous pouvons choisir $\mathfrak{e}$ suffisamment petit pour avoir :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(s_0,x)||x-x(s_0)|^\omega dx \quad &\leq \quad (\zeta r)^{\omega-\gamma}\left(1 + 4\frac{\alpha}{\omega-\gamma}\frac{\Theta}{\zeta^{\omega-\gamma}}\frac{s_0}{r^\alpha}\right)^{\frac{\omega-\gamma}{\alpha}}\\ &\leq \quad \left((\zeta r)^\alpha + 4\frac{\alpha}{\omega-\gamma}\frac{\Theta}{\zeta^{\omega-\gamma-\alpha}}s_0\right)^{\frac{\omega-\gamma}{\alpha}} \leq \big((\zeta r)^\alpha + Ks_0\big)^{\frac{\omega-\gamma}{\alpha}}, \quad (1.45)\end{aligned}$$

puisque nous pouvons définir $\frac{\Theta}{\zeta^{\omega-\gamma-\alpha}}$ suffisamment petit pour satisfaire

$$4\frac{\alpha}{\omega-\gamma}\frac{\Theta}{\zeta^{\omega-\gamma-\alpha}} \leq K,$$

où K dans (1.45) est une (petite) constante qui interviendra dans la condition de hauteur et ceci conclut la démonstration de la condition de concentration (1.34). ■

Condition de Hauteur

Nous étudions dans cette section la condition de Hauteur (1.35) donnée par l'expression

$$\|\psi(s_0,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\big((\zeta r)^\alpha + Ks_0\big)^{\frac{n+\gamma}{\alpha}}}.$$

Pour établir ce contrôle nous cherchons à prouver que

$$\frac{d}{ds}\|\psi(s,\cdot)\|_{L^\infty} \leq -K\big(\frac{n+\gamma}{\alpha}\big)((\zeta r)^\alpha + Ks)^{-(\omega-\gamma)/(n+\omega)}\,\|\psi(s,\cdot)\|_{L^\infty}^{1+\alpha/(n+\omega)}. \qquad (1.46)$$

En effet, en intégrant (1.46) nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_0}\frac{d}{ds}\Big(\|\psi(s,\cdot)\|_{L^\infty}^{-\alpha/(n+\omega)}\Big)\,ds &\geq \int_0^{s_0}\frac{d}{ds}\big([(\zeta r)^\alpha + Ks]^{(n+\gamma)/(n+\omega)}\big)\,ds,\\
\|\psi(s_0,\cdot)\|_{L^\infty}^{-\alpha/(n+\omega)} &\geq [(\zeta r)^\alpha + Ks_0]^{(n+\gamma)/(n+\omega)} + \big(\|\psi(0,\cdot)\|_{L^\infty}^{-\alpha/(n+\omega)} - [(\zeta r)^\alpha]^{(n+\gamma)/(n+\omega)}\big)\\
&\geq [(\zeta r)^\alpha + Ks_0]^{(n+\gamma)/(n+\omega)}.
\end{aligned}$$

En rappelant la condition de hauteur initiale $\|\psi(0,\cdot)\|_{L^\infty} \leq (\zeta r)^{-(n+\gamma)}$ pour la dernière inégalité, on obtient donc

$$\|\psi(s_0,\cdot)\|_{L^\infty} \leq ((\zeta r)^\alpha + Ks_0)^{-(n+\gamma)/\alpha},$$

qui est le contrôle requis. L'inégalité (1.46) se déduit en adaptant des idées exposées dans l'article [62].

Estimations L^1

Le contrôle L^1 (1.36) est désormais une conséquence directe d'une optimisation sur le paramètre D ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(s_0,x)|dx &= \int_{\{|x-x(s_0)|<D\}}|\psi(s_0,x)|dx + \int_{\{|x-x(s_0)|\geq D\}}|\psi(s_0,x)|dx\\
&\leq v_n D^n\|\psi(s_0,\cdot)\|_{L^\infty} + D^{-\omega}\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(s_0,x)||x-x(s_0)|^\omega dx.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la condition Concentration et la condition Hauteur, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\psi(s_0,x)|dx \leq v_n\frac{D^n}{((\zeta r)^\alpha + Ks_0)^{\frac{n+\gamma}{\alpha}}} + D^{-\omega}((\zeta r)^\alpha + Ks_0)^{\frac{\omega-\gamma}{\alpha}},$$

où v_n désigne le volume de la boule unité. On obtient alors :

$$\|\psi(s_0,\cdot)\|_{L^1} \leq \frac{2v_n^{\frac{\omega}{n+\omega}}}{\big((\zeta r)^\alpha + Ks_0\big)^{\frac{\gamma}{\alpha}}}.$$

Le Théorème 1.3.4 est maintenant complètement démontré. ■

1.3.7 Itération

Une fois que l'on a un bon contrôle sur les quantités $\|\psi(s_0,\cdot)\|_{L^1}$ et $\|\psi(s_0,\cdot)\|_{L^\infty}$ (à partir de (1.36) et (1.35)), par interpolation on obtient la borne suivante

$$\|\psi(s_0,\cdot)\|_{L^{p'}} \leq \|\psi(s_0,\cdot)\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}} \|\psi(s_0,\cdot)\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{p'}} \leq C\left[\left((\zeta r)^\alpha + K s_0\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-n+\frac{n}{p'}-\gamma}.$$

On voit donc avec le Théorème 1.3.4 qu'il est possible de contrôler la norme $L^{p'}$ des molécules ψ de 0 à un petit temps s_0, et en appliquant les mêmes arguments, nous pouvons étendre le contrôle du temps s_0 au temps s_1 avec un petit incrément $s_1 - s_0 \sim \mathfrak{e}r^\alpha$. On voit maintenant que la petitesse des paramètres $\mathfrak{e}$, r et des incréments de temps $s_0, s_1 - s_0, ..., s_N - s_{N-1}$ peut être compensée par le nombre d'itérations N. Puisque chaque petit gain de temps $s_0, s_1 - s_0, ..., s_N - s_{N-1}$ est de l'ordre de $\mathfrak{e}r^\alpha$, nous avons $s_N \sim N\mathfrak{e}r^\alpha$. Ainsi, nous arrêterons les itérations dès que $N\mathfrak{e}r^\alpha \geq \mathcal{T}_0$. Finalement, et pour tout $r > 0$, on obtient au bout d'un temps T_0 un contrôle $L^{p'}$ pour les petites molécules et ceci termine la preuve du Théorème 1.3.3. ■

Cette méthode moléculaire permet d'obtenir un gain de régularité, dans un cadre relativement large, pour les équations de transport-diffusion lorsque le dégré de régularité de l'opérateur de diffusion vérifie $\alpha > 1$. Ceci est possible car on dispose d'une famille L^p (avec $2 < p < +\infty$) d'estimation a priori qui fournissent diverses informations qui peuvent être exploitées convenablement. Toutefois, en l'absence de ces informations et même lorsque l'on a $\alpha = 2$, l'adaptation de cette technique à d'autres équations de la mécanique des fluides (on pensera aux équations de Navier-Stokes notamment) ne semble pas être totalement évidente et peut être, éventuellement, source de développements futurs.

Chapitre 2

Quelques résultats sur les équations de Navier-Stokes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse aux équations de Navier-Stokes incompressibles en dimension trois d'espace :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \vec{f}, \qquad div(\vec{u}) = 0, \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0(x), \; x \in \mathbb{R}^3, \qquad div(\vec{u}_0) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\vec{u} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est la vitesse du fluide, $p : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la pression, $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une force extérieure et $\vec{u}_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une donnée initiale.

Bien qu'il existe plusieurs manières d'aborder l'étude de ces équations, nous allons nous concentrer principalement sur les *solutions faibles de Leray* développées dans l'article fondateur [94]. Ainsi, dans tout ce qui suit, on considérera essentiellement $\vec{u}_0$ une donnée initiale à divergence nulle telle que $\vec{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et une force extérieure $\vec{f} \in L^2([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ à partir desquelles on peut construire sans problèmes des solutions faibles globales en temps $\vec{u} \in L^\infty([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$.

Ce cadre de travail reste encore assez ouvert et parmi les problèmes qui seront traités ici, nous allons présenter en premier lieu des résultats connus et totalement classiques de régularité dans la Section 2.2, pour ensuite les généraliser dans la Section 2.3 avec la notion de solutions *dissipatives*.

2.2 Deux théories de régularité

Le problème de la régularité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes est encore source de nombreux développements. De manière assez schématique, nous pouvons distinguer deux grandes théories de régularité qui permettent un éclairage assez fin (mais non définitif) des propriétés de régularité de ce type de solutions faibles.

Nous rappelons rapidement ces deux théories dans les Sections 2.2.2 et 2.2.3 qui suivent. Mais avant, nous aurons besoin de fixer quelques notations et propriété utiles.

2.2.1 Quelques définitions utiles

Dans ce qui suit nous aurons besoin d'introduire (ou de rappeler) des outils d'analyse. En particulier, nous utiliserons la distance parabolique suivante qui distingue le comportement en variables de temps et en variables d'espace en suivant la structure de l'équation de la chaleur sous-jacente aux équations de Navier-Stokes :

$$d\big((t,x),(s,y)\big) = \max\{|t-s|^{\frac{1}{2}}, |x-y|\}, \tag{2.2}$$

on notera alors $Q_{t,x,r}$ la boule parabolique de centre $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ et de rayon $r > 0$ *i.e.*

$$Q_{t,x,r} = \big\{(s,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : d\big((t,x),(s,y)\big) < r\big\}. \tag{2.3}$$

On écrira également $Q_{t,x}$, Q_r ou plus simplement Q si le contexte est suffisamment clair pour noter ce type de boules paraboliques.

L'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, muni de la distance d ci-dessus et de la mesure de Lebesgue $dt\,dx$ est alors un espace de nature homogène de dimension homogène égale à 5 : $\displaystyle\int_{Q_{t,x,r}} dt\,dx = Cr^5$.

On s'intéressera dans ce chapitre à des problèmes de régularité pour les solutions faibles de Leray des équations de Navier-Stokes et nous allons mesurer cette régularité par le biais des espaces de Hölder paraboliques donnés dans la définition suivante :

Définition 2.2.1 (Espaces de Hölder paraboliques) *Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à l'espace de Hölder parabolique $\dot{\mathcal{C}}^\alpha(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ pour un indice $0 < \alpha < 1$ si l'on a*

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{C}}^\alpha} = \sup_{(t,x)\neq(s,y)} \frac{|f(t,x) - f(s,y)|}{d((t,x),(s,y))^\alpha} < +\infty,$$

où la distance d est donnée dans la formule (2.2).

En lien avec ces espaces de régularité, un outil particulièrement efficace pour mesurer les fonctions qui vérifient une équation de la chaleur et obtenir ainsi un gain de régularité (voir le Lemme 2.2.4 ci-après) est donné par les espaces de Morrey.

Définition 2.2.2 (Espaces de Morrey paraboliques) *Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des boules paraboliques $Q_{t,x,r}$ définies dans (2.3) où $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ et $r > 0$. Pour $1 < p, q < +\infty$, l'espace de Morrey parabolique $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ est l'espace des fonctions localement intégrables $\vec{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telles que*

$$\|\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} = \sup_{Q_{t,x,r}\in\mathcal{Q}} \left(\frac{1}{r^{5(1-\frac{p}{q})}} \iint_{Q_{t,x,r}} |\vec{f}(s,y)|^p ds dy\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{2.4}$$

On notera sans problème que l'on a $L^q(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) = \mathcal{M}^{q,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$.

Ces espaces seront utilisés de façon intensive dans ce chapitre et le suivant, il convient alors de fixer quelques résultats et propriétés élémentaires :

Lemme 2.2.1 *Si $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux fonctions qui appartiennent à l'espace $\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ alors on a*

$$\|\vec{f} \cdot \vec{g}\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}_{t,x}} \leq C\|\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}} \|\vec{g}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.$$

Ce résultat admet la variante suivante

Lemme 2.2.2 *Si Ω est un ensemble mesurable borné de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, si l'on a les conditions $1 < p_0 \leq p_1$, $1 < p_0 \leq q_0 \leq q_1 < +\infty$ et si la fonction $\vec{f} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ appartient à l'espace $\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, nous avons alors le contrôle :*

$$\|\mathbb{1}_\Omega \vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}} \leq C\|\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p_1,q_1}_{t,x}}.$$

Définition 2.2.3 (Potentiel de Riesz parabolique) *Pour $0 < \alpha < 5$, on définit le potentiel de Riesz parabolique $\mathcal{I}_\alpha$ d'une fonction localement intégrable $\vec{f} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par l'expression*

$$\mathcal{I}_\alpha(\vec{f})(t,x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(|t-s|^{\frac{1}{2}} + |x-y|)^{5-\alpha}} \vec{f}(s,y)dy\, ds. \tag{2.5}$$

Ces opérateurs ont la propriété de continuité suivante :

Lemme 2.2.3 (Inégalité de Adams-Hedberg) *Si $0 < \alpha < \frac{5}{q}$, $1 < p \leq q < +\infty$ et $\vec{f} \in M^{p,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ alors pour $\lambda = 1 - \frac{\alpha q}{5}$ (qui vérifie $0 < \lambda < 1$) nous avons l'inégalité*

$$\|\mathcal{I}_\alpha(\vec{f})\|_{\mathcal{M}^{\frac{p}{\lambda},\frac{q}{\lambda}}_{t,x}} \leq C\|\vec{f}\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{t,x}}.$$

Voir [1] pour une preuve de ce résultat. Voici un corollaire utile de cette propriété de continuité et des estimations précédentes.

Corollaire 2.2.1 *Soit $\Omega =]a,b[\times B(x,r)$ un ensemble borné avec $0 < a < b < +\infty$, $x \in \mathbb{R}^3$ et $r > 0$. Si $2 < p \leq q$, $5 < q$, et $\vec{f} \in \mathcal{M}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, alors on a*

1) *$\mathbb{1}_\Omega \mathcal{I}_1(\vec{f}) \in \mathcal{M}^{\frac{p}{\lambda},\frac{q}{\lambda}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, avec $\lambda = 1 - \frac{q-5}{5q}$ (on notera que $0 < \lambda < 1$).*
2) *$\mathbb{1}_\Omega \mathcal{I}_1(\vec{f}) \in \mathcal{M}^{\sigma,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, avec $\sigma = \min(\frac{p}{\lambda}, q)$ pour le même paramètre λ utilisé précédemment.*
3) *Si $2 < p \leq q$, $5 < q$ et $\vec{f} \in \mathcal{M}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, alors*

$$\mathbb{1}_\Omega \mathcal{I}_2(\mathbb{1}_\Omega \vec{f}) \in \mathcal{M}^{\sigma,q}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3),$$

avec $\sigma = \min(\frac{p}{\lambda}, q)$ et $\lambda = 1 - \frac{q-5}{5q}$.

Comme cela a été dit ci-dessus, les espaces de Morrey paraboliques sont très utiles lorsqu'on s'intéresse à la régularité des solutions de l'équation de la chaleur. En effet nous avons le résultat suivant qui sera utilisé à plusieurs reprises dans ce qui suit.

Lemme 2.2.4 (Gain de régularité avec données Morrey) *Soit σ une fonction régulière sur $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, homogène d'exposant 1 et soit $\sigma(D)$ le multiplicateur de Fourier correspondant. Soient $\Phi \in \mathcal{M}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ et $h \in \mathcal{M}^{\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_1}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ des fonctions telles que $1 \leq \mathfrak{p}_0 \leq \mathfrak{q}_0$, avec $\frac{1}{\mathfrak{q}_0} = \frac{2-\alpha}{5}, \frac{1}{\mathfrak{q}_1} = \frac{1-\alpha}{5}$, pour un certain $0 < \alpha < 1$. Alors, la fonction v égale à 0 pour $t \leq 0$ et égale à*

$$v(t,x) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}(\Phi(s,\cdot) + \sigma(D)h(s,\cdot))ds,$$

pour $t > 0$, est Hölder continue d'exposant α au sens de la Définition 2.2.1.

Le lecteur peut consulter dans le livre [93] une démonstration de ces résultats.

Nous aurons également besoin de considérer des espaces de Morrey dans la variable d'espace uniquement.

Définition 2.2.4 (Espaces de Morrey non paraboliques) *L'espace de Morrey* $\mathcal{M}_x^{p,q}(\mathbb{R}^3)$ *avec* $1 < p \leq q < +\infty$ *est donné par l'ensemble de fonction mesurables*

$$\mathcal{M}_x^{p,q}(\mathbb{R}^3) = \{\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{f} \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3), \|\vec{f}\|_{\mathcal{M}_x^{p,q}} < +\infty\},$$

avec

$$\|\vec{f}\|_{\mathcal{M}_x^{p,q}} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3, r>0} \left(\frac{1}{r^{3(1-\frac{p}{q})}} \int_{B_{x_0,r}} |\vec{f}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.6}$$

Avec ces outils nous pouvons maintenant étudier la régularité des solutions faibles des équations de Navier-Stokes.

2.2.2 La théorie de régularité de Serrin

Dans cette théorie, le point de départ est donné par un couple $(\vec{u}, p)$ tel que :

- la vitesse $\vec{u} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ appartient à l'espace $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$,
- la pression $p : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une distribution,
- $\vec{f} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une force extérieure donnée,
- $\vec{u}$ vérifie sur un ouvert $\Omega \subset]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$ les équations de Navier-Stokes au sens faible : pour toute fonction test $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ à divergence nulle ($div(\vec{\varphi}) = 0$), on a

$$\left\langle \partial_t \vec{u} - \Delta \vec{u} + div(\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{f}, \vec{\varphi} \right\rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = 0.$$

On notera que la pression se déduit à partir de la vitesse $\vec{u}$ par le biais de la formule

$$-\Delta p = div(div(\vec{u} \otimes \vec{u})),$$

qui s'obtient lorsqu'on applique formellement la divergence aux équations de Navier-Stokes.

Dans ce cadre de travail assez générique, la théorie de régularité de Serrin a pour objectif d'obtenir un gain de régularité moyennant des hypothèses *locales* sur la vitesse $\vec{u}$. En effet, si l'on suppose que l'on a

$$\mathbb{1}_\Omega \vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x, \tag{2.7}$$

sur un ensemble Ω, alors on peut conclure qu'il y a un gain de régularité local (en variable spatiale) pour la vitesse la vitesse $\vec{u}$ et le gain de régularité dépendra de l'information de régularité disponible sur la force extérieure $\vec{f}$. Cette théorie a été développée par Serrin dans [109].

Bien évidemment, la condition (2.7) est beaucoup trop forte et en toute généralité il n'y a aucune raison de penser qu'une solution faible de Leray soit $L^\infty_{t,x}$ sur un ensemble borné Ω quelconque. Indiquons que plusieurs variantes ont été développées pour généraliser cette contrainte, ainsi, et tout en restant sur l'échelle des espaces de Lebesgue, on peut par exemple considérer la condition

$$\mathbb{1}_\Omega \vec{u} \in L^p_t L^q_x, \qquad \text{avec} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1, \tag{2.8}$$

sous cette contrainte on peut alors obtenir que l'on a $\mathbb{1}_\Omega \vec{u} \in L^\infty_t L^\infty_x$ et en déduire le gain de régularité recherché. On remarquera que le cas limite

$$\mathbb{1}_\Omega \vec{u} \in L^p_t L^q_x, \qquad \text{avec} \quad \frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1, \tag{2.9}$$

avec $1 < q < 3$ n'a été obtenu que plus tardivement dans [113] et [114] tandis que le cas particulier

$$\mathbb{1}_\Omega \vec{u} \in L^\infty_t L^3_x, \tag{2.10}$$

qui correspond au cas $p = +\infty$ et $q = 3$ dans (2.9) n'a été traité qu'assez récemment dans [69].

On rappellera que la condition $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leq 1$ ne peut pas être déduite par interpolation à partir des informations données par les solutions faibles de Leray : en effet, si l'on a $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$, nous avons $\vec{u} \in L^p_t L^q_x$ avec

$$\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = \frac{3}{2},$$

ce qui est bien sûr très loin des conditions (2.7), (2.8), (2.9) ou encore (2.10).

Il existe plusieurs généralisations possibles en dehors du cadre des espaces de Lebesgue et nous n'allons pas entrer dans une exposition détaillée de toutes les possibilités considérées. Toutefois, une généralisation particulièrement importante de la condition (2.8) a été réalisée par O'Leary [103] en utilisant des espaces de Morrey paraboliques où l'on demande la contrainte locale

$$\mathbb{1}_{Q_{t_0,x_0}} \vec{u} \in \mathcal{M}^{3,\tau}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3), \qquad (\tau > 5), \tag{2.11}$$

sur une boule parabolique Q_{t_0,x_0}. Nous verrons par la suite comment exploiter ce point de vue avec ces espaces de fonctions.

Remarque 2.2.1 *Finalement, il est très important de noter que dans cette théorie (et ses différents avatars), il n'est pas nécessaire d'imposer des conditions particulières sur la pression p, mais le gain de régularité ne s'obtient que dans la variable d'espace.*

2.2.3 La théorie de régularité de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

La deuxième théorie de régularité pour les équations de Navier-Stokes a été développée par Caffarelli, Kohn et Nirenberg dans [6]. Le cadre de travail ici est beaucoup moins restrictif que dans le cas de la théorie de régularité de Serrin.

En effet, cette théorie est basée sur le caractère *adapté* des solutions de Leray $\vec{u}$.

Définition 2.2.5 (Solution adaptée) *On dira que $\vec{u}$ est une solution adaptée des équations de Navier-Stokes si la mesure μ définie par l'expression*

$$\mu = -\partial_t |\vec{u}|^2 + \Delta |\vec{u}|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|2 - div((|\vec{u}|^2 + 2p)\vec{u}) + 2\vec{u} \cdot \vec{f}, \tag{2.12}$$

est une mesure borélienne positive localement bornée.

On notera que deux conditions sont au minimum nécessaires pour vérifier cette condition :

1) la pression p doit être suffisamment régulière pour permettre à la quantité μ d'être correctement définie comme une distribution, en particulier le terme $div(p\vec{u})$ doit avoir un sens,

2) une fois seulement que la quantité μ a un sens, alors nous imposons la condition de positivité de celle-ci.

En suivant [91] on peut décomposer l'étude de la régularité partielle des équations de Navier-Stokes en trois étapes :

Proposition 2.2.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^3$de la forme $\Omega = Q_{t_0,x_0,r_0}$ (voir la formule (2.3)) pour $t_0 \in]0,+\infty[$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $r_0 > 0$. Soit $\vec{u}$ une solution faible des équations de Navier-Stokes (2.1) telle que $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $\vec{f} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec $div(\vec{f}) = 0$. Alors :*

1) **Inégalité d'Energie.** *Si $p \in L^{q_0}_t L^{q_0}_x(\Omega)$ avec $q_0 > 1$ et si $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(\Omega)$, alors la quantité*

$$\mu = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \nu\Delta|\vec{u}|^2 - 2\nu|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - div((|\vec{u}|^2 + 2p)\vec{u}) + \vec{f} \cdot \vec{u}, \tag{2.13}$$

est bien définie en tant que distribution. De plus, en suivant la Définition 2.2.5 précédente, on dira que $\vec{u}$ adaptée si la quantité μ est une mesure positive localement finie sur Ω : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\varphi \geq 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}|^2(\partial_t\varphi + \nu\Delta\varphi) + (\vec{u} \cdot \vec{f} - 2\nu|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2)\varphi + (|\vec{u}|^2 + 2p)\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\varphi \, dx \, dt \geq 0.$$

2) **Petitesse du gradient.** *On suppose que $p \in L^{q_0}_t L^{q_0}_x(\Omega)$ pour $q_0 > 1$, que l'on a $\mathbb{1}_\Omega \vec{f} \in \mathcal{M}^{\frac{10}{7},\tau_0}_{t,x}$ pour $\tau_0 > 5/3$, et que la solution $\vec{u}$ est adaptée.*

Il existe une constante positive $\epsilon^* > 0$ et un paramètre $\tau_1 > 5$ qui dépend uniquement de q_0 et τ_0 tels que si $(t_0, x_0) \in \Omega$ et

$$\limsup_{r \to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B(x_0,r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(s, y)|^2 \, dy \, ds < \epsilon^*, \tag{2.14}$$

alors, il existe un petit voisinage $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}}$ du point (t_0, x_0) tel que l'on ait les informations Morrey paraboliques $\mathbb{1}_\mathcal{Q} \, \vec{u} \in \mathcal{M}^{3,\tau_1}_{t,x}$ et $\mathbb{1}_\mathcal{Q} \, p \in \mathcal{M}^{q_0,\tau_1/2}_{t,x}$.

3) **Points réguliers.** *S'il existe un voisinage $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}}$ du point $(t_0, x_0) \in \Omega$ tel que l'on ait*
(a) $\mathbb{1}_\mathcal{Q} \, \vec{u} \in \mathcal{M}^{3,\tau_1}_2$ pour $\tau_1 > 5$,
(b) $\mathbb{1}_\mathcal{Q} \, p \in \mathcal{M}^{q_0,\tau_2}_2$ pour $1 < q_0 \leq \tau_2$ et $\tau_2 > 5/2$,
(c) $\mathbb{1}_\mathcal{Q} \, \vec{f} \in \mathcal{M}^{\frac{10}{7},\tau_3}_2$ pour $\tau_3 > 5/2$.
Alors il existe $0 < \rho < \bar{r}$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que la solutions $\vec{u}$ est Höldérienne (d'exposant de régularité parabolique $\alpha > 0$, au sens de la Définition 2.2.1) sur $Q_{t_0,x_0,\rho}$ et en particulier le point (t_0, x_0) est un point régulier.

Voici quelques remarques concernant les hypothèses demandées sur la force $\vec{f}$:

(i) Dans le premier point de cette proposition, nous nous intéressons uniquement à donner un sens au produit $\vec{f} \cdot \vec{u}$, donc puisque nous avons $\vec{u} \in L^{10/3}_t L^{10/3}_x$, il suffit de supposer que l'on a $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x$.

(*ii*) Pour le deuxième point nous aurons besoin de plus de "régularité" et si nous voulons travailler avec des espaces plus classiques nous pouvons demander $\vec{f} \in L^2_t L^2_x$. En effet, comme $L^2_t L^2_x = \mathcal{M}^{2,2}_{t,x}$, et puisque $\mathcal{Q}$ est un sous-ensemble borné, on obtient que $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}\vec{f} \in L^2_t L^2_x$ implique $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}\vec{f} \in \mathcal{M}^{\frac{10}{7},2}_{t,x}$ et nous remplissons alors la condition demandée dans ce deuxième point.

(*iii*) Pour la dernière partie de la proposition, nous aurons besoin d'encore plus de régularité pour la force, en effet, des lignes précédentes nous voyons que $\vec{f} \in L^2_t L^2_x$ ne suffira pas puisque $2 < 5/2$ (voir la condition (*c*) ci-dessus). Ainsi, si nous voulons travailler avec des espaces classiques, nous pouvons demander $\vec{f} \in L^2_t H^1_x$. En effet, puisque $L^2_t H^1_x \subset \mathcal{M}^{2,\frac{10}{3}}_{t,x}$ et que $\mathcal{Q}$ est un sous-ensemble borné, on trouve que $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}\vec{f} \in L^2_t H^1_x$ implique $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}\vec{f} \in \mathcal{M}^{\frac{10}{7},103}_{t,x}$. On notera en particulier que nous avons ici $\frac{5}{2} < \frac{10}{3}$ pour le deuxième paramètre de l'espace de Morrey précédent et donc en supposant $\vec{f} \in L^2_t H^1_x$ nous satisfaisons l'hypothèse demandée.

Remarque 2.2.2 *On observera que la conclusion de la Proposition 2.2.1 nous fournit un gain de régularité exprimé dans un espace de Hölder parabolique. Contrairement à la théorie de Serrin, on obtient donc de la régularité dans les* deux *variables de temps et d'espace simultanément.*

Le résultat précédent constitue un très bon point de départ pour étudier la théorie de régularité à la Cafferlli-Kohn-Nirenberg et dans la section qui suit nous allons généraliser cette théorie.

2.3 Vers des solutions dissipatives

Pendant la thèse de K. Mayoufi [101], nous nous sommes intéressés avec P.-G. Lemarié-Rieusset au rôle de la pression dans la théorie de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. En effet, le cadre initial étudié par ces auteurs imposait la condition suivante sur la pression

$$p \in L^{\frac{5}{4}}_t L^{\frac{5}{4}}_x,$$

un peu plus tard, la condition $p \in L^{\frac{3}{2}}_t L^{\frac{3}{2}}_x$ a été utilisé par Lin [95], puis la restriction $p \in L^r_t L^1_x$ avec $r > 1$ a été considérée par Vasseur [117]. Indiquons également que Kukavica [92] a utilisé systématiquement les espaces de Morrey paraboliques pour étudier cette théorie, à l'instar de O'Leary pour la théorie de Serrin décrite dans la Section 2.2.2.

Un des buts de la thèse de Mayoufi était d'étudier si l'on pouvait obtenir une version de la théorie de régularité de Caffarelli, Kohn et Nirenberg en affaiblissant au maximum les hypothèses sur la pression p. Ce programme de recherche a été initié par une communication de Choe [57] où il y était annoncé que l'on pouvait considérer $p \in \mathcal{D}'$. Toutefois la démonstration proposée présentait quelques lacunes assez conséquentes et dans l'article [37] nous avons repris totalement ce projet de recherche.

En effet, on notera que si l'on suppose uniquement que $p \in \mathcal{D}'$, alors le terme $div(p\vec{u})$ qui intervient dans la définition de la mesure μ n'est pas bien posé (voir la formule (2.13) ci-dessus) et ainsi la définition du caractère adapté doit être changée. Notre première tâche a été alors de donner un sens à cette quantité $div(p\vec{u})$ même lorsque $p \in \mathcal{D}'$.

Proposition 2.3.1 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et soit $\rho > 0$, on considère $\Omega =]a, b[\times B(x_0, \rho)$ un domaine borné de $]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$. On suppose que l'on a $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$ avec $div(\vec{u}) = 0$ et $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sont solutions des équations de Navier-Stokes sur Ω :*

$$\partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f},$$

où $\vec{f} \in L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}(\Omega)$ et $div(\vec{f}) = 0$.

Soient $\gamma \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ deux fonctions régulières telles que $supp(\gamma) \subset]-1, 1[$ et $supp(\theta) \subset B(0, 1)$. On pose pour $\alpha, \varepsilon > 0$ les fonctions $\gamma_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}\gamma(\frac{t}{\alpha})$ et $\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3}\theta(\frac{x}{\varepsilon})$ et on définit la fonction

$$\phi_{\alpha,\varepsilon}(t, x) = \gamma_\alpha(t)\theta_\varepsilon(x).$$

Alors, si l'ensemble $Q =]t - r^2, t + r^2[\times B$ est contenu dans Ω, les distributions

$$\vec{u} * \phi_{\alpha,\varepsilon} \quad et \quad p * \phi_{\alpha,\varepsilon},$$

sont bien définies sur l'ensemble $Q_{r_0/4} \subset \Omega$ pour $0 < \alpha < r_0^2/2$ et $0 < \varepsilon < r_0/2$. De plus, la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\alpha\to 0} div(p * \phi_{\alpha,\varepsilon} \times \vec{u} * \phi_{\alpha,\varepsilon}),$$

existe dans $\mathcal{D}'$ et ne dépend pas du choix de γ et θ. Nous écrirons désormais,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\alpha\to 0} div(p * \phi_{\alpha,\varepsilon} \times \vec{u} * \phi_{\alpha,\varepsilon}) = \langle div(p\vec{u})\rangle. \tag{2.15}$$

L'existence de cette limite n'est absolument pas triviale (la démonstration, assez technique, peut être consultée dans notre article [37] et on donnera quelques détails de sa démonstration à la page 44 ci-après) mais elle nous permettra de travailler avec la quantité $\langle div(p\vec{u})\rangle$ où la pression p appartient à $\mathcal{D}'(\Omega)$. On peut maintenant introduire le concept suivant qui remplacera le caractère adapté de la solution $\vec{u}$.

Définition 2.3.1 (Solutions dissipatives) *Dans le cadre du théorème précédent :*

1) *on suppose $\vec{f} \in L_t^{\frac{10}{7}} L_x^{\frac{10}{7}}(\Omega)$ avec $\Omega =]a, b[\times B$ où $x \in \mathbb{R}^3$, $\rho > 0$ et $div(\vec{f}) = 0$,*

2) *si $(\vec{u}, p)$ est une solution des équations de Navier–Stokes*

$$\partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f},$$

sur Ω avec $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$ et $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nous dirons qu'une solution $\vec{u}$ est dissipative si la distribution M donnée par l'expression

$$M = -\partial_t(|\vec{u}|^2 + \Delta|\vec{u}|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - div(|\vec{u}|^2\vec{u}) - 2\langle div(p\vec{u})\rangle + 2\vec{f} \cdot \vec{u}, \tag{2.16}$$

est une mesure localement finie positive sur Ω.

Il est clair que, puisque $p \in \mathcal{D}'$, la notion de solution dissipative est plus générale que la notion de solutions adaptées. De plus, il est possible de vérifier que l'ensemble des solutions dissipatives est strictement plus large que celui des solutions adaptées.

Voici maintenant le théorème principal de cette section ([37]) :

Théorème 2.3.1 (Régularité des Solutions Dissipatives) *Soit $\Omega =]a, b[\times B(x, \rho)$ un domaine borné de $]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ et soit $(\vec{u}, p)$ une solution faible des équations de Navier-Stokes sur Ω. On suppose :*

1) $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\Omega) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$ *et* $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

2) $\vec{f} \in L^2_t H^1_x(\Omega)$,

3) $\vec{u}$ *est dissipative dans le sens de la Définition 2.3.1 donnée ci-dessus.*

Il existe une constante positive $\varepsilon^* > 0$, *telle que, si pour certains points* $(t_0, x_0) \in \Omega$ *on a l'inégalité*

$$\limsup_{r\to 0} \iint_{]t_0-r^2, t_0+r^2[\times B(x_0,r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}(t,x)| dxdt < \varepsilon^*, \tag{2.17}$$

alors la solution $\vec{u}$ *est bornée au voisinage du point* (t_0, x_0). *En particulier le point* (t_0, x_0) *est régulier.*

Il est intéressant de comparer notre approche à la théorie de Serrin et celle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. En effet, du point de vue des hypothèses sur $\vec{u}$, on a uniquement supposé la condition de petitesse du gradient (2.17) ainsi que la propriété de dissipativité. Ainsi, puisqu'on suppose moins de conditions sur la pression et puisque la notion de dissipativité est plus générale que le caractère adapté, on peut concevoir notre méthode comme une généralisation de la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg. D'autre part, comme on demande uniquement $p \in \mathcal{D}'$, et que l'on obtient un gain de régularité en variable spatiale, notre résultat peut également être considéré comme une généralisation de la théorie de Serrin puisque nous exigeons moins de conditions sur $\vec{u}$.

Toutefois, un tel degré de généralité introduit quelques différences par rapport à ces théories, en particulier, le gain de régularité est uniquement obtenu dans la variable spatiale et non pas dans les deux variables comme dans la théorie de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (voir la Remarque 2.2.2).

Expliquons maintenant la stratégie globale de la preuve qui sera développée pour le Théorème 2.3.1.

1) Comme on ne fait aucune hypothèse particulière sur la pression p et que l'on travaille dans un cadre local, en appliquant le rotationnel ($\vec{\nabla}\wedge$) aux équations de Navier-Stokes, nous allons immédiatement nous débarrasser de la pression p. L'équation que l'on obtient alors porte donc sur la vorticité $\vec{\varpi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$. Néanmoins on ne va pas travailler avec la variable $\vec{\varpi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$ et l'équation correspondante.

2) Etant donné que l'on souhaite étudier la régularité dans un voisinage d'un point (t_0, x_0), on va introduire une fonction test $\psi \in \mathcal{C}^\infty_0(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3)$ qui est nulle en dehors d'une petite boule centrée au point (t_0, x_0) et on définit une nouvelle variable de la manière suivante :
$$\vec{v} = \frac{1}{(-\Delta)} \vec{\nabla} \wedge (\psi \vec{\nabla} \wedge \vec{u}).$$
Le point crucial ici est que les deux dérivées successives données par les gradients $\vec{\nabla}$ et le rotationnel dans la formule précédente sont "localement compensées" par l'opérateur $\frac{1}{(-\Delta)}$ et ainsi, certaines propriétés de $\vec{u}$ seront très similaires à celles de la nouvelle variable $\vec{v}$ et vice versa : nous allons voir que (localement) $\vec{v}$ est égale à $\vec{u}$ à une correction harmonique près (en variable d'espace).

3) Nous étudions maintenant la variable $\vec{v}$: en effet, nous avons l'équation associée suivante

$$\partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla} q + \vec{F},$$

où la nouvelle "pression" q et la force $\vec{F}$ satisfont certaines propriétés intéressantes. Il est très important de noter ici que q et $\vec{F}$ ne dépendent pas de la pression p qui a disparu dès la première étape.

4) A l'aide de cette variable $\vec{v}$ et de son équation associée on va pouvoir donner un sens à la quantité $div(p\vec{u})$ même si p est une distribution. De plus on montrera que si $\vec{u}$ est une solution *dissipative* alors notre nouvelle variable $\vec{v}$ est *adaptée* dans le sens de la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg.

5) Finalement, on verra que la fonction $\vec{v}$ satisfait les équations de Navier-Stokes dans un meilleur cadre fonctionnel que celui de la fonction $\vec{u}$, ce qui nous permettra d'obtenir des informations intéressantes sur $\vec{v}$: nous verrons alors comment les propriétés de la fonction $\vec{v}$ se transmettent à la variable originale $\vec{u}$ afin d'obtenir les résultats recherchés.

Démonstration du Théorème Principal 2.3.1

1) Une équation sans pression

Soit une fonction $\vec{u}$ et une distribution p qui satisfont les équations de Navier-Stokes (2.1) sur un domaine borné $\Omega \subset]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$, pour une force $\vec{f}$ à divergence nulle. Afin de simplifier la notation, et sans perte de généralité, nous supposerons une fois pour toutes que l'ensemble Ω est de la forme

$$\Omega = I \times B_{x_0,\rho}, \tag{2.18}$$

où $I =]a, b[$ est un intervalle qui contient le temps t_0 et $B_{x_0,\rho} = B(x_0, \rho)$ est une boule ouverte dans $\mathbb{R}^3$ de rayon $\rho > 0$ et de centre $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

Notre première étape consiste à considérer le rotationnel de $\vec{u}$, qui sera notée $\vec{\varpi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$. On obtient l'équation suivante :

$$\partial_t \vec{\varpi} = \Delta \vec{\varpi} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}, \tag{2.19}$$

où la pression p a disparu (puisque nous avons $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} p \equiv 0$). Mais comme cela a été dit précédemment, nous ne souhaitons pas travailler avec l'équation (2.19) ni avec la variable $\vec{\varpi}$ et nous allons considérer une nouvelle variable dont les propriétés seront totalement déterminantes pour la suite.

2) Une nouvelle variable

Puisque nous voulons étudier la régularité de $\vec{u}$ au voisinage du point (t_0, x_0) de Ω tel que l'on ait (2.17), nous allons considérer l'ensemble

$$\Omega_0 = I_0 \times B_{x_0,\rho_0}, \tag{2.20}$$

avec $I_0 =]a_0, b_0[$, où $a < a_0 < t_0 < b_0 < b$ et $0 < \rho_0 < \rho$. Ensuite, nous introduisons une fonction localisante ψ de la forme

$$\psi(t, x) = \phi(t)\Phi(x), \tag{2.21}$$

où ϕ est égale à 1 sur I_0 et est à support dans I, et Φ est égale à 1 sur B_{x_0,ρ_0} et est à support compact dans $B_{x_0,\rho}$. La distribution $\psi\vec{\varpi}$ appartient alors à $L_t^\infty H_x^{-1} \cap L_t^2 L_x^2$ et nous introduisons la variable $\vec{v}$ de la manière suivante

$$\vec{v} = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\varpi}) = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{u}). \tag{2.22}$$

On notera en particulier que sur Ω_0, les dérivées (spatiales) de ψ sont nulles, de sorte que l'on a les identités

$$\Delta\vec{v} = -\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\varpi}) = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) = \Delta\vec{u}, \qquad x \in \Omega_0,$$

(car $div(\vec{u}) = 0$). On voit alors à partir de cette identité que sur Ω_0 la variable $\vec{v}$ est égale à $\vec{u}$ à une correction harmonique (dans la variable spatiale) $\vec{w}$ près. Notre stratégie sera donc de remplacer l'étude de la régularité de $\vec{u}$ par l'étude de la régularité de $\vec{v}$ et de relier ces deux régularités par une étude précise de la correction harmonique

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}.$$

Commençons par quelques faits élémentaires sur $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dont les preuves peuvent être consultées dans [37].

Proposition 2.3.2 *Sous les hypothèses $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(\Omega)$ sur la solution $\vec{u}$ des équations de Navier-Stokes (2.1), la fonction $\vec{v}$ définie par la formule (2.22) ci-dessus satisfait les points suivants*

1) $div(\vec{v}) = 0$,

2) $\vec{v} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 H_x^1(\Omega)$,

3) la fonction $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ satisfait $\vec{w} \in L_t^\infty \mathrm{Lip}_x(\Omega_0)$.

On notera que sur l'ensemble Ω_0 on dispose d'une information absolument fondamentale sur $\vec{w}$ car elle permettra de lier les propriétés de $\vec{u}$ à celles de $\vec{v}$.

Corollaire 2.3.1 *Si l'on travaille sur Ω, puisque $\vec{u} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 H_x^1(\Omega)$ et $\vec{v} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 H_x^1(\Omega)$, on a aussi $\vec{w} \in L_t^\infty L_x^2(\Omega) \cap L_t^2 H_x^1(\Omega)$. Il vient alors*

$$\|\vec{w}\|_{L_t^\infty L_x^2(\Omega)} \leq C_{\rho,\psi}\|\vec{u}\|_{L_t^\infty L_x^2(\Omega)} \quad et \quad \|\vec{w}\|_{L_t^2 H_x^1(\Omega)} \leq C_{\rho,\psi}\|\vec{u}\|_{L_t^2 H_x^1(\Omega)}.$$

3) L'équation pour la nouvelle variable.

On étudie ici l'équation vérifiée par $\partial_t\vec{v}$. La déduction de cette équation est un peu longue et technique de sorte que nous donnerons que les idées les plus importantes dans les lignes qui suivent (les détails sont faits dans [37]). Ainsi, étant donné que l'on travaille sur l'ensemble Ω_0 et que l'on a $\partial_t\psi = 0$ pour $t \in I_0$, par les propriétés de support de la fonction ψ nous pouvons écrire :

$$\partial_t\vec{v} = \partial_t\left[-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\varpi})\right] = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \big(\psi(\partial_t\vec{\varpi})\big),$$

et avec l'équation (2.19) il vient

$$\begin{aligned}
\partial_t\vec{v} &= -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big(\psi\left(\Delta\vec{\varpi} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{u}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}\right)\Big) \\
&= \underbrace{-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\Delta\vec{\varpi})}_{(A)} + \underbrace{\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \Big(\psi(\vec{\nabla} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{u}))\Big)}_{(B)} + \vec{F}_0,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

où nous avons posé

$$\vec{F}_0 = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left(\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{f}\right). \tag{2.24}$$

Nous allons maintenant étudier les termes (A) et (B) afin de simplifier l'équation (2.23).

(A) Pour le terme $-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\Delta\vec{\varpi})$ on peut écrire

$$-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge [\psi\Delta\vec{\varpi}] = \underbrace{-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[\Delta(\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{u})\right]}_{(1)} \underbrace{-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[\vec{\nabla} \wedge (\Delta\psi\vec{u}) - \vec{\nabla}(\Delta\psi) \wedge \vec{u}\right]}_{(2)}$$
$$\underbrace{+2\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[\sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}\left(\vec{\nabla} \wedge ((\partial_{x_j}\psi)\vec{u})\right)\right]}_{(3)} \underbrace{-2\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[\sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}\left(\vec{\nabla}(\partial_{x_j}\psi) \wedge \vec{u}\right)\right]}_{(4)}.$$

On remarque maintenant que le terme (1) ci-dessus correspond à $\Delta\vec{v}$:

$$-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[\Delta(\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{u})\right] = \Delta\left(-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{u})\right) = \Delta\vec{v},$$

de sorte que l'on obtient $-\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\Delta\vec{\varpi}) = \Delta\vec{v} + \vec{F}_1$ où $\vec{F}_1 = (2) + (3) + (4)$, *i.e.* :

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 \quad = \quad & -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[\vec{\nabla} \wedge (\Delta\psi\vec{u}) - \vec{\nabla}(\Delta\psi) \wedge \vec{u}\right] + 2\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[\sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}\left(\vec{\nabla} \wedge ((\partial_{x_j}\psi)\vec{u})\right)\right] \\ & -2\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[\sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}\left(\vec{\nabla}(\partial_{x_j}\psi) \wedge \vec{u}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.25}$$

On remarquera que l'on a bien $div(\vec{F}_1) = 0$.

(B) Pour le deuxième terme de (2.23), en utilisant quelques identités vectorielles on obtient :

$$\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[\psi(\vec{\nabla} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{u}))\right] = \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \psi\vec{u})\right] - \frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[(\vec{\nabla}\psi) \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{u})\right],$$

puis

$$\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[\psi(\vec{\nabla} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{u}))\right] = -\vec{\nabla}q_1 - \vec{\varpi} \wedge \psi\vec{u} + \vec{F}_2.$$

où nous avons posé

$$q_1 = -\frac{1}{\Delta}(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\varpi} \wedge \psi\vec{u})), \tag{2.26}$$

et

$$\vec{F}_2 = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge \left[(\vec{\nabla}\psi) \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{u})\right]. \tag{2.27}$$

On remarque à nouveau que l'on a $div(\vec{F}_2) = 0$.

Ainsi, avec les termes $q_1, \vec{F}_0, \vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ donnés dans (2.26), (2.24), (2.25) et (2.27) nous obtenons

$$\partial_t\vec{v} = \Delta\vec{v} - \left[\vec{\varpi} \wedge \psi\vec{u}\right] - \vec{\nabla}q_1 + \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \tag{2.28}$$

Il reste à étudier le terme $\left[\vec{\varpi} \wedge \psi\vec{u}\right]$ et on obtient

$$\vec{\varpi} \wedge \psi\vec{u} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{\beta} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{\beta}) \wedge \vec{v} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{\beta}) \wedge \vec{\beta}. \tag{2.29}$$

où l'on a posé

$$\vec{\beta} = \frac{1}{\Delta}\left[\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\psi)\right] - \frac{1}{\Delta}\left[\vec{\nabla} \wedge \left((\vec{\nabla}\psi) \wedge \vec{u}\right)\right].$$

Puisque la variable $\vec{v}$ est à divergence nulle par la Proposition 2.3.2, nous avons l'identité $(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{\nabla}|\vec{v}|^2$. On définit alors q_3 par

$$q_3 = -\frac{1}{2}|\vec{v}|^2, \tag{2.30}$$

et l'on écrit pour le premier terme de (2.29) :

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\nabla}q_3.$$

Pour les termes restants de (2.29) on pose

$$\vec{A} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{\beta} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{\beta}) \wedge \vec{v} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{\beta}) \wedge \vec{\beta},$$

étant donné que sur Ω_0, nous avons l'identité $\vec{A} = \psi\vec{A}$ on peut alors décomposer $\psi\vec{A}$ de la manière suivante

$$\psi\vec{A} = -\vec{F}_3 + \vec{\nabla}q_2,$$

où

$$q_2 = \frac{1}{\Delta}div(\psi\vec{A}).$$

On notera encore une fois que l'on a $div(\vec{F}_3) = 0$.

Nous avons donc obtenu la formule $\vec{\varpi} \wedge \psi\vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{F}_3 + \vec{\nabla}q_2 + \vec{\nabla}q_3$ et en revenant à l'expression (2.28) nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \partial_t\vec{v} &= \Delta\vec{v} - \left[\vec{\varpi} \wedge \psi\vec{u}\right] - \vec{\nabla}q_1 + \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ &= \Delta\vec{v} - \left[(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{F}_3 + \vec{\nabla}q_2 + \vec{\nabla}q_3\right] - \vec{\nabla}q_1 + \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \end{aligned}$$

ce qui nous fournit l'équation suivante pour la variable $\vec{v}$

$$\partial_t\vec{v} = \Delta\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}q + \vec{F}, \tag{2.31}$$

avec $q = q_1 + q_2 + q_3$ et $\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$.

Quelques propriétés de l'équation (2.31) sur $\vec{v}$.

Nous avons les propriétés suivantes pour le terme $\vec{F}_0$ donné dans (2.24) ci-dessus :

Lemme 2.3.1 *Soit Ω un sous-ensemble borné de $]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ de la forme (2.18) et soit Ω_0 l'ensemble donné dans (2.20). Soit $\vec{f}$ une force donnée telle que $div(\vec{f}) = 0$, alors*

1) si $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(\Omega)$ alors $\vec{F}_0 \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(\Omega_0)$,

2) si $\vec{f} \in L^2_t L^2_x(\Omega)$ alors $\vec{F}_0 \in L^2_t L^2_x(\Omega_0)$,

3) si $\vec{f} \in L^2_t H^1_x(\Omega)$ alors $\vec{F}_0 \in L^2_t H^1_x(\Omega_0)$.

Un résultat fondamental pour la suite est le suivant qui donne des informations sur la nouvelle "pression" q ainsi que sur la partie de la nouvelle force extérieure $\vec{F} - \vec{F}_0$ qui ne dépend pas de la force extérieure initiale $\vec{f}$:

Proposition 2.3.3 *Nous avons les propriétés suivantes*

1) la pression q est une fonction telle que $q \in L^{3/2}_t L^{3/2}_x(\Omega_0)$,

2) la force $\vec{F}$ est telle que $div(\vec{F}) = 0$ et $\vec{F} - \vec{F}_0 \in L^2_t L^2_x(\Omega_0)$, où $\vec{F}_0 = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{f})$.

Une démonstration détaillée de ces propriétés peut se consulter dans [37].

4) Dissipativité de $\vec{u}$ et adaptabilité de $\vec{v}$

Comme nous venons de le voir, l'équation (2.31) vérifiée par la variable $\vec{v}$ est en réalité une équation de Navier-Stokes classique avec une "nouvelle" pression q et avec une force extérieure $\vec{F}$. La remarque fondamentale réside alors dans le fait que par la Proposition 2.3.3 ci-dessus, la nouvelle pression q non seulement ne dépend absolument pas de la pression originale p mais qu'en plus elle appartient à l'espace $L^{3/2}_t L^{3/2}_x(\Omega_0)$: la variable $\vec{v}$ évolue donc dans un cadre beaucoup plus régulier que la variable $\vec{u}$ pour laquelle on a uniquement $p \in \mathcal{D}'$. Ce gain d'information pour la nouvelle pression q nous permettra de donner un sens au terme $div(q\vec{v})$ puis au terme $div(p\vec{u})$ comme nous allons le voir dans les lignes ci-dessous. Nous verrons ensuite comment relier l'hypothèse de dissipativité de la variable $\vec{u}$ avec une propriété d'adaptabilité de la variable $\vec{v}$.

Dissipativité de $\vec{u}$

On considère pour commencer $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ deux fonctions régulières telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma(t)dt = \int_{\mathbb{R}^3} \theta(x)dx = 1$, $supp(\gamma) \subset]-1,1[$ et $supp(\theta) \subset B(0,1)$. De plus, pour $\alpha, \varepsilon > 0$, on considère les fonctions $\gamma_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}\gamma(\frac{t}{\alpha})$ et $\theta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^3}\theta(\frac{x}{\varepsilon})$ et on définit la fonction régularisante

$$\varphi_{\alpha,\varepsilon}(t,x) = \gamma_\alpha(t)\theta_\varepsilon(x). \tag{2.32}$$

On note $\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}$ la fonction définie par $\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} = \vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}$ et puisqu'il s'agit d'une fonction régulière dans les variables de temps et d'espace, nous pouvons écrire

$$\partial_t |\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2 = 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \cdot \partial_t \vec{u}_{\alpha,\varepsilon},$$

et il vient alors

$$\begin{aligned}
\partial_t |\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2 &= 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \cdot \left(\partial_t \vec{u} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\right) = 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \cdot \Big(\Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \vec{f}\Big) * \varphi_{\alpha,\varepsilon} \\
&= 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \cdot \Delta\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} - 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \cdot \Big([(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}] * \varphi_{\alpha,\varepsilon}\Big) - 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \cdot (\vec{\nabla}p * \varphi_{\alpha,\varepsilon}) + 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \cdot (\vec{f} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}).
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $div(\vec{u}) = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_t |\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2 =& \Delta|\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2 - 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \cdot ([div(\vec{u} \otimes \vec{u})] * \varphi_{\alpha,\varepsilon}) \\
&- 2\, div\,[(p * \varphi_{\alpha,\varepsilon})\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}] + 2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \cdot (\vec{f} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Si l'on note maintenant $\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}$ la fonction donnée par $\vec{v}_{\alpha,\varepsilon} = \vec{v} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}$, par le même arguments utilisés ci-dessus, on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned}
\partial_t |\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}|^2 =& \Delta|\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_{\alpha,\varepsilon}|^2 - 2\vec{v}_{\alpha,\varepsilon} \cdot ([div(\vec{v} \otimes \vec{v})] * \varphi_{\alpha,\varepsilon}) \\
&- 2\, div\,[(q * \varphi_{\alpha,\varepsilon})\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}] + 2\vec{v}_{\alpha,\varepsilon} \cdot (\vec{F} * \varphi_{\alpha,\varepsilon}).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Notre objectif est d'étudier maintenant la convergence des expressions (2.33) et (2.34) lorsque les paramètres α et ε tendent vers 0 et nous utiliserons les propriétés de $\vec{v}$ pour en déduire le comportement limite sur la variable $\vec{u}$.

Nous remarquons qu'il n'est pas très difficile de traiter de la convergence de certains des termes contenus dans ces formules. Pour plus de simplicité on notera $\vec{u}_\varepsilon = \vec{u} * \theta_\varepsilon$ et $\bar{Q} = Q_{t_0,x_0,\rho/4} \subset \Omega_0$.

Lemme 2.3.2 *On a les convergences fortes suivantes*

1) $\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \vec{u}_\varepsilon$ *dans* $L^2_t L^2_x(\bar{Q})$ *et dans* $L^2_t \dot{H}^1_x(\bar{Q})$,

2) $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_{\alpha,\varepsilon} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\varepsilon$ *dans* $L^2_t L^2_x(\bar{Q})$,

3) $(\vec{u} \otimes \vec{u}) * \varphi_{\alpha,\varepsilon} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} (\vec{u} \otimes \vec{u}) * \theta_\varepsilon$ *dans* $L^2_t L^2_x(\bar{Q})$,

4) $\vec{f} * \varphi_{\alpha,\varepsilon} \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \vec{f} * \theta_\varepsilon$ *dans* $L^{10/7}_t L^{10/7}_x(\bar{Q})$.

Maintenant on peut passer à la limite $\alpha \longrightarrow 0$ pour tous les termes de l'identité (2.33), excepté pour le terme impliquant la pression p. Toutefois, la limite de ce terme doit exister, car (en raison de l'égalité) il est égal à une somme de termes qui ont une limite. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned}\partial_t |\vec{u}_\varepsilon|^2 = \Delta |\vec{u}_\varepsilon|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\varepsilon|^2 - 2\vec{u}_\varepsilon \cdot ([div(\vec{u} \otimes \vec{u})] * \theta_\varepsilon) \\ -2 \lim_{\alpha\to 0} div\,[(p * \varphi_{\alpha,\varepsilon})\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}] + 2\vec{u}_\varepsilon \cdot (\vec{f} * \theta_\varepsilon).\end{aligned} \tag{2.35}$$

On prends maintenant la limite $\alpha \longrightarrow 0$ dans l'expression (2.34) et on notera en particulier que puisque nous avons la convergence la plus forte $\lim\limits_{\alpha\to 0} q * \varphi_{\alpha,\epsilon} = q * \theta_\epsilon$ dans $L^{3/2}_t L^{3/2}_x$ (car la "nouvelle" pression q appartient à l'espace $L^{3/2}_t L^{3/2}_x$ par la Proposition 2.3.3) on peut écrire $div\,[(q * \theta_\varepsilon)\vec{v}_\varepsilon]$ pour le couple $(\vec{v}, q)$ au lieu de $\lim\limits_{\alpha\to 0} div\,[(p * \varphi_{\alpha,\varepsilon})\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}]$ pour $(\vec{u}, p)$ dans (2.35) et l'on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t |\vec{v}_\varepsilon|^2 = \Delta |\vec{v}_\varepsilon|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}_\varepsilon|^2 - 2\vec{v}_\varepsilon \cdot ([div(\vec{v} \otimes \vec{v})] * \theta_\varepsilon) \\ -2\, div\,[(q * \theta_\varepsilon)\vec{v}_\varepsilon] + 2\vec{v}_\varepsilon \cdot (\vec{F} * \theta_\varepsilon).\end{aligned} \tag{2.36}$$

A ce stade, nous définissons deux quantités qui nous aideront à passer à la limite $\varepsilon \to 0$:

$$\mu_\varepsilon \;=\; 2\vec{u}_\varepsilon \cdot ([div(\vec{u} \otimes \vec{u})] * \theta_\varepsilon) - div(|\vec{u}|^2 \vec{u}) \tag{2.37}$$

$$\eta_\varepsilon \;=\; 2\vec{v}_\varepsilon \cdot ([div(\vec{v} \otimes \vec{v})] * \theta_\varepsilon) - \; div(|\vec{v}|^2 \vec{v}). \tag{2.38}$$

Nous avons à présent le lemme suivant :

Lemme 2.3.3 *On a les convergences fortes suivantes*

1) $\vec{u}_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \vec{u}$ *dans* $L^2_t L^2_x(\bar{Q})$ *et dans* $L^2_t \dot{H}^1_x(\bar{Q})$,

2) $\vec{\nabla} \otimes \vec{u}_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \vec{\nabla} \otimes \vec{u}$ *dans* $L^2_t L^2_x(\bar{Q})$,

3) $\vec{f} * \theta_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \vec{f}$ *dans* $L^{10/7}_t L^{10/7}_x(\bar{Q})$.

On notera en particulier que l'on a la convergence forte $q * \theta_\epsilon$ vers q dans $L^{3/2}_t L^{3/2}_x(\bar{Q})$.

A l'aide de ce lemme, en passant à la limite $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans (2.35) et (2.36) on a alors :

$$\begin{aligned}\partial_t|\vec{u}|^2 =& \Delta|\vec{u}|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - div(|\vec{u}|^2\vec{u}) + 2\vec{u}\cdot\vec{f} \\ & - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\mu_\varepsilon + 2\lim_{\alpha\to 0} div\left[(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon}) \times \vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\right]\right),\end{aligned} \tag{2.39}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_t|\vec{v}|^2 =& \Delta|\vec{v}|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{v}|^2 - div(|\vec{v}|^2\vec{v}) + 2\vec{v}\cdot\vec{F} \\ & - \lim_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon - 2\, div(q\vec{v}).\end{aligned} \tag{2.40}$$

Bien que nous ayons obtenu à ce stade des équations similaires pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ la situation est totalement différente : nous n'avons aucune information sur la pression $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mais nous avons un bien meilleur comportement pour la nouvelle pression q, puisque $q \in L^{3/2}_t L^{3/2}_x(\bar{Q})$.

L'idée essentielle qui nous permettra de conclure est donnée par le résultat qui suit :

Lemme 2.3.4 *Pour μ_ε et ν_ε définis respectivement dans (2.37) et (2.38), nous avons la convergence suivante dans $\mathcal{D}'(\bar{Q})$:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon - \mu_\epsilon = 0.$$

En effet, avec ce lemme, si nous avons $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon - \mu_\epsilon = 0$, alors l'existence de $\mathop{lim}\limits_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon$ impliquera l'existence de $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon$ et nous pouvons donner un sens à la quantité

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} div\left[\left(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right) \times \left(\vec{u}*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\right],$$

car tous les termes restants de (2.39) existent puisque $\vec{u} \in L^\infty_t L^2_x(\bar{Q}) \cap L^2_t H^1_x(\bar{Q})$ et $\vec{f} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(\bar{Q})$.

Mais l'existence de $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon$ est donnée par les propriétés de l'équation sur la nouvelle variable $\vec{v}$: en effet, tous les termes de l'expression (2.40) existent car $\vec{v} \in L^\infty_t L^2_x(\bar{Q}) \cap L^2_t H^1_x(\bar{Q})$, $\vec{F} \in L^{10/7}_t L^{10/7}_x(\bar{Q})$ avec $q \in L^{3/2}_t L^{3/2}_x(\bar{Q})$ et donc la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon$ existe bel et bien. Voir plus de détails dans notre article [37] ou dans [117].

Avec ces idées, nous venons de donner un sens à l'expression (2.15), la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} div(p*\phi_{\alpha,\varepsilon} \times \vec{u}*\phi_{\alpha,\varepsilon}),$$

est bien définie au sens des distributions : la quantité M introduite dans (2.16) est correctement définie et si l'on suppose que cette quantité est positive, on arrive alors aisément à la notion de *solutions dissipatives* donnée dans la Définition 2.3.1.

Adaptabilité de $\vec{v}$

Voyons maintenant comment obtenir de l'information sur la variable $\vec{v}$ à partir de la notion de dissipativité sur $\vec{u}$ donnée dans (2.16). En effet, puisque nous avons

$$\begin{aligned}2\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} div\left[(p*\varphi_{\alpha,\varepsilon}) \times \vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\right] &= -\partial_t|\vec{u}|^2 + \Delta|\vec{u}|^2 - 2|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 \\ & \quad -div(|\vec{u}|^2\vec{u}) + 2\vec{u}\cdot\vec{f} - \lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon,\end{aligned}$$

on obtient que la distribution M introduite dans (2.16) est en fait donnée par l'identité suivante

$$M = \lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon,$$

et si cette quantité est localement positive, alors par le Lemme 2.3.4 on en déduit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \eta_\varepsilon \geq 0,$$

ce qui nous permet d'obtenir l'adaptabilité de la variable $\vec{v}$ au sens de la Définition 2.2.5.

5) Propriétés de $\vec{v}$ et gain de régularité sur $\vec{v}$ puis sur $\vec{u}$

Nous avons donc une variable $\vec{v}$ qui vérifie l'équation (2.31) :

$$\partial_t \vec{v} = \Delta \vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla} q + \vec{F},$$

où l'on a $q \in L^{3/2}_t L^{3/2}_x(\Omega_0)$, $\mathbf{1}_{\Omega_0}\vec{F} \in L^2_t L^2_x \subset \mathcal{M}^{10/7,2}_{t,x}$, et de plus $\vec{v}$ est adaptée. On remarquera que ce cadre fonctionnel rentre dans le contexte de la Proposition 2.2.1 et qu'il nous manque uniquement la condition de petitesse du gradient de $\vec{v}$ donnée par l'expression (2.14). Mais cette condition de petitesse sur $\vec{v}$ peut se déduire de l'hypothèse (2.17) sur la variable $\vec{u}$.

En effet, si l'on utilise le fait que $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ appartient à $L^\infty_t \mathrm{Lip}_x(\Omega_0)$, nous avons alors

$$\begin{aligned}\left| \|\mathbb{1}_{Q_{t_0,x_0,r}} \vec{\nabla}\otimes\vec{v}\|_{L^2_tL^2_x} - \|\mathbb{1}_{Q_{t_0,x_0,r}} \vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2_tL^2_x} \right| \leq & \|\mathbb{1}_{Q_{t_0,x_0,r}} \vec{\nabla}\otimes\vec{w}\|_{L^2_tL^2_x} \\ \leq & C r^{5/2} \|\vec{\nabla}\otimes\vec{w}\|_{L^\infty_t L^\infty_x(Q_{t_0,x_0,r})},\end{aligned}$$

et il vient

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} & |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,y)|^2\, dy\, ds = \\ & \limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B_{x_0,r}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{v}(s,y)|^2\, dy\, ds,\end{aligned}$$

ainsi, si la première limite (sur $\vec{u}$) est inférieure à ϵ^* (par hypothèse (2.17)), la deuxième limite (sur $\vec{v}$) sera toujours inférieure à ϵ^*.

Avec cette remarque, nous avons toutes les hypothèses de la Proposition 2.2.1 pour la variable $\vec{v}$: il existe alors $\tau_1 > 5$ et un petit ensemble $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}} \subset \Omega_0$ de (t_0,x_0) tel que $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}\,\vec{v} \in \mathcal{M}^{3,\tau_1}_{t,x}$ et $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}\,q \in \mathcal{M}^{3/2,\tau_1/2}_{t,x}$. De plus, on peut montrer (si la force est suffisamment régulière) que le point (t_0,x_0) est en fait un point régulier pour la variable $\vec{v}$: nous avons de la sorte obtenu un gain de régularité sur la variable $\vec{v}$.

Voyons à présent comment récupérer des informations utiles sur la variable $\vec{u}$. Nous savons déjà que l'on $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}\,\vec{v} \in \mathcal{M}^{3,\tau_1}_{t,x}$ dans un petit voisinage $\mathcal{Q} = Q_{t_0,x_0,\bar{r}}$ de (t_0,x_0). En utilisant les informations disponibles sur $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ (voir la Proposition 2.3.2 ci-dessus), on remarque alors que l'on a $\vec{w} \in L^\infty_t L^\infty_x(\Omega_0) \subset L^{\tau_1}_t L^{\tau_1}_x(\Omega_0)$, mais nous avons également $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}\,\vec{w} \in \mathcal{M}^{\tau_1,\tau_1}_{t,x}$ et puisque $\tau_1 > 5 > 3$ on obtient alors que $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}\,\vec{w} \in \mathcal{M}^{3,\tau_1}_{t,x}$. On en déduit alors que l'on a $\mathbb{1}_{\mathcal{Q}}\,\vec{u} \in \mathcal{M}^{3,\tau_1}_{t,x}$ et ceci représente un gain d'information pour la variable $\vec{u}$ qui nous permet alors d'appliquer la théorie de Serrin dans un cadre Morrey (on supposera en particulier que l'on a $\vec{f} \in L^2_t H^1_x$) puisque l'on a la condition (2.11) : on en déduit alors que le point (t_0,x_0)

est également un point régulier pour la variable $\vec{u}$. Le Théorème 2.3.1 est donc démontré. ■

Tous les détails des preuves (et bien d'autres informations) peuvent se consulter dans notre article [37].

Comme nous venons de le voir, ce résultat permet de préciser le rôle de la pression dans les théories de régularité pour les équations de Navier-Stokes : on peut donc considérer des pressions très générales et obtenir un gain de régularité dans le cadre de la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg.

On notera pour finir que ces solutions dissipatives possèdent quelques propriétés de stabilité supplémentaires qui sont étudiées et détaillées dans l'article [36].

Chapitre 3

Régularité pour les équations MHD, Boussinesq et MicroPolaires

3.1 Introduction

Les équations de Navier-Stokes (en dimension 3, incompressibles ou pas) concentrent à elles seules beaucoup des problèmes mathématiquement intéressants concernant les équations de la mécanique des fluides.

Toutefois, lorsque les fluides sont légèrement plus complexes, celles-ci ne permettent pas de capturer tous les phénomènes physiques décrivant leur évolution. Par exemple, si les fluides sont soumis à un fort champ magnétique (on pense aux différents plasmas), la description de leur dynamique requiert un couplage avec une deuxième équation afin d'expliquer l'influence de ce champs magnétique et l'on obtient alors les équations de la magnéto-hydrodynamique (ou MHD pour faire court). Si maintenant on doit prendre en compte la température du fluide et son évolution, nous obtenons assez naturellement les équations de Boussinesq qui sont un modèle très étudié dans la littérature. Finalement, si on considère des fluides qui possèdent des micro-structures granulaires (comme les fluides boueux ou le sang) et si l'on doit prendre en compte les micro-rotations de ces particules, nous obtenons les équations micro-polaires (MMP) qui correspondent à un modèle mathématique plus adapté pour décrire l'évolution de ce type de fluides.

Il existe, bien sûr, d'autres équations de la mécanique de fluides, mais nous allons nous concentrer ici uniquement sur ces trois modèles évoqués ci-dessus qui résultent (globalement) d'un couplage entre deux équations : une qui décrit l'évolution de la vitesse, et qui est essentiellement gouvernée par les équations de Navier-Stokes, et une deuxième équation qui donne la dynamique de la deuxième variable considérée (champ magnétique, champ de micro-rotation ou température).

Dans les sections qui suivent, nous allons nous intéresser aux propriétés de régularité des solutions faibles de ces systèmes. Dans la Section 3.2 nous étudierons les équations de la magnéto-hydrodynamique, dans la Section 3.3 les équations de Boussinesq et enfin, dans la Section 3.4 on traitera les équations micro-polaires.

3.2 Les équations de la magnéto-hydrodynamique

Les équations de la magnéto-hydrodynamique sont les suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{U} = \Delta \vec{U} - (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{\nabla}P + \vec{F}, \quad div(\vec{U}) = div(\vec{F}) = 0, \\ \partial_t \vec{B} = \Delta \vec{B} - (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{U} + \vec{G}, \quad div(\vec{B}) = div(\vec{G}) = 0, \\ \vec{U}(0,x) = \vec{U}_0(x),\ div(\vec{U}_0) = 0 \text{ and } \vec{B}(0,x) = \vec{B}_0(x),\ div(\vec{B}_0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans ce système la variable $\vec{U} : [0,T]\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs à divergence nulle qui représente la vitesse du fluide, la variable $\vec{B} : [0,T]\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est également un champ de vecteurs à divergence nulle qui modélise le champ magnétique et la fonction scalaire $P : [0,T]\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la pression interne du fluide.

Les données initiales du problèmes sont les fonctions $\vec{U}_0, \vec{B}_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et nous considérons ici des forces extérieures $\vec{F}, \vec{G} : [0,T]\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ à divergence nulle.

On notera que le système (3.1) est relativement symétrique par rapport aux variables $\vec{U}$ et $\vec{B}$ dans le sens où les termes $(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}$ et $(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$ ainsi que les termes $(\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$ et $(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{U}$ possèdent essentiellement la même structure.

Cette symétrie dans l'évolution des variables $\vec{U}$ et $\vec{B}$ peut être mise en lumière grâce au changement de variable suivant proposé par Elsasser dans [67] : si l'on définit les variables $\vec{u}$ et $\vec{b}$ par

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{B}, \quad \vec{b} = \vec{U} - \vec{B}, \tag{3.2}$$

et si l'on considère les forces

$$\vec{f} = \vec{F} + \vec{G} \quad \text{et} \quad \vec{g} = \vec{F} - \vec{G},$$

alors les équations (3.1) peuvent se réécrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}P + \vec{f}, \quad div(\vec{u}) = div(\vec{f}) = 0, \\ \partial_t \vec{b} = \Delta \vec{b} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} - \vec{\nabla}P + \vec{g}, \quad div(\vec{b}) = div(\vec{g}) = 0, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0(x), div(\vec{u}_0) = 0, \quad \vec{b}(0,x) = \vec{b}_0(x), div(\vec{b}_0) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Ce système souligne assez clairement le caractère symétrique des variables $\vec{u}$ et $\vec{b}$ dans leur évolution respective : la vitesse pour la variable $\vec{u}$ est donnée par le champ de vecteurs $\vec{b}$ et, réciproquement, la vitesse pour la variable $\vec{b}$ est donnée par le champ de vecteurs $\vec{u}$.

On remarquera également que la pression P vérifie l'équation

$$\Delta P = -\sum_{i,j=1}^{3} \partial_i\partial_j(u_i b_j), \tag{3.4}$$

et donc la pression P dépend uniquement des variables $(\vec{u}, \vec{b})$.

Le système MHD a été très étudié depuis plusieurs points de vue différents dans les dernières années, voir par exemple les références [9], [56], [74], [78], [79], [84], [83], [118].

Dans ce qui suit, nous allons généraliser les théories de régularité existantes sur ces équations en considérant comme outil principal les espaces de Morrey paraboliques : nous verrons alors dans les sections ci-dessous comment généraliser la théorie de régularité de Serrin et celle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg (présentées dans les Sections 2.2.2 et 2.2.3 du chapitre précédent pour les équations de Navier-Stokes).

3.2.1 Critère de Serrin pour le système magnéto-hydrodynamique

Un premier résultat que nous avons obtenu dans notre article [25] pour ces équations généralise le critère de Serrin aux espaces de Morrey pour ces équations. En effet, bien que de nombreuses études concernant la régularité soient disponibles pour les équations MHD, il manquait un traitement détaillé utilisant les espaces de Morrey paraboliques. Puisque ce cadre est important pour améliorer la compréhension du rôle de la pression dans ces théories de régularité (comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent), nous avons trouvé utile et intéressant de mettre en place une théorie de régularité locale avec ces espaces de fonctions et nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 3.2.1 *Soit* $\vec{u}_0, \vec{b}_0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tel que* $\vec{u}_0, \vec{b}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ *et* $div(\vec{u}_0) = div(\vec{b}_0) = 0$ *soit deux données initiales et considérons deux forces externes* $\vec{f}, \vec{g} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tel que* $\vec{f}, \vec{g} \in L^2([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$.

Supposons que $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *et que* $\vec{u}, \vec{b} : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *soient deux champs vectoriels qui appartiennent au espace*

$$L^\infty(]a, b[, L^2(B(x_0, r))) \cap L^2(]a, b[, \dot{H}^1(B(x_0, r))), \tag{3.5}$$

et qui satisfont les équations (3.3) sur l'ensemble $\Omega =]a, b[\times B(x_0, r)$.

Si de plus on a les hypothèses locales suivantes

$$\begin{cases} \mathbb{1}_\Omega \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{p_0,q_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) & \text{avec } 2 < p_0 \leq q_0, 5 < q_0 < +\infty \\ \mathbb{1}_\Omega \vec{b} \in \mathcal{M}_{t,x}^{p_1,q_1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) & \text{avec } 2 < p_1 \leq q_1, 5 < q_1 < +\infty, \end{cases} \tag{3.6}$$

et $p_1 \leq p_0$, $q_1 \leq q_0$, *alors pour tout* α, β *tel que* $a < \alpha < \beta < b$ *et pour tout* ρ *tel que* $0 < \rho < r$, *on a*

$$\vec{u} \in L^{q_0}(]\alpha, \beta[, L^{q_0}(B(x_0, \rho))) \quad \text{et} \quad \vec{b} \in L^{q_1}(]\alpha, \beta[, L^{q_1}(B(x_0, \rho))).$$

On notera que par ce résultat, on arrive à déduire un contrôle dans un espace de Lebesgue $L^{p,q}$ avec la condition de Serrin $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} \leq 1$ à partir d'une hypothèse dans des espaces de Morrey paraboliques. Ainsi, une fois que l'on dispose de cette condition *à la* Serrin pour ce système, il n'est pas très compliqué d'appliquer ce critère pour obtenir un gain de régularité pour les deux variables $\vec{u}$ et $\vec{b}$.

Indiquons que l'étude que l'on réalise ici est totalement symétrique par rapport aux deux variables $\vec{u}$ et $\vec{b}$, ceci est lié essentiellement à la structure des équations (3.3) qui se prête bien à cette approche.

La démonstration de ce résultat suit les grandes lignes de l'article [103] et les détails peuvent se consulter dans notre travail [25].

3.2.2 Théorie de Caffarelli-Kohn et Nirenberg pour le système magnétohydrodynamique

Nous nous intéressons maintenant à généraliser, toujours en utilisant le cadre des espaces de Morrey paraboliques, la théorie de régularité partielle pour les équations (3.3). En effet, soit Ω un domaine borné de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$, nous supposons les hypothèses (locales) suivantes :

$$\begin{aligned} &\vec{u},\vec{b}\in L^\infty_t L^2_x\cap L^2_t\dot{H}^1_x(\Omega),\\ &P\in L^{q_0}_{t,x}(\Omega) \text{ with } 1<q_0\leq \tfrac{3}{2},\\ &\vec{f},\vec{g}\in L^{\frac{10}{7}}_{t,x}(\Omega).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $P\in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\Omega)$, car cette seule condition implique les hypothèses $P\in L^{q_0}_{t,x}(\Omega)$ dans toute la plage de valeurs $1\leq q_0\leq \frac{3}{2}$.

La classe des solutions faibles est trop large pour nos objectifs et nous devons réduire l'ensemble des solutions admissibles et en fait nous ne travaillerons qu'avec un sous-ensemble très spécifique donné par la définition suivante.

Définition 3.2.1 (Solutions adaptées) *Soit $(\vec{u},P,\vec{b})$ une solution faible sur Ω des équations (3.3). Nous dirons que $(\vec{u},P,\vec{b})$ est une solution* adaptée *si la distribution μ donnée par l'expression*

$$\begin{aligned}\mu &= -\partial_t(|\vec{u}|^2+|\vec{b}|^2)+\Delta(|\vec{u}|^2+|\vec{b}|^2)-2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2+|\vec{\nabla}\otimes\vec{b}|^2)\\ &\quad -div\Big((|\vec{u}|^2+2P)\vec{b}+(|\vec{b}|^2+2P)\vec{u}\Big)+2(\vec{f}\cdot\vec{u}+\vec{g}\cdot\vec{b}),\end{aligned}$$

est une mesure positive localement bornée sur Ω.

Il convient de noter tout d'abord qu'à partir de l'ensemble des hypothèses (3.7), nous pouvons déduire que μ est bien défini en tant que distribution. Ensuite, on notera que dans l'expression de la quantité μ ci-dessus nous prenons en compte les deux variables $\vec{u}$ et $\vec{b}$ ainsi que la structure de leurs équations. On pourra parler alors de solutions *complètement* adaptées.

Une fois que l'on dispose de cette notion de solutions adaptées, nous pouvons énoncer le résultat principal de notre article [26] :

Théorème 3.2.2 *Soit Ω un domaine borné de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$. Soit $(\vec{u},P,\vec{b})$ une solution faible sur Ω des équations MHD* (3.3)*. Supposons les points suivants :*

1) $(\vec{u},\vec{b},P,\vec{f},\vec{g})$ vérifient les conditions (3.7),

2) $(\vec{u},P,\vec{b})$ est adaptée au sens de la Définition 3.2.1,

3) On a l'information locale suivante pour $\vec{f}$ et $\vec{g}$: $\mathbb{1}_\Omega\vec{f}\in\mathcal{M}^{\frac{10}{7},\tau_a}_{t,x}$ et $\mathbb{1}_\Omega\vec{g}\in\mathcal{M}^{\frac{10}{7},\tau_b}_{t,x}$ pour $\tau_a,\tau_b>\frac{5}{2-\alpha}$ avec $0<\alpha<\frac{1}{3}$.

Il existe une constante ϵ^* qui dépend uniquement de τ_a et τ_b telle que, si pour un point $(t_0,x_0)\in\Omega$, on a

$$\limsup_{r\to 0}\frac{1}{r}\iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B(x_0,r)}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2+|\vec{\nabla}\otimes\vec{b}|^2dxds<\epsilon^*, \tag{3.8}$$

alors la solution $(\vec{u}, \vec{b})$ *est Hölder régulière d'exposant* α *sur un voisinage de* (t_0, x_0) *(dans le sens de la Définition (2.2.1)) pour un exposant* α *dans l'intervalle* $0 < \alpha < \frac{1}{3}$.

On remarquera tout d'abord que les paramètres τ_a et τ_b qui définissent les espaces de Morrey pour les forces $\vec{f}$ et $\vec{g}$ sont liés à l'exposant α de régularité höldérien et cela est en quelque sorte assez naturel car les informations fournies par les forces extérieures n'interviennent pas dans les termes non linéaires et doivent être prises en compte. On notera maintenant que puisque $\frac{10}{7} \leq \frac{5}{2-\alpha} < \tau_a, \tau_b$, alors par Lemme 2.2.2 les conditions locales $\mathbb{1}_\Omega \vec{f} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{10}{7}, \tau_a}$ et $\mathbb{1}_\Omega \vec{g} \in \mathcal{M}_{t,x}^{\frac{10}{7}, \tau_b}$ sont plus fortes que les conditions $\vec{f}, \vec{g} \in L_{t,x}^{\frac{10}{7}}(\Omega)$ données dans (3.7). En effet, cette dernière condition est demandée pour pouvoir donner un sens à la mesure μ, mais pour obtenir un gain de régularité nous avons besoin d'avoir un peu plus d'informations et ceci explique cette hypothèse sur les forces.

De même qu'avec le Théorème 3.2.1 ci-dessus, cette théorie de la régularité pour les équations MHD n'était pas disponible dans la littérature en utilisant les espaces de Morrey paraboliques : ces deux résultats fournissent alors un cadre fonctionnel unifié pour les équations MHD qui pourra être exploité par la suite et c'est précisément ce que nous allons faire.

3.2.3 Solutions dissipatives pour le système magnéto-hydrodynamique

Une fois que nous avons développé dans le cadre des espaces de Morrey paraboliques les théories de régularité de Serrin et de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, il était assez tentant de généraliser la notion de solutions dissipatives introduites dans la Section 2.3 pour les équations de Navier-Stokes au système MHD (3.3).

Cette généralisation a été faite dans notre article [27] dont le théorème principal est le suivant :

Théorème 3.2.3 (Regularité et solutions dissipatives) *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}^3$ *et soit* $\rho > 0$*, on considère* $\Omega =]a, b[\times B(x_0, \rho)$ *un domaine borné de* $]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ *et soit* $(\vec{U}, P, \vec{B})$ *une solution faible sur* Ω *des équations MHD* (3.3)*. Supposons :*

1) *nous avons que* $(\vec{U}, \vec{B}, P, \vec{F}, \vec{G})$ *satisfait les conditions :*
$$\vec{U}, \vec{B} \in L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 \dot{H}_x^1(\Omega), \quad \vec{F}, \vec{G} \in L_t^2 H_x^1(\Omega), \quad P \in \mathcal{D}'(\Omega), \tag{3.9}$$
2) *que la solution* $(\vec{U}, P, \vec{B})$ *est dissipative,* c'est-à-dire, *la quantité*
$$\begin{aligned} M \;=\; & -\partial_t(|\vec{U}|^2 + |\vec{B}|^2) + \Delta(|\vec{U}|^2 + |\vec{B}|^2) - 2(|\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 + |\vec{\nabla} \otimes \vec{B}|^2 \\ & -2\langle div(P\vec{U})\rangle - div\left((|\vec{U}|^2 + |\vec{B}|^2)\vec{U}\right) + 2div((\vec{U} \cdot \vec{B})\vec{B}) + 2(\vec{F} \cdot \vec{U} + \vec{G} \cdot \vec{B}), \end{aligned} \tag{3.10}$$
est bien définie comme une distribution et est une mesure non négative localement finie sur Ω,

3) *il existe une constante positive* ϵ^* *telle que pour certains* $(t_0, x_0) \in \Omega$*, on a*
$$\limsup_{r \to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0 - r^2, t_0 + r^2[\times B(x_0, r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{U}|^2 + |\vec{\nabla} \otimes \vec{B}|^2 dxds < \epsilon^*, \tag{3.11}$$

alors on a le gain d'information
$$\begin{cases} \mathbb{1}_\Omega \vec{u} \in \mathcal{M}_{t,x}^{p_0, q_0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) & avec\ 2 < p_0 \leq q_0, 5 < q_0 < +\infty \\ \mathbb{1}_\Omega \vec{b} \in \mathcal{M}_{t,x}^{p_1, q_1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) & avec\ 2 < p_1 \leq q_1, 5 < q_1 < +\infty. \end{cases}$$

On remarquera d'abord que les hypothèses sur $\vec{U}, \vec{B}$ et $\vec{F}, \vec{G}$ énoncées dans le premier point du théorème correspondent à un cadre de travail désormais classique et peuvent être obtenues pour toute solution faible de type Leray du système (3.1), cependant nous supposons ici seulement que P est une distribution générale et ce fait implique qu'il faut définir de manière très précise la quantité M donnée dans (3.10) : en effet, comme cela a été expliqué dans le chapitre précédent, l'expression $\langle div(P\vec{U})\rangle$ doit être considérée comme une limite très particulière pour la rendre significative (voir la formule (3.19) ci-dessous). Ce point de vue général sur la pression constitue l'une des principales nouveautés de l'article [27] puisqu'il introduit une nouvelle classe de solutions pour les équations MHD, que l'on appellera des *solutions dissipatives* (comme pour la théorie des équations de Navier-Stokes) et permet de généraliser tous les résultats précédents liés à la théorie de la régularité partielle de telles équations.

On notera également que la conclusion du Théorème 3.2.3 ne fournit pas directement un résultat de régularité, mais donne plutôt un gain d'intégrabilité dans des espaces de Morrey paraboliques et cela est suffisant pour obtenir le gain de régularité souhaité (en effet, on pourra d'abord appliquer le Théorème 3.2.1 pour obtenir un deuxième gain d'intégrabilité dans des espaces de Lebesgue qui fournira alors directement le critère de Serrin nécessaire pour obtenir la régularité recherchée).

Pour finir, on remarquera que, dans le cadre du théorème précédent, si l'on note Σ_0 l'ensemble des points pour lesquels on a le comportement suivant

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r}\iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B(x_0,r)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{U}|^2+|\vec{\nabla}\otimes\vec{B}|^2 dxds \geq \varepsilon^*,$$

alors on peut montrer, par un lemme de recouvrement de Vitali relativement standard, que la mesure de Hausdorff parabolique de l'ensemble Σ_0 est nulle, ce qui signifie que cet ensemble de points irréguliers pour les équations MHD est en réalité très petit (voir la section 13.10 du livre [93] pour plus de détails concernant la mesure de Hausdorff parabolique).

La démonstration de ce résultat, qui suit essentiellement les grandes lignes du Théorème 2.3.1 présenté ci-dessus, peut se consulter dans notre article [27]. Nous allons toutefois donner quelques éléments de la preuve dans les lignes qui suivent.

On commence tout d'abord par utiliser le changement de variables d'Elsasser (3.2) pour obtenir le cadre de travail ci-dessous

$$\begin{aligned}
&\vec{u},\vec{b}\in L^\infty_t L^2_x\cap L^2_t\dot{H}^1_x(\Omega), \quad \vec{f},\vec{g}\in L^2_t H^1_x(\Omega), \quad P\in\mathcal{D}'(\Omega),\\
&\limsup_{r\to 0}\frac{1}{r}\iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B(x_0,r)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2+|\vec{\nabla}\otimes\vec{b}|^2 dxds < \epsilon^*, \qquad (t_0,x_0)\in\Omega,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

qui se déduit facilement de (3.2), (3.9) et (3.11) et où le point $(t_0, x_0) \in \Omega$ sera désormais fixé. On notera en particulier que pour les équations MHD (3.3), la distribution dissipative correspondante est donnée par

$$\begin{aligned}
\lambda \;=\; & -\partial_t(|\vec{u}|^2+|\vec{b}|^2)+\Delta(|\vec{u}|^2+|\vec{b}|^2)-2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2+|\vec{\nabla}\otimes\vec{b}|^2)\\
& -\langle div\big(P(\vec{u}+\vec{b})\big)\rangle - div(|\vec{u}|^2\vec{b}+|\vec{b}|^2\vec{u})+2(\vec{f}\cdot\vec{u}+\vec{g}\cdot\vec{b}).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Ainsi, avant toute chose, il est fondamental de donner un sens à cette expression (en particulier au terme $\langle div\big(P(\vec{u}+\vec{b})\big)\rangle$).

Pour cela, nous allons maintenant définir de nouvelles variables qui nous aideront non seulement à bien définir la quantité λ mais qui nous permettrons en plus d'obtenir un gain de régularité. En effet, en considérant un ensemble $\Omega_0 = I_0 \times B_{x_0,\rho_0} \subset \Omega$ de la forme (2.20) et avec une fonction localisante ψ donnée par l'expression (2.21) on définit les variables

$$\vec{v} := -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{u}), \quad \vec{h} := -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{b}), \tag{3.14}$$

et par les propriétés localisantes de ψ ainsi que par les conditions de divergence nulle pour $\vec{u}$ et $\vec{b}$, nous avons alors les identités (locales)

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{u}, \quad \text{et} \quad \Delta\vec{h} = \Delta\vec{b}. \tag{3.15}$$

Nous avons alors les propriétés suivantes :

Proposition 3.2.1 *Supposons que $\vec{u}, \vec{b} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x(\Omega)$, alors les fonctions $\vec{v}, \vec{h}$ définies par la formule* (3.14) *satisfont les deux faits suivants :*

1) les fonctions $\vec{v}$ et $\vec{h}$ sont à divergence nulle : $div(\vec{v}) = 0$ et $div(\vec{h}) = 0$,

2) nous avons $\vec{v}, \vec{h} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t H^1_x(Q_{\rho_0})$,

3) de plus si l'on définit les fonctions $\vec{\beta}$ et $\vec{\gamma}$ par

$$\vec{\beta} := \vec{u} - \vec{v} \qquad \textit{et} \qquad \vec{\gamma} := \vec{b} - \vec{h}, \tag{3.16}$$

nous avons la propriété fondamentale $\vec{\beta}, \vec{\gamma} \in L^\infty_t Lip_x(Q_{\rho_0})$.

En suivant les étapes détaillées dans les pages 41 et 43 nous obtenons les équations suivantes pour la dynamique des fonctions $\vec{v}$ et $\vec{h}$:

$$\begin{cases} \partial_t\vec{v} = \Delta\vec{v} - (\vec{h}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}q + \vec{k}, \\ \partial_t\vec{h} = \Delta\vec{h} - (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{h} - \vec{\nabla}r + \vec{l}. \end{cases} \tag{3.17}$$

où les fonctions $q, r, \vec{k}$ et $\vec{l}$ satisfont les propriétés suivantes

1) $q \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\Omega_0)$ et $r \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\Omega_0)$,

2) $div(\vec{k}) = 0$, $div(\vec{l}) = 0$ et $\vec{k} - \vec{k}_0 \in L^2_{t,x}(\Omega_0)$ and $\vec{l} - \vec{l}_0 \in L^2_{t,x}(\Omega_0)$, où

$$\vec{k}_0 = -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) \qquad \text{and} \qquad \vec{l}_0 := -\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla} \wedge (\psi\vec{\nabla} \wedge \vec{g}), \tag{3.18}$$

Le système (3.17) satisfait par le couple $(\vec{v}, \vec{h})$ est très similaire au problème (3.3) du couple $(\vec{u}, \vec{b})$, cependant il existe des différences assez profondes entre ces deux équations. En effet :

- La principale caractéristique des équations (3.17) réside dans le fait que les termes $\vec{\nabla}q$ et $\vec{\nabla}r$, qui peuvent être considérés comme des nouvelles pressions, *ne dépendent pas* de la pression initiale P.
- Les "nouvelles pressions" q et r dans (3.17) vérifient $q, r \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}$, ce qui donne une information très utile pour ce système et qui sera exploitée pour obtenir le résultat recherché (tout d'abord donner un sens à l'expression (3.13) puis obtenir de la régularité).

Avec toutes ces informations, nous allons considérer la limite

$$\langle div\big(P(\vec{u}+\vec{b})\big)\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} div\left(P*\varphi_{\alpha,\varepsilon}(\vec{u}*\varphi_{\alpha,\varepsilon}+\vec{b}*\varphi_{\alpha,\varepsilon})\right), \tag{3.19}$$

où la fonction $\varphi_{\alpha,\varepsilon}$ a été définie dans la formule (2.32). Ainsi, si l'on note

$$\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}=\vec{u}*\phi_{\alpha,\varepsilon},\ \vec{b}_{\alpha,\varepsilon}=\vec{b}*\phi_{\alpha,\varepsilon},\ P_{\alpha,\varepsilon}=P*\phi_{\alpha,\varepsilon},\ \vec{f}_{\alpha,\varepsilon}=\vec{f}*\phi_{\alpha,\varepsilon}\quad\text{et}\quad \vec{g}_{\alpha,\varepsilon}=\vec{g}*\phi_{\alpha,\varepsilon},$$

on obtient en étudiant la dynamique des variables $\vec{u}$ et $\vec{b}$ l'expression

$$\begin{aligned}\partial_t(|\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2+|\vec{b}_{\alpha,\varepsilon}|^2)&=\Delta(|\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2+|\vec{b}_{\alpha,\varepsilon}|^2)-2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}|^2+|\vec{\nabla}\otimes\vec{b}_{\alpha,\varepsilon}|^2)\\ div\left(P_{\alpha,\varepsilon}(\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}+\vec{b}_{\alpha,\varepsilon})\right)&-2\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\left((\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\vec{u})*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)-2\vec{b}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{b})*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\\ &+2(\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\vec{f}_{\alpha,\varepsilon}+\vec{b}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\vec{g}_{\alpha,\varepsilon}),\end{aligned} \tag{3.20}$$

et pour les variables $\vec{v}$ et $\vec{h}$ on a également :

$$\begin{aligned}\partial_t(|\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}|^2+|\vec{h}_{\alpha,\varepsilon}|^2)&=\Delta(|\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}|^2+|\vec{h}_{\alpha,\varepsilon}|^2)-2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}|^2+|\vec{\nabla}\otimes\vec{h}_{\alpha,\varepsilon}|^2)\\ -2div\left(q_{\alpha,\varepsilon}\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}+r_{\alpha,\varepsilon}\vec{h}_{\alpha,\varepsilon}\right)&-2\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\left((\vec{h}\cdot\vec{\nabla}\vec{v})*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)-2\vec{h}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\left((\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{h})*\varphi_{\alpha,\varepsilon}\right)\\ &+2(\vec{v}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\vec{k}_{\alpha,\varepsilon}+\vec{h}_{\alpha,\varepsilon}\cdot\vec{l}_{\alpha,\varepsilon}).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Le passage à la limite $\alpha\to 0$ n'est pas très difficile à obtenir et l'on a pour (3.20) et (3.21)

$$\begin{aligned}\partial_t(|\vec{u}_\varepsilon|^2+|\vec{b}_\varepsilon|^2)&=\Delta(|\vec{u}_\varepsilon|^2+|\vec{b}_\varepsilon|^2)-2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}_\varepsilon|^2+|\vec{\nabla}\otimes\vec{b}_\varepsilon|^2)-2\vec{u}_\varepsilon\cdot\left((\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\vec{u})*\varphi_\varepsilon\right)\\ &-2\vec{b}_\varepsilon\cdot\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{b})*\varphi_\varepsilon\right)-2\lim_{\alpha\to 0}div\left(P_{\alpha,\varepsilon}(\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}+\vec{b}_{\alpha,\varepsilon})\right)+2(\vec{u}_\varepsilon\cdot\vec{f}_\varepsilon+\vec{b}_\varepsilon\cdot\vec{g}_\varepsilon).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t(|\vec{v}_\varepsilon|^2+|\vec{h}_\varepsilon|^2)&=\Delta(|\vec{v}_\varepsilon|^2+|\vec{h}_\varepsilon|^2)-2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}_\varepsilon|^2+|\vec{\nabla}\otimes\vec{h}_\varepsilon|^2)-2\vec{v}_\varepsilon\cdot\left((\vec{h}\cdot\vec{\nabla}\vec{v})*\varphi_\varepsilon\right)\\ &-2\vec{h}_\varepsilon\cdot\left((\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{h})*\varphi_\varepsilon\right)-2div\left((q*\varphi_\varepsilon)\vec{v}_\varepsilon+(r*\varphi_\varepsilon)\vec{h}_\varepsilon\right)+2(\vec{v}_\varepsilon\cdot\vec{k}_\varepsilon+\vec{h}_\varepsilon\cdot\vec{l}_\varepsilon)\end{aligned}$$

On notera en particulier que puisque l'on a $P\in\mathcal{D}'$, la limite $\lim_{\alpha\to 0}div\left(P_{\alpha,\varepsilon}(\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}+\vec{b}_{\alpha,\varepsilon})\right)$ se maintient tandis que l'on peut passer à la limite dans les nouvelles pressions q et r (car on a $q,r\in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(\Omega_0)$).

On passe maintenant à la limite $\varepsilon,\alpha\to 0$, et pour cela on introduit les distributions :

$$\begin{aligned}&\mu_\varepsilon=2\vec{u}_\varepsilon\cdot\left((\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\vec{u})*\varphi_\varepsilon\right)+2\vec{b}_\varepsilon\cdot\left((\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\vec{b})*\varphi_\varepsilon\right)-div(|\vec{u}|^2\vec{b}+|\vec{b}|^2\vec{u})\\ &\quad et\\ &\eta_\varepsilon=2\vec{v}_\varepsilon\cdot\left((\vec{h}\cdot\vec{\nabla}\vec{v})*\varphi_\varepsilon\right)+2\vec{h}_\varepsilon\cdot\left((\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\vec{h})*\varphi_\varepsilon\right)-div(|\vec{v}|^2\vec{h}+|\vec{h}|^2\vec{v}).\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ainsi, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\partial_t(|\vec{u}|^2+|\vec{b}|^2)&=\Delta(|\vec{u}|^2+|\vec{b}|^2)-2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2+|\vec{\nabla}\otimes\vec{b}|^2)-div(|\vec{u}|^2\vec{b}+|\vec{b}|^2\vec{u})\\ &-2\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0}div\left(P_{\alpha,\varepsilon}(\vec{u}_{\alpha,\varepsilon}+\vec{b}_{\alpha,\varepsilon})\right)-\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon+2(\vec{u}\cdot\vec{f}+\vec{b}\cdot\vec{g}),\end{aligned} \tag{3.23}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_t(|\vec{v}|^2+|\vec{h}|^2)&=\Delta(|\vec{v}|^2+|\vec{h}|^2)-2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2+|\vec{\nabla}\otimes\vec{h}|^2)-div(|\vec{v}|^2\vec{h}+|\vec{h}|^2\vec{v})\\ &-2div\left(q\vec{v}+r\vec{h}\right)-\lim_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon+2(\vec{v}\cdot\vec{k}+\vec{h}\cdot\vec{l}).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Nous pouvons alors écrire

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mu_\varepsilon - \eta_\varepsilon) + 2\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} div\left(P_{\alpha,\varepsilon}(\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} + \vec{b}_{\alpha,\varepsilon})\right) = -\partial_t(|\vec{u}|^2 + |\vec{b}|^2) + \Delta(|\vec{u}|^2 + |\vec{b}|^2)$$
$$-2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 + |\vec{\nabla}\otimes\vec{b}|^2) - div(|\vec{u}|^2\vec{b} + |\vec{b}|^2\vec{u}) + 2(\vec{u}\cdot\vec{f} + \vec{b}\cdot\vec{g}) + \partial_t(|\vec{v}|^2 + |\vec{h}|^2) - \Delta(|\vec{v}|^2 + |\vec{h}|^2)$$
$$+2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2 + |\vec{\nabla}\otimes\vec{h}|^2) + div(|\vec{v}|^2\vec{h} + |\vec{h}|^2\vec{v}) + 2div\left(q\vec{v} + r\vec{h}\right) - 2(\vec{v}\cdot\vec{k} + \vec{h}\cdot\vec{l}).$$

On remarquera que tous les termes de droite sont bien définis, de sorte que pour conclure nous aurons besoin du résultat suivant (dont la démonstration peut se consulter dans notre article [27]) :

Proposition 3.2.2 *Nous avons la limite*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon - \eta_\varepsilon = 0. \tag{3.25}$$

Cette proposition nous permet alors d'écrire l'identité

$$\begin{aligned} 2\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\alpha\to 0} div\left(P_{\alpha,\varepsilon}(\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} + \vec{b}_{\alpha,\varepsilon})\right) \quad = \quad & -\partial_t(|\vec{u}|^2 + |\vec{b}|^2) + \Delta(|\vec{u}|^2 + |\vec{b}|^2) \\ & -2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 + |\vec{\nabla}\otimes\vec{b}|^2) - div(|\vec{u}|^2\vec{b} + |\vec{b}|^2\vec{u}) \\ & +2(\vec{u}\cdot\vec{f} + \vec{b}\cdot\vec{g}) + \partial_t(|\vec{v}|^2 + |\vec{h}|^2) - \Delta(|\vec{v}|^2 + |\vec{h}|^2) \\ & +2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2 + |\vec{\nabla}\otimes\vec{h}|^2) + div(|\vec{v}|^2\vec{h} + |\vec{h}|^2\vec{v}) \\ & +2div\left(q\vec{v} + r\vec{h}\right) - 2(\vec{v}\cdot\vec{k} + \vec{h}\cdot\vec{l}), \end{aligned}$$

ce qui montre l'existence de la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{\alpha\to 0} div\left(P_{\alpha,\varepsilon}(\vec{u}_{\alpha,\varepsilon} + \vec{b}_{\alpha,\varepsilon})\right)$ dans $\mathcal{D}'$.

Nous avons donc montré que la quantité M définie dans l'expression (3.10) a bien un sens et maintenant nous allons la supposer positive (en tant que mesure borélienne) ce qui correspond avec la notion de solutions dissipatives.

Ainsi, si l'on note

$$\begin{aligned} \lambda \quad = \quad & -\partial_t(|\vec{u}|^2 + |\vec{b}|^2) + \Delta(|\vec{u}|^2 + |\vec{b}|^2) - 2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 + |\vec{\nabla}\otimes\vec{b}|^2) - div(|\vec{u}|^2\vec{b} + |\vec{b}|^2\vec{u}) \\ & -2\langle div\big(P(\vec{u} + \vec{b})\big)\rangle + 2(\vec{f}\cdot\vec{u} + \vec{g}\cdot\vec{b}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon \end{aligned}$$

on a donc par hypothèse de dissipativité $\lambda \geq 0$. Mais on a (par la Proposition 3.2.2) que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon$, et il est alors facile de constater que la quantité

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\eta_\varepsilon = & -\partial_t(|\vec{v}|^2 + |\vec{h}|^2) + \Delta(|\vec{v}|^2 + |\vec{h}|^2) - 2(|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}|^2 + |\vec{\nabla}\otimes\vec{h}|^2) - div(|\vec{v}|^2\vec{h} + |\vec{h}|^2\vec{v}) \\ & - 2div(q\vec{v} + r\vec{h}) + 2(\vec{v}\cdot\vec{k} + \vec{h}\cdot\vec{l}), \end{aligned}$$

est une mesure borélienne localement finie non négative, ce qui implique le caractère *adapté* des variables $(\vec{v}, \vec{h})$. Maintenant, l'hypothèse (3.11) de petits gradients se transmets sur les variables $\vec{v}$ et $\vec{h}$ car on a l'identité

$$\begin{aligned} & \limsup_{r\to 0}\frac{1}{r}\iint_{Q_r}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\,(s,y)|^2 + |\vec{\nabla}\otimes\vec{b}\,(s,y)|^2 dyds \\ = & \limsup_{r\to 0}\frac{1}{r}\iint_{Q_r}|\vec{\nabla}\otimes\vec{v}\,(s,y)|^2 + |\vec{\nabla}\otimes\vec{h}\,(s,y)|^2 dyds. \end{aligned}$$

Dans ce cadre de travail, on obtient alors que les variables $\vec{v}$ et $\vec{h}$ vérifient toutes les hypothèses nécessaires pour appliquer la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg : ces variables sont donc Hölder régulières dans un petit voisinage du point (t_0, x_0) et en particulier elles appartiennent aux espaces de Morrey $\mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}$ pour un certain $\tau_0 > 5$.

Nous allons voir maintenant comme ce gain de régularité sur les variables $\vec{v}$ et $\vec{h}$ peut se transmettre en un gain d'information Morrey aux variables initiales $\vec{u}$ et $\vec{b}$. En effet, par la propriété (3.16) nous avons $\vec{\beta} = \vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{\gamma} = \vec{b} - \vec{h}$ avec $\vec{\beta}, \vec{\gamma} \in L_t^\infty Lip_x(Q_{\rho_0})$. Ainsi nous écrivons $\vec{u} = \vec{\beta} + \vec{v}$ et

$$\|\mathbb{1}_{Q_{R_0}}\vec{u}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}} \leq \|\mathbb{1}_{Q_{R_0}}\vec{v}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}} + \|\mathbb{1}_{Q_{R_0}}\vec{\beta}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}} \leq \|\mathbb{1}_{Q_{R_0}}\vec{v}\|_{\mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}} + \|\vec{\beta}\|_{L_{t,x}^\infty(Q_{R_0})} < +\infty,$$

où nous avons utilisé l'inclusion $L_{t,x}^\infty(Q_{R_0}) \subset L_{t,x}^{\tau_0}(Q_{R_0})$. Par exactement les mêmes calculs, on a également $\mathbb{1}_{Q_{R_0}}\vec{b} \in \mathcal{M}_{t,x}^{3,\tau_0}$, et l'on obtient donc un gain d'information sur les variables $\vec{u}$ et $\vec{b}$ en termes d'espaces de Morrey paraboliques. Le Théorème 3.2.3 est maintenant démontré. ■

Voyons à présent comment obtenir un gain de régularité à partir de cette information Morrey : en effet, à partir du résultat précédent nous pouvons invoquer le Théorème 3.2.1 pour obtenir un gain d'intégrabilité en terme d'espaces de Lebesgue qui à son tour fournira un gain de régularité en variable spatiale en appliquant le critère de Serrin usuel.

Nous voyons ainsi comment il est possible de généraliser les théories de régularité de Serrin et de Caffarelli, Kohn et Nirenberg en introduisant le concept de solutions dissipatives pour les équations de la MHD. Comme cela a été dit ci-dessus, cette étude est totalement symétrique dans le sens où les hypothèses demandées sur les deux variables sont de même nature. Une étude plus approfondie de ce système permettrait éventuellement de dissocier ces deux variables en exigeant peut être moins d'informations sur une des deux variables, mais nous n'avons pas eu le temps d'explorer cette idée pour ce système, mais nous l'avons fait pour les équations de Boussinesq comme nous allons le voir dans la section suivante.

3.3 Les équations de Boussinesq

Nous considérons maintenant les équations de Boussinesq en dimension trois :

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p + \theta e_3, \quad div(\vec{u}) = 0, \\ \partial_t\theta = \Delta\theta - \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\theta, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0(x), \ div(\vec{u}_0) = 0, \quad \theta(0,x) = \theta_0(x). \end{cases} \tag{3.26}$$

Ici, $\vec{u} : [0, +\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteur à divergence nulle, $p : [0, +\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la pression du système et $\theta : [0, +\infty[\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la température et l'on a $e_3 = (0, 0, 1)^t$. On remarquera sans problème que si $\theta \equiv 0$ alors on récupère les équations de Navier-Stokes incompressibles usuelles.

Le système Boussinesq (en 2D ou 3D) a été largement étudié sous de nombreux points de vue, voir [8], [10] et [64] pour les résultats d'existence, [5] pour le comportement en grand temps ainsi que [10], [70], [77] et [81] pour certaines propriétés de régularité.

Dans cette section nous nous concentrerons sur le cas 3D qui, par sa proximité avec le problème de Navier-Stokes, est légèrement plus délicat à traiter (en termes de problèmes de régularité) que le cas 2D. Le système de Boussinesq est bien entendu différent des équations de Navier-Stokes : en effet, la présence de la température θ dans la première équation de (3.26) et le couplage via le terme de transport $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\theta$ dans la deuxième équation induisent des modifications intéressantes. Par exemple, en appliquant l'opérateur de divergence à la première équation de (3.26) on obtient la relation suivante

$$-\Delta p = div\big(div(\vec{u}\otimes\vec{u})\big) - \partial_{x_3}\theta, \tag{3.27}$$

ce qui donne une équation pour la pression différente de celle du problème de Navier-Stokes puisque pour récupérer la pression p nous avons besoin des *deux* variables $\vec{u}$ et θ. Une autre différence est liée aux inégalités d'énergie : à partir de données initiales $\vec{u}_0, \theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et pour un temps fixe $0 < T^* < +\infty$ on peut construire des solutions faibles $(\vec{u},\theta) \in L^\infty([0,T^*], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T^*], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ qui satisfont les inégalités d'énergie suivantes (valables pour tous $0 < t < T^*$)

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds \leq C(\|\vec{u}_0\|_{L^2}^2 + t^2\|\theta_0\|_{L^2}^2) \tag{3.28}$$

$$\|\theta(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\vec{\nabla}\theta(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds \leq \|\theta_0\|_{L^2}^2, \tag{3.29}$$

mais ici l'estimation (3.28) n'est *pas* uniforme dans le temps et ce fait peut poser quelques problèmes lors de l'étude de solutions globales. Voir par exemple [5], [8] et [64] pour plus de détails concernant les problèmes d'existence.

Concernant les théories de régularité, le célèbre critère de Caffarelli-Kohn-Nirenberg pour le système de Navier-Stokes (voir [6]) a été étendu dans [77] à l'équation de Boussinesq. Cette théorie repose sur la notion de *solutions adaptées* qui sont, grosso modo, des solutions faibles satisfaisant une inégalité énergétique locale. Notons que dans l'ouvrage [77] mentionné, la condition d'adaptabilité est imposée aux variables $\vec{u}$ et θ de manière symétrique comme cela a été fait dans la section précédente pour les équations de la MHD.

Nous allons montrer ici que cette condition sur les deux variables est redondante et qu'il suffit de considérer un certain comportement pour le champ de vitesse $\vec{u}$ uniquement : ce fait nous amènera à la notion de *solutions partiellement adaptées* et avec l'aide de ce concept nous verrons comment en déduire un gain de régularité pour les *deux* variables.

Définition 3.3.1 (Solutions partiellement adaptées) *Considérons $\vec{u},\theta \in L^\infty_t L^2_x(Q_R) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_R)$ deux fonctions qui satisfont faiblement l'équation (3.26) sur la boule parabolique Q_R (de la forme (2.3)). Supposons de plus que nous disposons de l'information locale $p \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(Q_R)$ sur la pression.*

Nous dirons alors que $(\vec{u},p,\theta)$ est une solution partiellement adaptée *pour l'équation de Boussinesq (3.26) si la distribution μ donnée par l'expression*

$$\mu = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \Delta|\vec{u}|^2 - 2|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 - div\left((|\vec{u}|^2+2p)\vec{u}\right) + \theta e_3\cdot\vec{u}, \tag{3.30}$$

est une mesure positive localement bornée sur Q_R.

La condition $p \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}$ est assez classique et la contribution de la variable θ via la relation (3.27) ne provoque aucune interférence car nous avons $\theta \in L^\infty_t L^2_x(Q_R) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_R)$. On remarquera ensuite que l'expression de la quantité μ donnée ci-dessus suit la première équation du système (3.26), mais ne fait pas intervenir la deuxième équation qui donne l'évolution de la variable θ.

Nous verrons alors que cette notion de solution *partiellement* adaptée sera utile pour déduire certaines inégalités d'énergie locales pour le champ de vitesse $\vec{u}$, mais nous n'avons pas besoin d'imposer une condition similaire à la variable θ, qui peut être considérée en première lecture comme une simple force externe sans divergence.

Avec ce concept, il est en particulier possible d'obtenir un gain de régularité pour les deux variables $\vec{u}$ et θ comme nous l'indique le résultat qui suit et qui a été publié dans notre article [51] :

Théorème 3.3.1 *Considérons $(\vec{u}, p, \theta)$ une solution partiellement adaptée pour l'équation de Boussinesq (3.26) au sens de la Définition 3.3.1. Il existe une petite constante $0 < \epsilon^* \ll 1$ telle que si pour un certain point $(t_0, x_0) \in Q_R$, où Q_R est une boule parabolique donnée dans (2.3), nous avons*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2,t_0+r^2[\times B(x_0,r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dxds < \epsilon^*, \tag{3.31}$$

alors, la solution $(\vec{u}, \theta)$ est Hölder continue dans le temps et dans l'espace pour un exposant $0 < \alpha < \frac{1}{24}$ dans un petit voisinage du point (t_0, x_0).

On notera d'abord qu'en plus de la condition d'adaptabilité partielle, nous n'avons besoin que d'une condition de petitesse pour le gradient du champ de vitesse $\vec{u}$ (énoncé dans l'hypothèse (3.31) ci-dessus), mais qu'aucune contrainte particulière n'est demandée pour la variable θ. Remarquons ensuite que dans ce contexte on peut obtenir un gain (local) de régularité pour les deux variables $\vec{u}$ et θ : lorsqu'on traite des problèmes de régularité on peut ainsi observer que la variable $\vec{u}$ *domine* la variable θ, dans le sens où l'on peut déduire certaines informations de régularité sur la variable θ à partir du comportement de la variable $\vec{u}$.

Pour cela, nous allons concentrer maintenant notre étude sur la variable $\vec{u}$ uniquement, dont l'équation est

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \theta e_3, \qquad div(\vec{u}) = 0.$$

Ici, la variable θ peut être vue comme une force extérieure pour laquelle nous avons l'information $\theta \in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$, on notera que par interpolation nous avons aussi

$$\theta \in L^{\frac{10}{3}}_{t,x}([0, T] \times \mathbb{R}^3), \tag{3.32}$$

de sorte que localement nous avons l'information $\theta \in L^{\frac{10}{3}}_{t,x} \subset L^{\frac{10}{7}}_{t,x}$ de sorte que ce terme vérifie les hypothèses demandées jusqu'ici pour les forces extérieures (voir par exemple le premier point du Théorème 2.2.1, le deuxième point du Théorème 2.3.1 ou encore les hypothèses (3.8)).

Notre objectif est alors d'obtenir un maximum d'informations sur $\vec{u}$ pour ensuite voir comment cette information peut se réinjecter dans la deuxième équation du système (3.26) pour obtenir ainsi un gain d'information sur θ. Dans ce sens un premier résultat est le suivant

Proposition 3.3.1 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3.1 considérons $(\vec{u}, p, \theta)$ une solution partielle adaptée pour les équations de Boussinesq (3.26) sur une boule parabolique Q_R. Alors* *il existe un rayon* $0 < R_1 < \frac{R}{2}$ *et un indice* τ_0 *tel que* $\frac{5}{1-\alpha} < \tau_0 < 6$ *(rappelons que* $0 < \alpha < \frac{1}{24}$*) de sorte que l'on a les informations Morrey locales suivantes :*

$$\mathbb{1}_{Q_{R_1}(t_0,x_0)}\vec{u} \in \mathcal{M}^{3,\tau_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3), \tag{3.33}$$

où le point $(t_0, x_0) \in Q_R$ *est donné par l'hypothèse (3.31).*

Ce résultat donne un petit gain d'intégrabilité sur la variable $\vec{u}$ uniquement mais ceci n'est bien sûr pas suffisant et il faut répéter les arguments ci-dessus afin d'obtenir un meilleur contrôle. Cette itération est possible jusqu'à un certain seuil maximal qui dépend de l'information de base disponible sur la variable θ ainsi que de l'expression de la pression p qui est donnée par la formule (3.27) et on peut alors montrer que l'on a

$$\mathbb{1}_{Q_R(t_0,x_0)}\vec{u} \in \mathcal{M}^{3,310}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_{Q_R(t_0,x_0)}\vec{\nabla} \otimes \vec{u} \in \mathcal{M}^{2,\tau_1}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3), \tag{3.34}$$

nous avons donc suffisamment d'informations sur la variable $\vec{u}$ pour réaliser les calculs qui concernent la variable θ et nous avons :

Proposition 3.3.2 *Sous les hypothèses générales du Théorème 3.3.1, si nous avons les contrôles (3.34) sur* $\vec{u}$ *(en plus de l'information* $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$*) alors, si nous considérons l'équation d'évolution de la variable* θ

$$\partial_t \theta = \Delta\theta - \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\theta,$$

nous obtenons le contrôle :

$$\mathbb{1}_{Q_R(t_0,x_0)}\theta \in \mathcal{M}^{\frac{12}{5},\frac{50}{9}}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3),$$

sur un petit voisinage du point (t_0, x_0) *donné dans l'énoncé du Théorème 3.3.1.*

La démonstration de cette proposition est relativement directe : avec toutes les informations disponibles sur $\vec{u}$ et sur θ et en localisant convenablement les variables autour du point (t_0, x_0), la dynamique de la variable θ est donnée localement par un équation de la chaleur avec une "force extérieure" (qui dépend de $\vec{u}$ et de θ) sur laquelle on dispose d'assez d'informations pour mener à bien les contrôles dans le sens de la norme Morrey recherchée. Tous les détails techniques peuvent se consulter dans notre article [51].

Une fois que l'on dispose des Propositions 3.3.1 et 3.3.2 ainsi que des contrôles (3.34), on peut donner les lignes générales de la démonstration du Théorème 3.3.1 et l'on commence tout d'abord par introduire une fonction localisante $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que *supp*$(\phi) \subset]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\times B(0, \frac{1}{2})$ et $\phi \equiv 1$ sur $]-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}[\times B(0, \frac{1}{4})$. On considère ensuite un rayon $0 < \mathbf{R} < R$ assez petit puis l'on définit

$$\eta(t, x) = \phi\left(\frac{t - t_0}{\mathbf{R}^2}, \frac{x - x_0}{\mathbf{R}}\right).$$

Ainsi, à l'aide de cette fonction régulière et localisante, on introduit les deux variables suivantes

$$\vec{\mathcal{U}} = \eta\vec{u} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{O} = \eta\theta,$$

dont les dynamiques respectives sont données par les équations

$$\partial_t\vec{\mathcal{U}} = \Delta\vec{\mathcal{U}} + (\partial_t\eta + \Delta\eta)\vec{u} - 2\sum_{i=1}^{3} \partial_i((\partial_i\eta)(\vec{u})) - div(\eta\vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{u} \otimes \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\eta - \eta\vec{\nabla}p + \eta\theta e_3, \tag{3.35}$$

et

$$\partial_t\mathcal{O} = \Delta\mathcal{O} + (\partial_t\eta + \Delta\eta)\theta - 2\sum_{i=1}^{3} \partial_i\big((\partial_i\eta)\theta\big) - div(\eta\vec{u}\theta) + (\vec{\nabla}\eta) \cdot (\vec{u}\theta). \tag{3.36}$$

Afin de rendre ces équations plus compactes, nous introduisons le vecteur $(3+1)$

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{\mathcal{U}} \\ \mathcal{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta\vec{u} \\ \eta\theta \end{bmatrix},$$

ainsi avec les équations (3.35) et (3.36) on obtient le système

$$\begin{cases} \partial_t \vec{V} = \Delta\vec{V} + \vec{A} - 2\sum_{i=1}^{3}\partial_i\vec{B} - div(\mathscr{C}) + \vec{D} - \vec{E} + \vec{F}, \\ \vec{V}(0,x) = 0. \end{cases} \tag{3.37}$$

où les vecteurs $\vec{A}, ..., \vec{H}$ sont définis par

$$\begin{aligned} &\vec{A} = (\partial_t\eta + \Delta\eta)\begin{bmatrix} \vec{u} \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} (\partial_i\eta)\vec{u} \\ (\partial_i\eta)\theta \end{bmatrix}, \quad \mathscr{C} = \begin{bmatrix} \eta\vec{u}\otimes\vec{u} \\ \eta\vec{u}\theta \end{bmatrix}, \\ &\vec{D} = \begin{bmatrix} \vec{u}\otimes\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\eta \\ (\vec{\nabla}\eta)\cdot(\vec{u}\theta) \end{bmatrix}, \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} \eta\vec{\nabla}p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \eta\theta e_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

on notera bien sûr que le terme $\mathscr{C}$ n'est pas exactement un vecteur $(3+1)$ (le premier composant est un tenseur) et la quantité $div(\mathscr{C})$ doit être comprise dans le sens suivant : $div(\mathscr{C}) = \begin{bmatrix} div(\eta\vec{u}\otimes\vec{u}) \\ div(\eta\vec{u}\theta) \end{bmatrix}$ et ce léger abus de notation peut être facilement compris si l'on travaille composante par composante.

Ainsi, par la formule de Duhamel, la solution de l'équation (3.37) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\vec{V}(t,x) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left(\vec{A} - 2\sum_{i=1}^{3}\partial_i\vec{B} - div(\mathscr{C}) + \vec{D} - \vec{E} + \vec{F}\right)ds. \tag{3.39}$$

Nous allons donc appliquer le Lemme 2.2.4 à ce système et obtenir de la sorte un gain de régularité parabolique : pour cela il suffira de prouver que les quantités $\vec{A}, ..., \vec{F}$, définies dans (3.38) satisfont des bons contrôles en termes d'espaces de Morrey. C'est ici que nous invoquons les résultats obtenus précédemment dans les Propositions 3.3.1 et 3.3.2 ainsi que dans (3.34) : nous disposons d'assez d'information pour obtenir le gain de régularité recherché et la preuve du Théorème 3.3.1 est terminée ■

Avec cette nouvelle notion de solutions partiellement adaptées, nous voyons qu'il n'est pas nécessaire de demander le même comportement pour les deux variables $\vec{u}$ et θ pour obtenir un gain (local) de régularité. Il suffit en fait d'imposer certaines conditions uniquement sur la vitesse $\vec{u}$ pour en déduire, par une étude séparée des dynamiques de ces variables, un gain d'information de type Morrey sur $\vec{u}$ qui peut se transmettre à la variable θ (toujours en norme Morrey) pour finalement obtenir le gain de régularité souhaité. On dira donc que la variable $\vec{u}$ "domine" la variable θ et cette domination est naturelle dans le sens où la vitesse $\vec{u}$ intervient dans le transport de la température θ tandis que la variable θ peut être vue tout simplement comme une force extérieure dans la dynamique de $\vec{u}$.

3.4 Les équations micro-polaires

Les équations micro-polaires modélisent des fluides incompressibles avec des micro-structures influençant la dynamique du fluide, ce système, initialement proposé par Eringen en 1966 [68], est constitué par un couplage entre les équations de Navier-Stokes et une équation sur la vitesse de micro-rotation :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla} p + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{w} + \vec{f}, \qquad div(\vec{u}) = 0, \quad div(\vec{f}) = 0, \\ \partial_t \vec{w} = \Delta \vec{w} + \vec{\nabla} div(\vec{w}) - \vec{w} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \wedge \vec{u}, \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0(x), \;\; div(\vec{u}_0) = 0, \quad \vec{w}(0,x) = \vec{w}_0(x), \; x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{3.40}$$

Ici $\vec{u}$ représente la vitesse du fluide, p la pression associée, $\vec{w}$ la vitesse de la micro-structure ou vitesse des micro-rotations, et $\vec{f}$ est une force extérieure. Ce système d'équations a été étudié par de nombreux auteurs pour obtenir différents types de résultats (existence de solutions mild, faibles ou encore des propriétés d'unicité fort-faible ainsi que des problèmes de régularité) voir par exemple [4], [38], [72], [96], [97], [98], [99], [119].

Une particularité de ces équations réside sur le fait que la variable $\vec{w}$ *n'est pas à divergence nulle*, et donc son analyse ne peut se faire de la même manière que pour la vitesse $\vec{u}$. Cette propriété rend son étude assez différente des autres systèmes d'équations basés sur les équations de Navier-Stokes que nous avons étudié dans les sections précédentes (comme les équations magnéto-hydrodynamiques et celles de Boussinesq).

On notera néanmoins que par des arguments relativement standards, on peut obtenir sans problèmes, à partir de données initiales $\vec{u}_0, \vec{w} \in L^2(\mathbb{R}^3)$, avec $div(\vec{u}_0) = 0$, des solutions faibles globales à la Leray $\vec{u}, \vec{w} \in L^\infty([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0, +\infty[, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ qui en plus vérifient l'inégalité d'énergie suivante

$$\|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\vec{w}(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\vec{u}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + 2\|\vec{w}(s,\cdot)\|_{\dot{H}^1}^2 + \|\vec{w}(s,\cdot)\|_{L^2}^2 + 2\|\mathrm{div}(\vec{w})(s,\cdot)\|_{L^2}^2 ds$$
$$\leq \|\vec{u}_0\|_{L^2} + \|\vec{w}_0\|_{L^2}^2.$$

L'étude que nous avons réalisé sur ce système porte essentiellement sur ce type de solutions et nous allons voir que, de la même façon que pour les équations de Boussinesq étudiées dans la section précédente, il existe ici un phénomène de domination de la variable $\vec{u}$ sur la variable $\vec{w}$ lorsqu'on étudie des problèmes de régularité. Toutefois, nous allons pousser un peu plus loin notre analyse et on verra dans ce qui suit des problèmes de concentration de normes autour des points qui ne sont pas réguliers.

3.4.1 Un gain d'intégrabilité et un critère de Serrin

La première étape de notre analyse sur les équations micro-polaires concerne un gain d'intégrabilité qui mènera vers un gain de régularité et nous allons voir qu'il suffit d'imposer une condition supplémentaire de type Morrey sur la vitesse $\vec{u}$ pour obtenir des résultats intéressants pour les *deux* variables $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

Théorème 3.4.1 (Gain d'intégrabilité) *Soit $(\vec{u}, p, \vec{w})$ une solution faible sur Q des équations micropolaires (3.40) où Q est une boule parabolique donnée dans (2.3). Supposons que $\vec{u}, \vec{w} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$, $p \in \mathcal{D}'_{t,x}(Q)$, $\vec{f} \in L^2_t \dot{H}^1_x(Q)$. Si de plus on a l'hypothèse locale suivante*

$$\mathbb{1}_Q \vec{u} \in \mathcal{M}^{p_0,q_0}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3) \quad avec \;\; 2 < p_0 \leq q_0, \; 5 < q_0 \leq 6, \tag{3.41}$$

alors

1) *soit une boule parabolique* $Q_1 =]a_1, b_1[\times B(x_0, r_1)$, *avec* $a < a_1 < b_1 < b$ *et* $0 < r_1 < r$ *(on obtient ainsi l'inclusion* $Q_1 \subset Q$*), nous avons*

$$\mathbb{1}_{Q_1}\vec{u} \in L^{q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3), \qquad 5 < q_0 \leq 6. \tag{3.42}$$

2) *pour une boule parabolique* $Q_2 =]a_2, b_2[\times B(x_0, r_2)$, *avec* $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ *et* $0 < r_2 < r_1$ *(notez l'inclusion des boules paraboliques* $Q_2 \subset Q_1$*), on a*

$$\mathbb{1}_{Q_2}\vec{w} \in L^{q_0}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3), \tag{3.43}$$

pour $5 < q_0 \leq 6$.

La démonstration de ce résultat est intéressante à plusieurs égards. En effet, au vu de la structure de l'équation micro-polaire (3.40), il ne sera pas facile (ni souhaitable) de faire une étude symétrique des deux variables $\vec{u}$ et $\vec{w}$ comme cela était le cas pour les équations de la magnéto-hydrodynamique (3.1) : le champ de vecteurs $\vec{w}$ n'étant pas à divergence nulle, plusieurs des astuces usuelles concernant le traitement de la vitesse $\vec{u}$ ne peuvent pas être mis à profit ici. L'idée est alors de faire une étude séparée de chacune de ces variables en exploitant le fait que la variable $\vec{w}$ peut être vue comme une force extérieure pour laquelle on a un contrôle dans les espaces $L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$. Ainsi, en localisant tout d'abort la vitesse $\vec{u}$ puis en étudiant sa dynamique, il est possible d'obtenir l'information Morrey recherchée, et seulement ensuite on injectera cette nouvelle information dans l'étude de la dynamique de la variable $\vec{w}$. La démonstration complète de ce théorème peut se consulter dans notre article [39]. Cette preuve n'est pas totalement triviale car il faudra faire un détour en étudiant la dynamique de la divergence de $\vec{w}$ -on se souviendra que l'on a $div(\vec{w}) \neq 0$- pour pouvoir obtenir le résultat souhaité.

Une fois que l'on dispose de ce gain d'intégrabilité on peut alors obtenir le critère de Serrin suivant qui nous fournira de la régularité pour les deux variables $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

Théorème 3.4.2 (Critère de Serrin) *Soit* $(\vec{u}, p, \vec{w})$ *une solution faible des équations des fluides micropolaires* (3.40) *sur une boule parabolique* $Q_R(t_0, x_0)$ *telle que l'on ait*

$$\vec{u}, \vec{w} \in L^\infty_t L^2_x(Q_R(t_0, x_0)) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_R(t_0, x_0)) \quad and \quad p \in \mathcal{D}'_{t,x}(Q_R(t_0, x_0)).$$

Si l'on suppose en outre que $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(Q_R(t_0, x_0))$, *alors pour tout* $0 < r < R$, *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *nous avons*

$$\vec{u}, \vec{w} \in L^\infty(]t_0 - r^2, t_0[, \dot{H}^k(B_{x_0,r})) \cap L^2(]t_0 - r^2, t_0[, \dot{H}^{k+1}(B_{x_0,r})).$$

On remarquera que dans ces deux résultats, les hypothèses ne portent que sur la variable $\vec{u}$: l'effet de domination de $\vec{u}$ sur $\vec{w}$ est alors pleinement exploité pour obtenir les conclusions recherchées sur ces deux variables. Cette notion de domination, déjà évoquée dans l'étude des équations de Boussinesq dans la section précédente, avait été peu étudiée pour les équations micro-polaires et c'est ce point de vue que nous allons mettre systématiquement en avant dans les pages suivantes.

Ce théorème nous conduit assez naturellement à introduire le concept suivant :

Définition 3.4.1 (Point partiellement régulier/singulier)
Un point $(t_0, x_0) \in \Omega \subset]0, T[\times\mathbb{R}^3$ *est un* point partiellement régulier *pour les équations des fluides micropolaires 3.40 si il existe un rayon* $0 < r \ll 1$ *tel que* $]t_0 - r^2, t_0[\times B_{x_0,r} \subset \Omega$ *et tel que* $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]t_0 - r^2, t_0[\times B_{x_0,r})$. *Nous dirons qu'un point* (t_0, x_0) *est* partiellement singulier *s'il n'est pas* partiellement régulier.

Ces deux résultats précédents et cette définition seront très utiles pour étudier les phénomènes de concentration de normes autour de point singuliers, mais nous aurons également besoin des résultats de la section qui suit.

3.4.2 Théorie de Caffarelli-Kohn et Nirenberg pour le système micro-polaire

Peu de résultats concernant cette théorie de régularité ont été développés pour les équations micro-polaires et en suivant le fil conducteur donné dans la section précédente nous allons voir ici qu'il suffira d'imposer des conditions sur une seule variable afin de pouvoir établir nos résultats. Ainsi, en suivant la Définition 3.3.1 nous avons le concept suivant

Définition 3.4.2 (Solutions partiellement adaptées) *Considérons $\vec{u}, \vec{w} \in L^\infty_t L^2_x(Q_R) \cap L^2_t \dot{H}^1_x(Q_R)$ deux champs vectoriels qui satisfont l'équation (3.40) sur une boule parabolique Q_R. Supposons de plus que nous disposons de l'information locale suivante sur la pression : $p \in L^{\frac{3}{2}}_{t,x}(Q_R)$. Nous dirons que $(\vec{u}, p, \vec{w})$ est une* solution partiellement adaptée *si la distribution μ donnée par l'expression*

$$\mu = -\partial_t|\vec{u}|^2 + \Delta|\vec{u}|^2 - 2|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 - div\left((|\vec{u}|^2 + 2p)\vec{u}\right) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u}, \tag{3.44}$$

est une mesure localement finie non négative sur Q_R.

Avec cette notion ci-dessus, nous pouvons maintenant énoncer un premier résultat :

Théorème 3.4.3 *Considérons une boule parabolique Q_R. Soit $(\vec{u}, p, \vec{w})$ une solution partiellement adaptée (au sens de la définition 3.4.2) pour le système micropolaire (3.40) sur Q_R. Il existe une petite constante $0 < \epsilon^* \ll 1$ telle que si pour un certain point $(t_0, x_0) \in Q_R$ nous avons*

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r} \iint_{]t_0-r^2, t_0+r^2[\times B(x_0,r)} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dxds < \epsilon^*, \tag{3.45}$$

alors, la solution $(\vec{u}, \vec{w})$ est Hölder régulière dans le temps et dans l'espace pour un exposant $0 < \alpha < \frac{1}{24}$ dans un petit voisinage du point (t_0, x_0).

Comme nous l'avons mentionné précédemment, observons que nous imposons uniquement des conditions à la variable $\vec{u}$ et aucune hypothèse particulière n'est demandée pour la variable $\vec{w}$. De la même façon que pour les équations de Boussinesq, la stratégie repose sur une première étude de l'évolution de la variable $\vec{u}$ pour laquelle la contribution de la variable $\vec{w}$ (via le terme $\vec{\nabla} \wedge \vec{w}$) peut être vue comme une force extérieure qui possède suffisamment d'integrabilité pour obtenir un premier gain d'information sur la vitesse $\vec{u}$. Ce petit gain d'information sur $\vec{u}$ permet d'étudier la divergence du champ de vecteurs $\vec{w}$ (qui est présent dans l'équation (3.40) sous la forme $\vec{\nabla} div(\vec{w})$) et, une fois que l'on a obtenu des propriétés sur $div(\vec{w})$, nous pouvons étudier la variable $\vec{w}$. En procédant de la sorte on obtient les informations Morrey nécessaires pour pouvoir appliquer le Lemme 2.2.4 et permet d'exhiber le gain de régularité recherché. Voir tous les détails dans notre article [40].

Pour les équations micro-polaires nous allons pousser un peu plus loin notre analyse et nous allons étudier la concentration de la norme L^3 autour de points singuliers.

3.4.3 Concentration de la norme L^3 pour le système micro-polaire

Commençons par deux remarques simples concernant le système (3.40). Premièrement, il est facile d'observer que l'équation liée à la variable $\vec{u}$ est invariante par rapport au changement d'échelle suivant

$$\vec{u}_\lambda(t,x) = \lambda \vec{u}(\lambda^2 t, \lambda x), \quad p_\lambda(t,x) = \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{et} \quad \vec{w}_\lambda = \lambda^2 \vec{\omega}(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \text{où } \lambda > 0,$$

mais le triplet $(\vec{u}_\lambda, p_\lambda, \vec{w}_\lambda)$ n'est plus une solution pour l'ensemble du système micropolaire puisque la deuxième équation (3.40) ne possède pas d'échelle naturelle qui préserve la structure de l'équation (du fait de la présence du terme $\vec{w}$), et ce fait révèle l'une des différences majeures entre ces deux équations.

Nous continuons en observant encore une fois que l'information sur la pression p peut être facilement obtenue à partir de la variable $\vec{u}$: en effet, en appliquant formellement l'opérateur de divergence dans la première équation du système (3.40), puisque $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$ et $\mathrm{div}(\vec{\nabla} \wedge \vec{w}) = 0$, on obtient l'équation suivante pour la pression :

$$-\Delta p = \mathrm{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}), \tag{3.46}$$

on peut donc écrire $p = \frac{1}{(-\Delta)}\mathrm{div}((\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u})$ et alors la pression p n'est liée qu'au champ de vitesse $\vec{u}$, nous considérerons donc $(\vec{u}, \vec{w})$ comme les variables principales. Ces deux remarques simples seront essentielles dans la suite.

Comme nous visons à étudier le comportement de la variable $\vec{u}$ autour d'un éventuel point d'explosion, nous devons tout d'abord établir des résultats de régularité très spécifiques. Ainsi, un premier résultat utile explore un gain d'intégrabilité en supposant une hypothèse locale $L^\infty_t L^3_x$ pour le champ de vitesse $\vec{u}$:

Théorème 3.4.4 (Condition $L^\infty_t L^3_x$) *Considérons $(\vec{u}, p, \vec{w})$ une solution partiellement adaptée sur un ensemble régulier $\Omega \subset]0, T[\times\mathbb{R}^3$ avec $0 < T < +\infty$ des équations du fluide micropolaire* (3.40) *au sens de la Définition 3.4.2 donnée ci-dessus. Supposons que pour un certain point $(t_0, x_0) \in \Omega$ il existe $R > 0$ tel que $]t_0 - R^2, t_0[\times B_{x_0,R} \subset \Omega$ et tel que l'on ait l'information*

$$\vec{u} \in L^\infty(]t_0 - R^2, t_0[, L^3(B_{x_0,R})).$$

Alors il existe $r > 0$ avec $0 < r \leq \frac{R}{2}$ tel que $\vec{u} \in L^\infty_{t,x}(]t_0 - r^2, t_0[\times B_{x_0,r})$, i.e. *le point (t_0, x_0) est partiellement régulier au sens de la Définition 3.4.1.*

On notera tout d'abord que nous imposons uniquement quelques informations supplémentaires sur $\vec{u}$ et non sur la variable $\vec{w}$ (ce qui est cohérent avec l'esprit général de notre étude), cependant la conclusion ne s'applique qu'à $\vec{u}$. Remarquons ensuite que ce contrôle supplémentaire, à savoir le fait que $\vec{u} \in L^\infty_t L^3_x$ (localement), concerne les cas limites du critère de Serrin pour le système classique de Navier-Stokes où il est traditionnel de supposer localement $\vec{u} \in L^p_t L^q_x$ avec $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} < 1$ (voir [109]). Le cas où $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1$ avec $q > 3$ a été obtenu par [113] et [114] alors que le cas $p = +\infty$ et $q = 3$ a été obtenu pour les équations de Navier-Stokes dans [69].

Dans notre prochain résultat, en supposant un contrôle global dans l'espace L^3_x, nous caractériserons la continuité dans l'information temporelle pour le champ de vitesse $\vec{u}$ en termes de points réguliers partiels. Plus précisément nous avons :

Théorème 3.4.5 *Soit $(\vec{u}, p, \vec{w})$ une solution faible de type Leray sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$ du système micropolaire* (3.40) *avec $\vec{u}, \vec{w} \in L^\infty_t L^2_x \cap L^2_t \dot{H}^1_x$ tel que pendant un certain temps $0 < \delta <$*

$T < +\infty$ nous ayons $\vec{u} \in L^\infty(]\delta, T[, L^3(\mathbb{R}^3))$. Alors le champ de vitesse $\vec{u}$ satisfait $\vec{u} \in \mathcal{C}(]\delta, T[, L^3(\mathbb{R}^3))$ si et seulement si chaque point $(t_0, x_0) \in]\delta, T[$ est un point partiellement régulier au sens de la Définition 3.4.1.

Une des principales différences entre ce résultat et le Théorème 3.4.4 précédent réside dans le fait que nous n'avons plus besoin ici de la condition partiellement adaptée (3.44). En effet, comme nous le verrons plus loin, l'hypothèse globale dans l'espace $\vec{u} \in L^\infty(]0, T[, L^3(\mathbb{R}^3))$ est suffisamment forte pour garantir une estimation globale intéressante. Là encore, la variable $\vec{w}$ ne semble jouer aucun rôle particulier dans l'énoncé du résultat, mais doit être étudiée très attentivement dans les calculs.

Ces résultats, bien qu'intéressants en eux-mêmes, ne sont cependant que des résultats préliminaires : en effet, un premier résultat intéressant obtenu dans notre article [41] énonce un critère d'explosion pour la solution faible de type Leray des équations des fluides micropolaires (3.40) :

Théorème 3.4.6 (Explosion) *Soit $(\vec{u}, p, \vec{w})$ une solution faible de type Leray des équations des fluides micropolaires* (3.40). *Soit $0 < \mathcal{T} \leq +\infty$ le temps maximal tel que l'on ait le contrôle $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, \mathcal{T}[, L^3(\ R))$. Si $\mathcal{T} < +\infty$, alors*

$$\sup_{0<t<\mathcal{T}} \|\vec{u}(t,\cdot)\|_{L^3} = +\infty.$$

Indiquons tout de suite qu'il est possible de préciser le critère d'explosion énoncé dans le théorème ci-dessus : en effet, nous pouvons étudier la concentration de la norme L^3_x du champ de vitesse $\vec{u}$ sur des boules centrées en un point singulier $(\mathcal{T}, 0)$ dont le rayon tend vers zéro lorsque t tend vers $\mathcal{T}$ et dans ce sens nous avons le résultat suivant qui a été démontré dans notre article [41] :

Théorème 3.4.7 (Concentration de la norme L^3) *Soit $(\vec{u}, p, \vec{w})$ une solution faible de type Leray des équations des fluides micropolaires* (3.40). *Soit $0 < \mathcal{T} < +\infty$ le temps maximal tel que l'on ait $\vec{u} \in \mathcal{C}(]0, \mathcal{T}[, L^\infty(\mathbb{R}^3))$. Supposons de plus que le point $(\mathcal{T}, 0)$ soit un point partiellement singulier au sens de la Définition 3.4.1 et que le temps $\mathcal{T}$ satisfasse la condition suivante : pour un certain $r_0 > 0$ tel que $0 < \mathcal{T} - r_0^2$, on a*

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^3} \sup_{r \in]0, r_0]} \sup_{t \in]\mathcal{T} - r^2, \mathcal{T}]} \frac{1}{r} \int_{B_{x_0, r}} |\vec{u}(t,x)|^2 dx = \mathfrak{M} < +\infty. \tag{3.47}$$

Alors, il existe $\varepsilon > 0$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}) > 0$ et $0 < \delta < \mathcal{T}$ tel que pour tout $t \in]\mathcal{T} - \delta, \mathcal{T}[$, on a

$$\int_{B_{0, \sqrt{\frac{\mathcal{T}-t}{\mathfrak{S}}}}} |\vec{u}(t,x)|^3 dx \geq \varepsilon. \tag{3.48}$$

On notera sans surprise qu'avec l'estimation (3.48) ci-dessus il est assez simple d'observer le phénomène de concentration de la norme L^3_x pour le champ de vitesse $\vec{u}$ lorsque t tend vers le temps $\mathcal{T}$. Remarquons maintenant que la contrainte donnée dans l'expression (3.47) est connue dans la littérature des équations de Navier-Stokes sous le nom de *condition de type I* (voir [2], [3], [85]) et cette condition peut être interprétée en termes d'espaces de Morrey. En effet, si $\vec{u}$ satisfait la condition (3.47), alors nous avons $\vec{u} \in L^\infty_t \mathcal{M}^{2,3}_x \subset \mathcal{M}^{2,5}_{t,x}$. Comme on pouvait s'y attendre, le fait que $\vec{u}, \vec{w} \in \mathcal{M}^{p,q}_{t,x}$ avec $p = 2$ et $q = 5$ sort du cadre de Serrin énoncé en termes d'espaces de Morrey où nous devons imposer que $2 < p \leq q$ et $5 < q \leq 6$ (voir la condition (3.41) ci-dessus). Cela suggère que les valeurs $p = 2$ et $q = 5$ peuvent constituer un seuil : au-dessus de ces valeurs l'information parabolique supplémentaire donnée en termes d'espaces Morrey fournira suffisamment d'intégrabilité pour en déduire un gain de régularité, tandis qu'avec les valeurs $p = 2$ et $q = 5$, le contrôle parabolique de Morrey ne produira pas de gain d'information conséquent.

Notons également que, bien qu'il ne soit pas difficile d'exhiber une domination de la variable $\vec{u}$ sur la variable $\vec{w}$ lorsqu'on considère les résultats de régularité (au sens où il suffit d'imposer certaines conditions à $\vec{u}$ pour obtenir un gain pour les *les deux* variables $\vec{u}$ et $\vec{w}$), les techniques développées dans nos travaux ne semblent pas fournir d'informations sur le comportement de $\vec{w}$ proche d'un potentiel point d'explosion. Cependant, on peut éventuellement conjecturer qu'une explosion de la variable $\vec{w}$ aura un impact sur le comportement du champ de vitesse $\vec{u}$, mais l'étude complète de ce problème nécessiterait probablement des recherches supplémentaires.

La démonstration de ce théorème repose en particulier sur la proposition suivante :

Proposition 3.4.1 *Soit $(\vec{u}, p, \vec{w})$ une solution partiellement adaptée sur une boule parabolique Q. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in Q(t, x)$ nous avons*

- *soit (t_0, x_0) est un point partiellement singulier (au sens de la Définition 3.4.1) et alors pour tout $0 < r < 1$ nous avons*

$$\varepsilon \leq \frac{1}{r^2} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 + |p|^{\frac{3}{2}} dyds,$$

- *soit (t_0, x_0) est un point partiellement régulier et alors*

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{Q_r(t_0,x_0)} |\vec{u}|^3 + |\vec{w}|^3 dyds = 0.$$

Ainsi, une étude détaillée des points singuliers avec en plus l'hypothèse (3.47) permettra d'obtenir l'estimation (3.48). Tous les détails peuvent se consulter dans [41].

Chapitre 4

Autour des équations de Navier-Stokes Stationnaires

4.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats obtenus concernant l'unicité des équations de Navier-Stokes stationnaires, que ce soit dans le cas classique ou dans le cas fractionnaire, dans lequel l'opérateur Laplacien usuel est remplacé par l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ pour un certain paramètre $0 < \alpha < 2$.

Les systèmes étudiés sont alors les suivants

$$-\Delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f}, \qquad div(\vec{u}) = 0, \tag{4.1}$$

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f}, \qquad div(\vec{u}) = 0, \tag{4.2}$$

où $u, p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont les inconnues et où $\vec{f}$ est une force extérieure donnée. L'existence de solutions faibles $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ pour les équations (4.1) et $\vec{u} \in \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3)$ pour le problème (4.2) à n'est pas très difficile à établir : il suffit d'appliquer convenablement le théorème de Leray-Schauder. On notera également sans trop de difficulté que si l'on a $\vec{f} = 0$, alors la fonction $\vec{u} = 0$ est une solution triviale des systèmes (4.1) et (4.2).

Mais dans ce cadre de force extérieure nulle, la fonction $\vec{u} = 0$ est-elle l'unique solution ? Initialement introduit dans [73] (voir le Théorème X.9.5, page 729) mais aussi dans [108], l'étude de l'unicité de la solution triviale lorsque $\vec{f} = 0$ reste à ce jour un problème ouvert. Plus précisément, il s'agit du problème suivant :

Problème 4.1 *Montrer que toute fonction $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ avec $\vec{u}(x) \to 0$ si $|x| \to +\infty$ qui est solution du problème (4.1) avec force extérieure nulle ($\vec{f} = 0$) est alors identiquement nulle (*i.e. *$\vec{u} \equiv 0$).*

Bien évidemment, cette question se transpose sans problème aux équations fractionnaires (4.2) en remplaçant l'espace $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ par $\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3)$.

On notera que par les injections de Sobolev classiques on a bien $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, ce qui induit une certaine décroissance à l'infini de la solution $\vec{u}$, mais cette information ne semble pas, à ce jour, être suffisante pour en déduire que la solution $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ du problème (4.1) est identiquement nulle. Ce problème se maintient lorsqu'on considère des fonctions

$\vec{u} \in \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{6}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$ qui décroissent elles aussi à l'infini et qui sont solutions du système (4.2).

Dans ce qui suit nous présenterons quelques résultats d'unicité pour les systèmes (4.1) et (4.2) sous des hypothèses supplémentaires pour la vitesse $\vec{u}$: on supposera alors que $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \cap E$ (et $\vec{u} \in \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap E$ respectivement) où E est un espace de fonctions qui introduit un meilleur comportement à l'infini que l'espace de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ (ou $\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3)$) de base : ainsi, avec cette information en plus on sera en mesure de garantir l'unicité de la solution triviale. Ce type de résultats est connu dans la littérature comme des théorèmes de *type Liouville* pour les équations de Navier-Stokes. Dans la Section 4.2 nous étudierons les équations de Navier-Stokes classiques tandis que dans la Section 4.3 on se concentrera dans les équations de Navier-Stokes fractionnaires. Finalement, dans la Section 4.4 nous verrons comment l'usage des espaces de Lebesgue d'exposant variable peuvent apporter quelques précisions à ce problème.

4.2 Des résultats de type Liouville pour les équations de Navier-Stokes

Un résultat bien connu sur le problème de Liouville pour l'équation (4.1) est donné dans le livre [73] où il est montré que pour obtenir l'unicité de la solution triviale $\vec{u} = 0$, il faut une certaine décroissance à l'infini de la solution, plus précisément, si la solution $\vec{u}$ vérifie $\vec{u} \in L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R}^3)$ alors nous avons forcément $\vec{u} = 0$. Ce résultat a été amélioré dans différents contextes avec des propriétés de décroissance plus générales à l'infini : par exemple dans [12] une amélioration logarithmique a été proposée où la solution $\vec{u}$ vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{u}(x)|^{9/2} \left(\log \left(2 + \frac{1}{|\vec{u}(x)|} \right) \right)^{-1} dx < +\infty.$$

Un autre résultat intéressant a été donné dans [107] où l'hypothèse $\vec{u} \in L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R}^3)$ est remplacée par la condition $\vec{u} \in BMO^{-1}(\mathbb{R}^3)$. Voir également [13], [14] et [88] pour d'autres résultats similaires.

Dans notre article [33] nous généralisons les résultats précédents de la manière suivante :

Théorème 4.2.1 *Soit $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ une solution faible des équations stationnaires*

$$-\Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla} p = 0, \qquad div(\vec{u}) = 0. \tag{4.3}$$

1) Si $\vec{u} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $3 \leq p \leq \frac{9}{2}$, alors $\vec{u} = 0$.

2) Si $\vec{u} \in L^p(\mathbb{R}^3) \cap \dot{B}_{\infty}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{9}{2} < p < 6$, alors $\vec{u} = 0$.

Ce type de résultat donne alors une solution au Problème 4.1 énoncé ci-dessus, mais avec une condition *en plus*.

On notera en particulier que l'espace $L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R}^3)$ semble être un *espace limite* pour résoudre le problème de Liouville dans le sens où si $3 \leq p \leq \frac{9}{2}$ nous n'avons besoin d'aucune information supplémentaire en dehors du cadre L^p, mais si $\frac{9}{2} < p < 6$, alors nous ne savons pas actuellement déduire que la seule solution du problème (4.3) avec $\vec{f} = 0$ est la solution triviale : nous avons alors besoin d'une hypothèse supplémentaire donnée ici en termes d'espaces de Besov. Ce résultat suggère que les solutions $\vec{u}$ appartenant à $L^p(\mathbb{R}^3)$, avec $\frac{9}{2} < p < 6$, ne décroissent pas assez vite à l'infini pour assurer $\vec{u} = 0$ et alors, l'hypothèse $\vec{u} \in \dot{B}_{\infty}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)$ pourrait être vue comme une amélioration de la propriétés de décroissance de la solution $\vec{u}$ à l'infini. Indiquons finalement que des variantes du Théorème 4.2.1 qui considèrent des espaces de Morrey ont également été étudiées dans notre article [33].

Démonstration du Théorème 4.2.1.

1) Supposons que $\vec{u} \in L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $3 \leq p \leq \frac{9}{2}$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ une fonction telle que $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(x) = 1$ si $|x| < \frac{1}{2}$ et $\theta(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. Soit maintenant $R > 1$ et définissons la fonction

$$\theta_R(x) = \theta\left(\frac{x}{R}\right), \tag{4.4}$$

nous avons alors $\theta_R(x) = 1$ si $|x| < \frac{R}{2}$ et $\theta_R(x) = 0$ si $|x| \geq R$. On multiplie l'équation (4.3) par la fonction $\theta_R\vec{u}$, puis on intègre sur la boule $B_R = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$ pour obtenir

$$\int_{B_R} -\Delta\vec{u} \cdot (\theta_R\vec{u}) + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} \cdot (\theta_R\vec{u}) + \vec{\nabla}p \cdot (\theta_R\vec{u})\, dx = 0.$$

Par des intégrations par parties et en utilisant la propriété de divergence nulle de la vitesse, on obtient à partir de l'expression précédente l'identité

$$\int_{B_R} \theta_R|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx = \int_{B_R} \Delta\theta_R \frac{|\vec{u}|^2}{2} dx + \int_{B_R} \vec{\nabla}\theta_R \cdot \left(\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + p\right)\vec{u}\right) dx.$$

Mais comme on a $\theta_R(x) = 1$ si $|x| < \frac{R}{2}$, alors $\displaystyle\int_{B_{\frac{R}{2}}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx \leq \int_{B_R} \theta_R|\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx$ et on écrit

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{R}{2}}} |\vec{\nabla} \otimes \vec{u}|^2 dx &\leq \int_{B_R} \Delta\theta_R \frac{|\vec{u}|^2}{2} dx + \int_{B_R} \vec{\nabla}\theta_R \cdot \left(\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + p\right)\vec{u}\right) dx \\ &\leq I_1(R) + I_2(R), \end{aligned} \tag{4.5}$$

et nous allons montrer que l'on a $\lim\limits_{R \longrightarrow +\infty} I_i(R) = 0$ pour $i = 1, 2$.

En effet, pour le terme $I_1(R)$, par les inégalités de Hölder (avec $\frac{1}{q} + \frac{2}{p} = 1$) on a

$$I_1(R) \leq \left(\int_{B_R} |\Delta\theta_R|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \|\vec{u}\|_{L^p}^2.$$

De plus, comme $\theta_R(x) = \theta\left(\frac{x}{R}\right)$, il vient $\left(\displaystyle\int_{B_R} |\Delta\theta_R|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = R^{\frac{3}{q}-2} \times \|\Delta\theta\|_{L^q(B_1)}$, mais $\frac{1}{q} + \frac{2}{p} = 1$ et alors

$$I_1(R) \leq R^{1-\frac{6}{p}} \times \|\Delta\theta\|_{L^q(B_1)} \|\vec{u}\|_{L^p}^2.$$

Avec l'information $3 \leq p \leq \frac{9}{2}$ on a $-1 \leq 1 - \frac{6}{p} \leq -\frac{1}{3}$, ce qui nous permet de déduire $\lim\limits_{R \longrightarrow +\infty} I_1(R) = 0$.

Pour le terme $I_2(R)$ dans (4.5) on utilise le fait que $\theta_R(x) = 1$ si $|x| < \frac{R}{2}$ et $\theta_R(x) = 0$ si $|x| \geq R$, de sorte que *supp* $\left(\vec{\nabla}\theta_R\right) \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{R}{2} < |x| < R\} = \mathcal{C}(\frac{R}{2}, R)$ et nous écrivons

$$I_2(R) = \int_{B_R} \vec{\nabla}\theta_R \cdot \left(\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + P\right)\vec{u}\right) dx = \int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)} \vec{\nabla}\theta_R \cdot \left(\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2} + P\right)\vec{u}\right) dx,$$

hence we have

$$\begin{aligned}|I_2(R)| &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)} |\vec{\nabla}\theta_R||\vec{u}|^3 dx + \int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)} |\vec{\nabla}\theta_R||p||\vec{u}|dx \\ &\leq (I_2)_a(R) + (I_2)_b(R), \end{aligned} \tag{4.6}$$

et nous allons montrer que l'on a $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty}(I_2)_a(R) = 0$ et $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty}(I_2)_b(R) = 0$. Pour $(I_2)_a(R)$, par les inégalités de Hölder (avec $\frac{1}{r}+\frac{3}{p}=1$) on a

$$(I_2)_a(R) \leq \left(\int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)} |\vec{\nabla}\theta_R|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)} |\vec{u}|^p dx\right)^{\frac{3}{p}}.$$

On notera sans problème que l'on a (car $R>1$ et par la relation $\frac{1}{r}+\frac{3}{p}=1$ ainsi que par les valeurs $3\leq p\leq \frac{9}{2}$) le contrôle $\left(\int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)} |\vec{\nabla}\theta_R|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \|\vec{\nabla}\theta\|_{L^r}$, et on peut alors écrire

$$(I_2)_a(R) \leq \|\vec{\nabla}\theta\|_{L^r}\|\vec{u}\|^3_{L^p(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))},$$

mais comme $\vec{u}\in L^p(\mathbb{R}^3)$ on a bien $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty}\|\vec{u}\|_{L^p(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} = 0$ et l'on obtient

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty}(I_2)_a(R) = 0.$$

Le terme $(I_2)_b(R)$ se déduit de manière totalement analogue car on a $\|p\|_{L^{\frac{p}{2}}} \leq c\|\vec{u}\|^2_{L^p}$. Ainsi, en revenant à (4.6) on a bien $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty} I_2(R) = 0$.

Nous avons donc montré que l'on a $\lim\limits_{R\longrightarrow+\infty} I_i(R) = 0$ pour $i=1,2$ et en revenant à la formule (4.5) on déduit sans problème que l'on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2 dx = 0$ et ainsi $\vec{u}=0$.

2) On suppose maintenant que l'on a $\vec{u}\in L^p(\mathbb{R}^3)\cap \dot{B}_{\infty}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{9}{2}<p<6$. La démonstration repose ici sur des estimations de type Cacciopoli données dans la proposition ci-après et dont la preuve peut se consulter dans notre article [33].

Proposition 4.2.1 *Soit* $\frac{9}{2}<p<6$ *et soit* $\vec{u}\in L^p\cap \dot{B}_{\infty}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)$ *une solution faible du problème (4.3). Alors on a* $\|\vec{u}\|_{\dot{H}^1} \leq C\left(1+\|\vec{u}\|_{\dot{B}_{\infty}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2},\infty}}\right)\|\vec{u}\|_{L^p}$.

Avec ce résultat, comme nous avons également l'information $\vec{u}\in \dot{B}_{\infty}^{\frac{3}{p}-\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)$, si nous définissons le paramètre $\beta=\frac{3}{2}-\frac{3}{p}$ (comme $\frac{9}{2}<p<6$ alors nous avons $\frac{5}{6}<\beta<1$) alors par les inégalités de Sobolev précisées on peut écrire

$$\|\vec{u}\|_{L^q} \leq C\|\vec{u}\|^{\theta}_{\dot{H}^1}\|\vec{u}\|^{1-\theta}_{\dot{B}_{\infty}^{-\beta,\infty}},$$

avec $\theta=\frac{2}{q}$ et $\beta=\frac{\theta}{1-\theta}$. Par ces identités nous avons la relation suivante $q=\frac{2}{\beta}+2$, et puisque $\frac{5}{6}<\beta<1$ alors nous avons $3<q<\frac{9}{2}$: nous obtenons ainsi l'information $\vec{u}\in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $3<q<\frac{9}{2}$ et par le point 1) du Théorème 4.2.1 on peut écrire $\vec{u}=0$. Ceci termine la preuve du deuxième point du Théorème 4.2.1. ■

4.3 Près des cas limites avec des équations fractionnaires

Nous étudions maintenant le système fractionnaire

$$\begin{cases} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = 0, \quad \text{avec } 0 < \alpha < 2, \\ div(\vec{u}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{4.7}$$

Si l'on part d'une solution $\vec{u} \in \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3)$, le résultat d'unicité que l'on obtient dans notre article [52] est le suivant :

Théorème 4.3.1 *Considérons les équations fractionnaires stationnaires (4.7) et soient $\vec{u}, p$ des solutions régulières de ce système. Si $0 < \epsilon < 2\alpha$ est un paramètre positif, alors :*
1) si $\alpha = 1$ et si $\vec{u} \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap L^{\frac{6-\epsilon}{2}}(\mathbb{R}^3)$, alors nous avons $\vec{u} = 0$.

2) si $1 < \alpha < 2$ et si $0 < \epsilon < 2\alpha$ est tel que

$$1 + \frac{\epsilon}{3} \leq \alpha \leq \frac{5}{3} + \frac{2}{9}\epsilon, \tag{4.8}$$

si $\vec{u} \in \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$, alors $\vec{u} = 0$.

3) si $\frac{3}{5} < \alpha < 1$ et si $0 < \epsilon < 2\alpha$ est tel que

$$1 - \frac{\epsilon}{3} \leq \alpha \leq \frac{5}{3} - \frac{2}{9}\epsilon, \tag{4.9}$$

si $\vec{u} \in \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3) \cap L^{\frac{6+\epsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$, alors $\vec{u} = 0$.

On remarquera pour commencer que la condition $\vec{u} \in \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3)$ énoncée dans tous les points ci-dessus est totalement naturelle et provient d'un résultat d'existence élémentaire qui nous garantit l'existence de solutions dans cet espace fonctionnel. On notera ensuite que par les injections classiques de Sobolev nous avons bien $\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^3) \subset L^{\frac{6}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$ mais nous n'avons pas $\vec{u} \in L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$ ni $\vec{u} \in L^{\frac{6+\varepsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$ pour $\epsilon > 0$, et on peut ainsi voir que les conditions énoncées dans ce théorème sont de *vraies* hypothèses. On remarquera aussi que si l'on fait $\alpha \to 2$ alors par la condition (4.8) on a $\frac{3}{2} \leq \epsilon \leq 3$ et cela nous amène aux espaces de Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $3 \leq q \leq \frac{9}{2}$: c'est exactement la condition donnée dans le premier point du Théorème 4.2.1 et nous récupérons ainsi les résultats précédents pour les équations stationnaires classiques de Navier-Stokes.

On observera finalement que nous ne pouvons pas simplement faire $\epsilon \to 0$ car l'information donnée par les hypothèses (avec $\epsilon > 0$) est nécessaire pour obtenir nos résultats. En effet, cette condition provient du caractère non local de l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$: nous devons considérer alors certains commutateurs et pour traiter ces termes notre outil principal est le lemme suivant qui nous imposera la condition $\epsilon > 0$.

Lemme 4.3.1 (Inégalités de Leibniz fractionnaires)
1) Soient f, g deux fonctions régulières alors on a

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(fg)\|_{L^p} \leq C\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}f\|_{L^{p_0}}\|g\|_{L^{p_1}} + C\|f\|_{L^{q_0}}\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}g\|_{L^{q_1}},$$

où $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1}$, avec $0 < s$, $1 < p < +\infty$ et $1 < p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$.

2) Si $0 < s, s_1, s_2 < 1$ *avec* $s = s_1 + s_2$ *et* $1 < p, p_1, p_2 < +\infty$ *avec* $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$*, alors*

$$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}(fg) - (-\Delta)^{\frac{s}{2}}(f)g - (-\Delta)^{\frac{s}{2}}(g)f\|_{L^p} \leq C\|(-\Delta)^{\frac{s_1}{2}} f\|_{L^{p_1}}\|(-\Delta)^{\frac{s_2}{2}} g\|_{L^{p_2}}.$$

Voir [102] et [76] pour une démonstration de ces inégalités. Comme nous venons de le dire, c'est bien l'utilisation de ces estimations qui nous oblige de considérer les hypothèses $\vec{u} \in L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$ ou $\vec{u} \in L^{\frac{6+\varepsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$ avec un paramètre $\epsilon > 0$ et nous ne savons pas à l'heure actuelle comment contourner cet obstacle qui est purement technique.

Nous donnons maintenant les lignes générales pour démontrer le résultat précédent, les détails peuvent se consulter dans l'article [52].

Démonstration du Théorème 4.3.1 L'idée de la preuve suit les mêmes lignes générales que celle du Théorème 4.2.1. En effet, on considère la même fonction localisante θ_R donnée dans (4.4). On multiplie alors l'équation (4.7) par $(\theta_R\vec{u})$ et l'on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\vec{u}\cdot(\theta_R\vec{u})}_{(1)} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\cdot(\theta_R\vec{u})}_{(2)} + \underbrace{\vec{\nabla}p\cdot(\theta_R\vec{u})}_{(3)}\, dx = 0, \tag{4.10}$$

Le premier terme (1) ci-dessus se réécrit :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}\vec{u}\cdot(\theta_R\vec{u})\, dx = \int_{B_R} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u}|^2\theta_R dx + \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u}\cdot\Big[(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}(\theta_R\vec{u}) - ((-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u})\theta_R\Big]\, dx. \tag{4.11}$$

Pour le deuxième terme de (4.10) on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\cdot(\theta_R\vec{u})dx = -\int_{B_R} \vec{\nabla}\theta_R \cdot \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\vec{u}\right) dx, \tag{4.12}$$

où l'on a utilisé les propriétés du support de θ_R. Finalement, pour le troisième terme de (4.10) nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla}p\cdot(\theta_R\vec{u})dx = -\sum_{i=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} p(\partial_{x_i}\theta_R)(u_i)dx = -\int_{B_R} \vec{\nabla}\theta_R\cdot(p\vec{u})dx. \tag{4.13}$$

Ainsi, avec les expressions (4.11), (4.12) et (4.13) en revenant à (4.10) nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u}|^2\theta_R dx &= \int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u}\cdot\Big[((-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u})\theta_R - (-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}(\theta_R\vec{u})\Big]\, dx + \int_{B_R} \vec{\nabla}\theta_R\cdot\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\vec{u}\right) dx\\ &\quad + \int_{B_R} \vec{\nabla}\theta_R\cdot(p\vec{u})dx.\end{aligned}$$

Etant donné que l'on a $0 \leq \theta_R(x) \leq 1$ et $\theta_R(x) = 1$ si $|x| < \frac{R}{2}$, nous avons l'inégalité

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u}|^2 dx \leq \int_{B_R} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u}|^2\theta_R dx,$$

et nous écrivons alors

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{R}{2}}} |(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u}|^2 dx &\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u}\cdot\Big[((-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u})\theta_R - (-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}(\theta_R\vec{u})\Big]\, dx}_{(I_a)} + \underbrace{\int_{B_R} \vec{\nabla}\theta_R\cdot\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\vec{u}\right) dx}_{(I_b)}\\ &\quad + \underbrace{\int_{B_R} \vec{\nabla}\theta_R\cdot(p\vec{u})dx}_{(I_c)}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

De façon similaire à (4.5) nous allons montrer que l'on a $\lim\limits_{R\to+\infty} I_a = 0$, $\lim\limits_{R\to+\infty} I_b = 0$ et $\lim\limits_{R\to+\infty} I_c = 0$.

(a) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz il vient

$$\begin{array}{rcl} I_a & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u}\cdot\left[((-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u})\theta_R - (-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}(\theta_R\vec{u})\right] dx \\ & \leq & \|\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}\left(\left\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}(\theta_R\vec{u}) - ((-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\vec{u})\theta_R - ((-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\theta_R)\vec{u}\right\|_{L^2} + \left\|((-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\theta_R)\vec{u}\right\|_{L^2}\right), \end{array}$$

et par le deuxième point du Lemme 4.3.1 nous obtenons

$$I_a \leq \|\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}\left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{4}}\theta_R\|_{L^{p_1}}\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{4}}\vec{u}\|_{L^{p_2}} + \left\|((-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\theta_R)\vec{u}\right\|_{L^2}\right),$$

avec $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $0 < \alpha, \alpha_1, \alpha_2 < 2$ et $\frac{1}{2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Comme nous avons $0 < \alpha < 2$ et que nous supposons dans tous les cas la condition $\vec{u} \in L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$ avec $0 < \epsilon < 2\alpha$, donc par l'inégalité de Hölder avec $\frac{1}{2} = \frac{2\alpha-\epsilon}{12-2\epsilon} + \frac{3-\alpha}{6-\epsilon}$ nous avons

$$\begin{array}{rcl} I_a & \leq & \|\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}\left(\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_1}{4}}\theta_R\|_{L^{p_1}}\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{4}}\vec{u}\|_{L^{p_2}} + \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{4}}\theta_R\|_{L^{\frac{12-2\epsilon}{2\alpha-\epsilon}}}\|\vec{u}\|_{L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}}\right) \\ & \leq & \|\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}\left(CR^{-\frac{\alpha_1}{2}+\frac{3}{p_1}}\|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{4}}\vec{u}\|_{L^{p_2}} + CR^{-\frac{\alpha}{2}+3\frac{2\alpha-\epsilon}{12-2\epsilon}}\|\vec{u}\|_{L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}}\right). \end{array}$$

Rappelons maintenant que l'on a, par interpolation complexe

$$\left[\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}, L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}\right]_\nu = \dot{W}^{\frac{\alpha_2}{2},p_2} \qquad \text{and} \qquad \|(-\Delta)^{\frac{\alpha_2}{4}}\vec{u}\|_{L^{p_2}} = \|\vec{u}\|_{\dot{W}^{\frac{\alpha_2}{2},p_2}} \leq C\|\vec{u}\|^{\nu}_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}\|\vec{u}\|^{1-\nu}_{L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}},$$

avec les contraintes

$$\alpha_2 = \nu\alpha, \qquad \frac{1}{p_2} = \frac{\nu}{2} + (1-\nu)\frac{3-\alpha}{6-\epsilon} \qquad \text{avec} \qquad 0 < \nu < 1, \tag{4.15}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$I_a \leq \|\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}\left(CR^{-\frac{\alpha_1}{2}+\frac{3}{p_1}}\|\vec{u}\|^{\nu}_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}\|\vec{u}\|^{1-\nu}_{L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}} + CR^{-\frac{\alpha}{2}+3\frac{2\alpha-\epsilon}{12-2\epsilon}}\|\vec{u}\|_{L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}}\right).$$

Mais puisque $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\frac{1}{2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, par les conditions (4.15) nous avons $\alpha_1 = (1-\nu)\alpha$ and $\frac{1}{p_1} = (1-\nu)\frac{2\alpha-\epsilon}{12-2\epsilon}$, il vient alors

$$I_a \leq C\|\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}\left(R^{(1-\nu)[-\frac{\alpha}{2}+\frac{6\alpha-3\epsilon}{12-2\epsilon}]}\|\vec{u}\|^{\nu}_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}}\|\vec{u}\|^{1-\nu}_{L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}} + R^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{6\alpha-3\epsilon}{12-2\epsilon}}\|\vec{u}\|_{L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}}\right).$$

On remarquera que comme $0 < \alpha < 2$ et $0 < \epsilon < 2\alpha$ on a toujours $\frac{6\alpha-3\epsilon}{12-2\epsilon} < \frac{\alpha}{2}$ et donc les puissances de R ci-dessus sont toutes négatives. De plus on a $\|\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}} < +\infty$ et $\|\vec{u}\|_{L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}} < +\infty$, de sorte que l'on obtient $\lim\limits_{R\to+\infty} I_a = 0$.

(b) Pour le deuxième terme de (4.14) puisque $\theta_R(x) = 1$ si $|x| < \frac{R}{2}$ et $\theta_R(x) = 0$ si $|x| \geq R$ nous avons

$$supp\left(\vec{\nabla}\theta_R\right) \subset \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \frac{R}{2} < |x| < R\right\} = \mathcal{C}(\tfrac{R}{2}, R), \tag{4.16}$$

et nous écrivons alors

$$I_b = \int_{B_R} \vec{\nabla}\theta_R \cdot \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\vec{u}\right) dx = \int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)} \vec{\nabla}\theta_R \cdot \left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}\vec{u}\right) dx.$$

Nous décomposons notre étude en fonction des valeurs du paramètre $0 < \alpha < 2$:

- Si $\alpha = 1$, on a $\vec{u} \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et donc, par les injections de Sobolev on a $\vec{u} \in L^3(\mathbb{R}^3)$ et l'on écrit :

$$I_b \leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^\infty(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\|\vec{u}\|^3_{L^3(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \leq CR^{-1}\|\vec{u}\|^3_{L^3(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}, \tag{4.17}$$

nous obtenons alors $\lim\limits_{R\to+\infty} I_b = 0$.

- Si $1 < \alpha < 2$, nous avons $\vec{u} \in L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$ avec la condition (4.8), *i.e.* $1 + \frac{\epsilon}{3} \leq \alpha \leq \frac{5}{3} + \frac{2}{9}\epsilon$. Donc, si $1 + \frac{\epsilon}{3} < \alpha \leq \frac{5}{3} + \frac{2}{9}\epsilon$, par les inégalités de Hölder avec $\frac{3\alpha-3-\epsilon}{6-\epsilon} + 3(\frac{3-\alpha}{6-\epsilon}) = 1$ nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} I_b &\leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\frac{6-\epsilon}{3\alpha-3-\epsilon}}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\|\vec{u}\|^3_{L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \\ &\leq CR^{-1+3\frac{3\alpha-3-\epsilon}{6-\epsilon}}\|\vec{u}\|^3_{L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}. \end{aligned}$$

Ainsi, si $1 + \frac{\epsilon}{3} < \alpha < \frac{5}{3} + \frac{2}{9}\epsilon$ les puissances de R sont négatives et cette quantité tend vers 0 si $R \to +\infty$. Si $\alpha = \frac{5}{3} + \frac{2}{9}\epsilon$, on a $-1 + 3\frac{3\alpha-3-\epsilon}{6-\epsilon} = 0$, mais comme $\vec{u} \in L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$, on a $\|\vec{u}\|_{L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement, si $1+\frac{\epsilon}{3} = \alpha$ alors $L^{\frac{6-\epsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3) = L^3(\mathbb{R}^3)$, les puissances de R sont négatives et on peut procéder comme dans (4.17). Dans tous les cas on obtient $\lim\limits_{R\to+\infty} I_b = 0$.

- Si maintenant $\frac{3}{5} < \alpha < 1$, ici on a $\vec{u} \in L^{\frac{6+\epsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3)$avec $1 - \frac{\epsilon}{3} \leq \alpha \leq \frac{5}{3} - \frac{2}{9}\epsilon$. Si $1 - \frac{\epsilon}{3} < \alpha \leq \frac{5}{3} - \frac{2}{9}\epsilon$, par les inégalités de Hölder avec $\frac{3\alpha-3+\epsilon}{6+\epsilon} + 3(\frac{3-\alpha}{6+\epsilon}) = 1$, il vient

$$I_b \leq CR^{-1+3\frac{3\alpha-3+\epsilon}{6+\epsilon}}\|\vec{u}\|^3_{L^{\frac{6+\epsilon}{3-\alpha}}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}.$$

Si $1 - \frac{\epsilon}{3} < \alpha < \frac{5}{3} - \frac{2}{9}\epsilon$, les puissances de R sont négatives, mais si $\alpha = \frac{5}{3} - \frac{2}{9}\epsilon$ on a $-1 + 3\frac{3\alpha-3+\epsilon}{6+\epsilon} = 0$ mais dans ce cas on a $\|\vec{u}\|_{L^{\frac{6+\epsilon}{3-\alpha}}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On remarque également que si $\alpha = 1 - \frac{\epsilon}{3}$, alors $L^{\frac{6+\epsilon}{3-\alpha}}(\mathbb{R}^3) = L^3(\mathbb{R}^3)$, et les puissances de R sont négatives, il suffit de procéder comme dans (4.17). Dans tous les cas nous avons $\lim\limits_{R\to+\infty} I_b = 0$.

(c) Le dernier terme de l'expression (4.14) se traite de manière totalement similaire au cas précédent, en effet si $\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ on obtient sans problème que $p \in L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et avec cette information on peut obtenir les mêmes estimations des lignes précédentes.

Nous avons donc montré que l'on a

$$\lim_{R\to+\infty} I_a = 0, \quad \lim_{R\to+\infty} I_b = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{R\to+\infty} I_c = 0,$$

ainsi, en revenant à l'expression (4.14) on obtient

$$\|\vec{u}\|_{\dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}} = 0,$$

ce qui nous permet d'obtenir $\vec{u} \equiv 0$. ■

4.4 Quelques exemples dans des sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$

Comme nous l'avons vu au Théorème 4.2.1, si $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ est une solution de l'équation de Navier-Stokes stationnaire

$$-\Delta\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \vec{\nabla}p = 0, \qquad div(\vec{u}) = 0, \tag{4.18}$$

telle que $\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $3 \leq q \leq \frac{9}{2}$, alors nous avons $\vec{u} \equiv 0$, mais nous ne savons pas obtenir l'unicité de la solution triviale lorsque l'on a $\frac{9}{2} < q \leq 6$. On notera que par les injections de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \subset L^6(\mathbb{R}^3)$, le cas particulier $q = 6$ découlera du cadre de travail considéré, il ne s'agit donc pas d'une hypothèse en plus. Nous pouvons alors présenter le problème ouvert suivant :

Problème 4.2 *Soit $\vec{u} \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ une solution des équations de Navier-Stokes stationnaires. Si l'on suppose en plus que $\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^3)$ avec $\frac{9}{2} < q < 6$, montrer que l'on a $\vec{u} \equiv 0$.*

Nous ne savons pas pour l'instant résoudre ce problème dans les espaces de Lebesgue usuels, toutefois dans l'article [54] nous avons donné quelques idées dans le cadre des espaces de Lebesgue d'exposant variable $L^{p(\cdot)}$.

Les espaces fonctionnels $L^{p(\cdot)}$ sont assez différents des espaces de Lebesgue classiques L^p. En effet, pour définir l'espace $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$, on procédera comme suit : étant donné une fonction $p(\cdot) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow [1, +\infty]$, on dira que $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ si $p(\cdot)$ est une fonction mesurable. Ensuite, pour une fonction mesurable $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, on définit la *fonction modulaire* $\varrho_{p(\cdot)}$ associée à $p(\cdot)$ par l'expression

$$\varrho_{p(\cdot)}(\vec{f}) = \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{f}(x)|^{p(x)} dx. \tag{4.19}$$

Ensuite, nous considérons la norme de Luxembourg $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}}$ associée à la fonction modulaire $\varrho_{p(\cdot)}$ (voir le livre [65] pour plus de détails) :

$$\|\vec{f}\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf\{\lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)}(\vec{f}/\lambda) \leq 1\}, \tag{4.20}$$

et nous définissons les espaces de Lebesgue d'exposant variable $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables telles que la quantité $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}}$ donnée ci-dessus est fini. Bien sûr, il n'y a pas de relations simples entre les espaces $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ et $L^p(\mathbb{R}^3)$.

En toute généralité, pour $n \geq 1$, considérons d'abord une fonction $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow [1, +\infty[$, nous dirons que $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ si $p(\cdot)$ est une fonction mesurable et que nous définissons $p^- = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess} \{p(x)\}$ et $p^+ = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess} \{p(x)\}$. Afin de distinguer les exposants variables des exposants constants, nous désignerons d'ailleurs toujours les fonctions exposants par $p(\cdot)$, par souci de simplicité et pour éviter les détails techniques (voir [65, Chapitre 3]), nous supposerons toujours ici que nous avons $1 < p^- \leq p^+ < +\infty$ (sauf indication contraire).

Avec ces exposants nous pouvons définir les espaces $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables telles que la norme (4.20) soit finie. Ces espaces fonctionnels $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ possèdent les propriétés structurelles des espaces normés et ce sont de plus des espaces de Banach, voir [65, Théorème 3.2.7] pour plus de détails.

De la même manière que dans le cas classique, étant donné $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ nous pouvons définir l'exposant conjugué de la variable $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ par la relation ponctuelle

$$q(x) = \frac{p(x)}{p(x) - 1}.$$

Ainsi, à partir de la formule précédente et des définitions de p^+, p^-, les relations suivantes sont vérifiées

$$q^- = \frac{p^+}{p^+ - 1} \leq \frac{p^-}{p^- - 1} = q^+. \tag{4.21}$$

Dans ce contexte, les inégalités de Hölder admettent la version suivante : soit $p(\cdot)$, $q(\cdot)$, $r(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions telles que nous ayons la relation ponctuelle $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^{r(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, le produit ponctuel fg appartient à l'espace $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ et on a l'estimation

$$\|fg\|_{L^{p(\cdot)}} \leq C\|f\|_{L^{q(\cdot)}}\|g\|_{L^{r(\cdot)}},$$

voir [63, Théorème 2.26] ou [65, Lemme 3.2.20] pour une preuve. Cette estimation peut être facilement généralisée aux champs vectoriels $\vec{f}, \vec{g} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et au produit $\vec{f} \cdot \vec{g}$.

Considérons maintenant un domaine mesurable Ω tel que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et soit $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$. On notera $p_\Omega(\cdot)$ l'exposant variable restreint à l'ensemble Ω, *i.e.* $p_\Omega(\cdot) = p(\cdot)_{|\Omega}$ et on écrit

$$p_\Omega^- = \inf_{x\in\Omega} \text{ess } \{p(x)\} \qquad \text{et} \qquad p_\Omega^+ = \sup_{x\in\Omega} \text{ess } \{p(x)\}.$$

De plus, par la définition de la norme (4.20) pour $f \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ on a la formule

$$\|f\|_{L^{p_\Omega(\cdot)}(\Omega)} = \|f\mathbb{1}_\Omega\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.22}$$

voir [63, Section 2.3, page 21]. Les résultats suivants seront utiles dans ce qui suit :

Lemme 4.4.1 *Considérons un ensemble mesurable $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ un exposant variable, supposons que nous avons $|\Omega| < +\infty$. Alors*

$$\|1\|_{L^{p_\Omega(\cdot)}(\Omega)} \leq 2\max\{|\Omega|^{\frac{1}{p^-}}, |\Omega|^{\frac{1}{p^+}}\}.$$

La preuve de ce résultat peut être consultée dans [65, Lemme 3.2.12]. Voici une autre propriété utile :

Lemme 4.4.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ un exposant variable. Nous avons l'inclusion spatiale $L^\infty(\Omega) \subset L^{p_\Omega(\cdot)}(\Omega)$, si et seulement si $1 \in L^{p_\Omega(\cdot)}(\Omega)$ et nous avons l'estimation*

$$\|f\|_{L^{p_\Omega(\cdot)}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\|1\|_{L^{p_\Omega(\cdot)}(\Omega)}.$$

En particulier, l'injection est valable si $|\Omega| < +\infty$.

La preuve de ce résultat peut être consultée dans [63, Proposition 2.43]. Pour plus de détails sur les espaces de Lebesgue à exposant variable, sur leur structure interne ainsi que de nombreuses autres propriétés, voir les livres [63] et [65].

Nous pouvons maintenant énoncer nos principaux résultats.

Théorème 4.4.1 *Soit $(\vec{u}, p) \in (L^2_{loc}(\mathbb{R}^3, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3))$ une solution faible de l'équation de Navier-Stokes stationnaire* (4.18). *Considérons le cylindre suivant :*

$$\mathscr{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 \leq 1,\ x_1 \in \mathbb{R}^3\}.$$

De plus, considérons l'exposant variable $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ défini par

$$p(x) = \begin{cases} 3 < p^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})} \leq p_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}(x) \leq p^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})} < \frac{9}{2}, \\ \\ \frac{9}{2} < p^-_{\mathscr{C}} \leq p_{\mathscr{C}}(x) \leq p^+_{\mathscr{C}} < +\infty. \end{cases} \tag{4.23}$$

Si l'on suppose que l'on a $\vec{u} \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ et $p \in L^{\frac{p(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)$, alors nous avons $\vec{u} = 0$.

On notera pour commencer qu'en plus de la condition $\vec{u} \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ sur le champ de vitesse, nous exigeons également l'hypothèse $p \in L^{\frac{p(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)$ pour la pression. Expliquons cette contrainte : rappelons qu'en utilisant la propriété de divergence nulle de $\vec{u}$, on a la relation classique $-\Delta p = div(div(\vec{u} \otimes \vec{u}))$ à partir de laquelle on déduit l'expression $p = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} \mathcal{R}_i\mathcal{R}_i(u_iu_j)$ où $\mathcal{R}_i$ sont les transformations de Riesz habituelles. On peut ainsi obtenir assez facilement des informations sur la pression p à partir des informations disponibles sur $\vec{u}$, *tant que* les transformées de Riesz sont bornées dans le cadre fonctionnel considéré. Cependant, à notre connaissance, dans le cas des espaces de Lebesgue à exposants variables, en toute généralité, les transformées de Riesz *ne sont pas bornées* dans $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ sauf si l'exposant $p(\cdot)$ satisfait les limites inférieure et supérieure $1 < p^- \leq p(\cdot) \leq p^+ < +\infty$ et une condition supplémentaire (voir [65, Lemme 12.4.3]) qui peut être facilement énoncé en termes d'une propriété log-Höldérienne de régularité[1] : nous dirons que $p(\cdot)$ est log-Höldérienne continue (noté $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^3)$) si

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| &\leq \frac{C}{\log(e + 1/|x-y|)} \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^3, \quad \text{et} \\
\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p_\infty}\right| &\leq \frac{C}{\log(e + |x|)} \qquad \text{pour tous } x \in \mathbb{R}^3, \quad \text{où } \frac{1}{p_\infty} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{p(x)}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Voir Définition 4.1.1 et Définition 4.1.4 du livre [65] pour plus de détails sur la propriété de régularité log-Höldérienne.

On notera que la condition (4.24) ci-dessus impose un comportement spécifique des exposants variables à l'infini qui n'est pas satisfait par la fonction $p(\cdot)$ considérée dans (4.23). Ainsi, puisqu'on ne sait pas déduire aussi facilement que pour les espaces de Lebesgue classiques un contrôle intéressant sur la pression p à partir de l'information de $\vec{u}$, on pose donc ici la contrainte $p \in L^{\frac{p(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)$ ce qui n'interfère pas avec les objectifs généraux de nos théorèmes.

Ensuite, nous remarquons que sur l'ensemble $\mathbb{R}^3 \setminus \mathscr{C}$ (*i.e.* en dehors du cylindre $\mathscr{C}$) nous imposons $3 < p(\cdot) < \frac{9}{2}$: ce sont les restrictions connues à partir desquelles on peut déduire l'unicité de la solution triviale (voir le Théorème 4.2.1 ci-dessus). La nouveauté vient alors des conditions *à l'intérieur* du cylindre $\mathscr{C}$ où l'on peut considérer des valeurs d'intégrabilité au-delà de cet intervalle, en fait la contrainte (4.23) a été justement faite pour étudier le cas $p(\cdot) > \frac{9}{2}$. Notez également que la mesure de Lebesgue du cylindre est infinie (*ie.* $|\mathscr{C}| = +\infty$) et que le résultat précédent peut être étendu à de nombreux sous-ensembles différents de $\mathbb{R}^3$ tant qu'ils satisfont quelques restrictions simples (par exemple une union finie de tels cylindres) : cela montre que l'on peut obtenir l'unicité de la solution triviale avec une décroissance lente à l'infini dans certaines régions non négligeables de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Dans le théorème suivant, nous étudions plus en détail le comportement de l'exposant variable $p(\cdot)$ dans le cas $\frac{9}{2} < p(\cdot)$ en considérant des sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ un peu différents :

Théorème 4.4.2 *Soit* $(\vec{u}, p) \in (L^2_{loc}(\mathbb{R}^3, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3))$ *une solution faible de l'équation stationnaire de Navier-Stokes* (4.18). *Considérons maintenant* $\mathscr{S}$ *l'ensemble défini par*

$$\mathscr{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq x_1^\gamma,\ x_1 > 0\},$$

1. Soulignons que la continuité des transformées de Riesz dans les espaces $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ peut être exprimé par une condition plus générale et plus technique : on a $\|\mathcal{R}_i(f)\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}$ si on a $1 < p^- \leq p^+ < +\infty$ et $p(\cdot) \in \mathcal{A}$, où la définition de la classe des exposants variables $\mathcal{A}$ est donné dans [65, Définition 4.4.6]. Bien sûr, nous avons $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{log}(\mathbb{R}^3)$ si $p(\cdot) \in \mathcal{A}$, voir le livre [65] pour plus de détails.

où $0 < \gamma < 1$. *Nous définissons l'exposant variable* $\mathfrak{p}(\cdot)$ *par les conditions suivantes :*

$$\mathfrak{p}(x) = \begin{cases} 3 < \mathfrak{p}^-_{(\mathbb{R}^3 \setminus \mathscr{S})} \leq \mathfrak{p}_{(\mathbb{R}^3 \setminus \mathscr{S})}(x) \leq \mathfrak{p}^+_{(\mathbb{R}^3 \setminus \mathscr{S})} < \frac{9}{2}, \\ \\ \frac{9}{2} < \mathfrak{p}^-_{\mathscr{S}} \leq \mathfrak{p}_{\mathscr{S}}(x) \leq \mathfrak{p}^+_{\mathscr{S}} < \frac{6\gamma+3}{2\gamma}. \end{cases} \tag{4.25}$$

Si on a la restriction $\vec{u} \in L^{\mathfrak{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ *et* $p \in L^{\frac{\mathfrak{p}(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)$, *alors on obtient que* $\vec{u} = 0$.

Comme nous pouvons l'observer ici, plus l'ensemble $\mathscr{S}$ est grand (reflété par la condition $\gamma \to 1^-$), plus la limite supérieure de l'exposant variable $\mathfrak{p}^+_{\mathscr{S}}$ tend vers des valeurs connues (*c'est-à-dire* nous avons $\frac{6\gamma+3}{2\gamma} \to \frac{9}{2}^+$). Notez également que, si $\gamma \to 0^+$ la forme de l'ensemble $\mathscr{S}$ tend vers le cylindre $\mathscr{C}$ considéré dans le Théorème 4.4.1 ci-dessus et alors nous avons que la limite supérieure satisfait $\frac{6\gamma+3}{2\gamma} \to +\infty$, qui est la deuxième condition énoncée dans l'expression (4.23). Ce théorème montre comment l'exposant variable $\mathfrak{p}(\cdot)$ peut varier sur un ensemble $\mathscr{S}$ dont la mesure de Lebesgue est également variable : en effet, si la mesure de cet ensemble est raisonnable alors nous pouvons considérer une décroissance à l'infini relativement lente et nous pouvons toujours obtenir l'unicité de la solution triviale. Cependant, si la mesure de cet ensemble devient grande alors nous retrouverons la borne supérieure connue $\frac{9}{2}$ ce qui nous permet de résoudre le problème d'unicité considéré ici. Notez que lorsque $\gamma = 1$ ce résultat donne un exemple de tels ensembles.

Il convient de remarquer maintenant que, bien que les valeurs d'intégrabilité soient en dehors de l'intervalle $]3, \frac{9}{2}[$ peuvent être considérées dans les deux résultats précédents (à savoir $\frac{9}{2} < p(\cdot), \mathfrak{p}(\cdot)$ sur des sous-ensembles appropriés de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{C}$ ou $\mathscr{S}$), nous avons toujours les limites supérieures $p^+, \mathfrak{p}^+ < +\infty$. Dans le théorème suivant, nous étudions le cas où nous pouvons avoir $p(\cdot) = +\infty$ sur un sous-ensemble particulier de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 4.4.3 *Soit* $(\vec{u}, p) \in (L^2_{loc}(\mathbb{R}^3, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3))$ *une solution faible de l'équation stationnaire de Navier-Stokes* (4.18) *On définit l'ensemble* $\mathscr{N}$ *par la condition.*

$$\mathscr{N} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq x_1^{-\frac{\sigma}{2}}, \;\; x_1 > 0\},$$

avec $0 < \sigma < 1$. *Considérons maintenant l'exposant variable* $\mathbf{p}(\cdot)$ *donné par les conditions suivantes :*

$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} 3 < \mathbf{p}^-_{(\mathbb{R}^3 \setminus \mathscr{N})} \leq \mathbf{p}_{(\mathbb{R}^3 \setminus \mathscr{N})}(x) \leq \mathbf{p}^+_{(\mathbb{R}^3 \setminus \mathscr{N})} < \frac{9}{2}, \\ \\ \mathbf{p}_{\mathscr{N}}(x) = +\infty. \end{cases} \tag{4.26}$$

Si on a la restriction $\vec{u} \in L^{\mathbf{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ *et* $p \in L^{\frac{\mathbf{p}(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)$, *alors on obtient que* $\vec{u} = 0$.

Notons d'abord que la mesure de Lebesgue de l'ensemble $\mathscr{N}$ est infinie, on peut donc considérer ici des champs de vecteurs $\vec{u}$ satisfaisant l'équation (4.18) qui sont $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$, ont une désintégration appropriée à l'infini dans une grande partie de l'espace $\mathbb{R}^3$ mais qui peut être constante à l'infini sur un sous-ensemble non négligeable de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, en considérant toutes ces restrictions, nous pouvons déduire le caractère unique de la solution triviale et ce résultat peut suggérer qu'une certaine décroissance à l'infini n'est pas absolument nécessaire pour résoudre les Problèmes 4.1 ou 4.2.

Démonstrations

La preuve des trois théorèmes précédents est relativement similaire : on commence par localiser l'information avec une fonction de troncature lisse supportée dans une boule $B(0,R)$ (on pourra prendre la fonction de troncature donnée dans (4.4)) puis on analyse le comportement de l'information localisée lorsque $R\to+\infty$: c'est dans cette étape que nous exploiterons les différentes hypothèses énoncées dans les théorèmes 4.4.1, 4.4.2 et 4.4.3 pour en déduire l'unicité de la solution triviale.

Soit $\vec{u}\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ un champ de vecteur à divergence nulle qui satisfait au sens faible les équations stationnaires de Navier-Stokes (4.18). Puisque par [63, Théorème 2.51] on a l'inclusion

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)\subset L^{p^-}(\mathbb{R}^3)+L^{p^+}(\mathbb{R}^3),$$

et puisque par la définition de l'exposant variable $p(\cdot)$ (ou $\mathfrak{p}(\cdot)$ ou $\mathbf{p}(\cdot)$) utilisé dans nos théorèmes nous avons toujours les limites inférieure et supérieure $3<p^-\leq p^+\leq+\infty$ (voir (4.23) pour $p(\cdot)$, (4.25) pour $\mathfrak{p}(\cdot)$ et (4.26) pour $\mathbf{p}(\cdot)$), alors on en déduit les inclusions suivantes :

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)\subset L^{p^-}(\mathbb{R}^3)+L^{p^+}(\mathbb{R}^3)\subset L^{p^-}_{loc}(\mathbb{R}^3)+L^{p^+}_{loc}(\mathbb{R}^3)\subset L^3_{loc}(\mathbb{R}^3).$$

Ainsi, comme nous avons $\vec{u}\in L^3_{loc}(\mathbb{R}^3)$, alors en suivant [73, Théorème X.1.1] nous obtenons que le champ de vitesse $\vec{u}$ et la pression p sont des fonctions régulières.

Nous pouvons alors procéder comme dans (4.5) pour obtenir :

$$\int_{B_{\frac{R}{2}}}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2dx\leq\underbrace{\int_{B_R}\Delta\theta_R\frac{|\vec{u}|^2}{2}dx}_{\alpha(R)}+\underbrace{\int_{B_R}\vec{\nabla}\theta_R\cdot\left(\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}+p\right)\vec{u}\right)dx}_{\beta(R)}. \tag{4.27}$$

Pour conclure que nous avons $\vec{u}=0$ dans le contexte des Théorèmes 4.4.1, 4.4.2 et 4.4.3, il suffit de vérifier comme précédemment que nous avons les limites suivantes

$$\lim_{R\to+\infty}\alpha(R)=\lim_{R\to+\infty}\beta(R)=0. \tag{4.28}$$

Démonstration du Théorème 4.4.1

1) Estimation pour $\alpha(R)$. Pour étudier le terme $\alpha(R)$ dans (4.27), par l'inégalité de Hölder [2] avec $\frac{2}{p(\cdot)}+\frac{1}{q(\cdot)}=1$ (voir [63, Theorem 2.26]) on obtient

$$\alpha(R)=\int_{B_R}\Delta\theta_R\frac{|\vec{u}|^2}{2}dx\leq\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\theta_R\frac{|\vec{u}|^2}{2}dx\leq C\|\Delta\theta_R\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}\||\vec{u}|^2\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)},$$

comme on a $\||\vec{u}|^2\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)}=\|\vec{u}\|^2_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}$ (voir [63, Proposition 2.18]) nous écrivons

$$\alpha(R)\leq C\|\Delta\theta_R\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}\|^2_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}. \tag{4.29}$$

Etant donné que l'on a par hypothèse $\|\vec{u}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}<+\infty$, nous devons étudier $\|\Delta\theta_R\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}$.

2. On notera que par (4.23) on a $1\leq\frac{p(\cdot)}{2}\leq+\infty$ ce qui nous permet d'appliquer ces inégalités.

Puisque l'exposant variable $p(\cdot)$ satisfait les relations énoncées dans (4.23), à partir de la relation ponctuelle Höldérienne $\frac{2}{p(\cdot)}+\frac{1}{q(\cdot)}=1$, on en déduit que l'exposant variable $q(\cdot)$ satisfait l'équation $q(\cdot)=\frac{p(\cdot)}{p(\cdot)-2}$, *i.e.* :

$$q(x)=\begin{cases}\frac{9}{5}<q^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}\leq q_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}(x)\leq q^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}<3,\\ \\ 1<q^-_{\mathscr{C}}\leq q_{\mathscr{C}}(x)\leq q^+_{\mathscr{C}}<\frac{9}{5},\end{cases}\tag{4.30}$$

avec $\mathscr{C}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_2^2+x_3^2\leq 1,\ x_1\in\mathbb{R}^3\}$.

Maintenant, pour estimer le premier terme du côté droit de l'expression (4.29) ci-dessus, on rappelle qu'à partir de la définition de la fonction θ_R on a *supp* $(\Delta\theta_R)\subset\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)=\{x\in\mathbb{R}^3:\frac{R}{2}\leq|x|\leq R\}$ et on a

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}=\|\Delta\theta_R\|_{L^{q(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}.\tag{4.31}$$

Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les ensembles suivants :

$$\mathscr{C}_1=\mathcal{C}\left(\tfrac{R}{2},R\right)\cap\mathscr{C}\qquad\text{and}\qquad\mathscr{C}_2=\mathcal{C}\left(\tfrac{R}{2},R\right)\setminus\mathscr{C},\tag{4.32}$$

alors, nous avons :

$$\begin{aligned}\|\Delta\theta_R\|_{L^{q(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} &= \|\Delta\theta_R(\mathbb{1}_{\mathscr{C}_1}+\mathbb{1}_{\mathscr{C}_2})\|_{L^{q(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\\ &\leq \|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_1}(\cdot)}(\mathscr{C}_1)}+\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_2}(\cdot)}(\mathscr{C}_2)}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Nous étudierons ces deux termes séparément.

- Afin de contrôler la quantité $\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_1}(\cdot)}(\mathscr{C}_1)}$ ci-dessus, par le Lemme 4.4.2 on peut écrire

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_1}(\cdot)}(\mathscr{C}_1)}\leq C\|\Delta\theta_R\|_{L^\infty(\mathscr{C}_1)}\|1\|_{L^{q_{\mathscr{C}_1}(\cdot)}(\mathscr{C}_1)}.\tag{4.34}$$

  Par la définition de la fonction θ_R, comme $\mathscr{C}_1=\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\cap\mathscr{C}\subset\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)$, nous avons $\|\Delta\theta_R\|_{L^\infty(\mathscr{C}_1)}\leq\|\Delta\theta_R\|_{L^\infty(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\leq CR^{-2}$ et on écrit

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_1}(\cdot)}(\mathscr{C}_1)}\leq CR^{-2}\|1\|_{L^{q_{\mathscr{C}_1}(\cdot)}(\mathscr{C}_1)}.$$

  Comme $\mathscr{C}_1=\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\cap\mathscr{C}\subset\mathscr{C}$, on a $q^-_{\mathscr{C}}\leq q^-_{\mathscr{C}_1}\leq q^+_{\mathscr{C}_1}\leq q^+_{\mathscr{C}}$ et en appliquant le Lemme 4.4.1 pour estimer la quantité $\|1\|_{L^{q_{\mathscr{C}_1}(\cdot)}(\mathscr{C}_1)}$, il vient

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_1}(\cdot)}(\mathscr{C}_1)}\leq CR^{-2}\max\{|\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\cap\mathscr{C}|^{\frac{1}{q^-_{\mathscr{C}}}},|\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\cap\mathscr{C}|^{\frac{1}{q^+_{\mathscr{C}}}}\}.\tag{4.35}$$

  Puisqu'on a

$$\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\cap\mathscr{C}\subset\mathscr{A}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:x_2^2+x_3^2\leq 1,-R<x_1<R\},$$

  on en déduit $|\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\cap\mathscr{C}|\leq|\mathscr{A}|=CR$, comme $\mathscr{A}$ est un cylindre de diamètre 1 et de hauteur $2R$. On obtient alors

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_1}(\cdot)}(\mathscr{C}_1)}\leq C\max\{R^{-2+\frac{1}{q^-_{\mathscr{C}}}},R^{-2+\frac{1}{q^+_{\mathscr{C}}}}\},\tag{4.36}$$

  mais par (4.30) nous avons $\frac{5}{9}<\frac{1}{q^+_{\mathscr{C}}}\leq\frac{1}{q^-_{\mathscr{C}}}<1$, il vient $-2+\frac{1}{q^+_{\mathscr{C}}}\leq-2+\frac{1}{q^-_{\mathscr{C}}}<-1$ et nous obtenons

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_1}(\cdot)}(\mathscr{C}_1)}\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0.\tag{4.37}$$

- Considérons maintenant le deuxième terme du membre de droite de (4.33). Par les mêmes arguments on a

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_2}(\cdot)}(\mathscr{C}_2)} \leq C\|\Delta\theta_R\|_{L^\infty(\mathscr{C}_2)}\|1\|_{L^{q_{\mathscr{C}_2}(\cdot)}(\mathscr{C}_2)}, \tag{4.38}$$

puisque $\mathscr{C}_2 = \mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\setminus\mathscr{C} \subset \mathcal{C}(\frac{R}{2},R)$ on a $\|\Delta\theta_R\|_{L^\infty(\mathscr{C}_2)} \leq \|\Delta\theta_R\|_{L^\infty(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \leq CR^{-2}$, et l'on obtient

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_2}(\cdot)}(\mathscr{C}_2)} \leq CR^{-2}\|1\|_{L^{q_{\mathscr{C}_2}(\cdot)}(\mathscr{C}_2)},$$

en appliquant le Lemme 4.4.1 on peut écrire

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_2}(\cdot)}(\mathscr{C}_2)} \leq CR^{-2}\max\{|\mathscr{C}_2|^{\frac{1}{q^-_{\mathscr{C}_2}}}, |\mathscr{C}_2|^{\frac{1}{q^+_{\mathscr{C}_2}}}\}.$$

Nous remarquons que l'on a $\mathscr{C}_2 = \mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\setminus\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C}$ et par la première relation dans (4.30), nous avons $\frac{9}{5} < q^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})} < q^-_{\mathscr{C}_2} \leq q^+_{\mathscr{C}_2} < q^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})} < 3$, *i.e.*

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{q^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}} < \frac{1}{q^+_{\mathscr{C}_2}} \leq \frac{1}{q^-_{\mathscr{C}_2}} < \frac{1}{q^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}} < \frac{5}{9}.$$

De plus comme $|\mathscr{C}_2| = |\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\setminus\mathscr{C}| \leq |\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)| \leq CR^3$ on écrit

$$\begin{aligned}\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_2}(\cdot)}(\mathscr{C}_2)} &\leq CR^{-2}\max\{R^{\frac{3}{q^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}}}, R^{\frac{3}{q^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}}}\}\\ &\leq C\max\{R^{-2+\frac{3}{q^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}}}, R^{-2+\frac{3}{q^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}}}\}.\end{aligned} \tag{4.39}$$

En remarquant que $-2+\frac{3}{q^+_{\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C}}} < -2+\frac{3}{q^-_{\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C}}} < -\frac{1}{3}$, on obtient

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{q_{\mathscr{C}_2}(\cdot)}(\mathscr{C}_2)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.40}$$

Avec les informations (4.37) et (4.40), on peut revenir à l'estimation (4.33) et on obtient que $\|\Delta\theta_R\|_{L^{q(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} = \|\Delta\theta_R\|_{L^{q(\cdot)}(\mathbb{R}^3)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De ce contrôle et de l'estimation (4.29), on peut déduire directement que $\alpha(R) \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) Estimations pour $\beta(R)$. Nous rappelons qu'à partir de la définition de θ_R nous avons $supp(\vec{\nabla}\theta_R) \subset \mathcal{C}(\frac{R}{2},R)$. Ainsi, par la définition du terme $\beta(R)$ donnée dans (4.27) on peut écrire

$$\begin{aligned}|\beta(R)| &= \left|\int_{B_R}\vec{\nabla}\theta_R\cdot\left(\left(\frac{|\vec{u}|^2}{2}+p\right)\vec{u}\right)dx\right|\\ &\leq \frac{1}{2}\underbrace{\int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)}|\vec{\nabla}\theta_R||\vec{u}|^3dx}_{\beta_1(R)} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)}|\vec{\nabla}\theta_R||p||\vec{u}|dx}_{\beta_2(R)}.\end{aligned} \tag{4.41}$$

Nous visons à prouver maintenant que nous avons $\lim\limits_{R\to+\infty}\beta_1(R) = \lim\limits_{R\to+\infty}\beta_2(R) = 0$ et ces deux limites seront être étudié séparément.

- Pour $\beta_1(R)$ nous écrivons par les inégalités de Hölder avec $\frac{3}{p(\cdot)} + \frac{1}{r(\cdot)} = 1$:

$$\beta_1(R) = \int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)} |\vec{\nabla}\theta_R||\vec{u}|^3 dx \leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \||\vec{u}|^3\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{3}}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))},$$

puisque $\||\vec{u}|^3\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{3}}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \leq \||\vec{u}|^3\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{3}}(\mathbb{R}^3)}$, nous avons

$$\begin{aligned} \beta_1(R) &\leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \||\vec{u}|^3\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{3}}(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \|\vec{u}\|^3_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

où nous avons utilisé l'identité $\||\vec{u}|^3\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{3}}(\mathbb{R}^3)} = \|\vec{u}\|^3_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}$. Puisque, par hypothèse on a $\|\vec{u}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)} < +\infty$, pour prouver que $\lim\limits_{R\to+\infty} \beta_1(R) = 0$ il suffit d'étudier la quantité $\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}$. Pour cela, notons que comme l'exposant variable $p(\cdot)$ satisfait les relations énoncées dans (4.23), à partir de la relation ponctuelle Hölder $\frac{3}{p(\cdot)} + \frac{1}{r(\cdot)} = 1$, nous avons $r(\cdot) = \frac{p(\cdot)}{p(\cdot)-3}$, *i.e.* :

$$r(x) = \begin{cases} 3 < r^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})} \leq r_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}(x) \leq r^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})} < +\infty, \\ \\ 1 < r^-_{\mathscr{C}} \leq r_{\mathscr{C}}(x) \leq r^+_{\mathscr{C}} < 3, \end{cases} \tag{4.43}$$

où $\mathscr{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_1 \in \mathbb{R}^3\}$. En utilisant les ensembles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ donnés dans (4.32) et en procédant comme dans (4.33) on écrit

$$\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \leq \|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r_{\mathscr{C}_1}(\cdot)}(\mathscr{C}_1)} + \|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r_{\mathscr{C}_2}(\cdot)}(\mathscr{C}_2)}.$$

En suivant les mêmes idées qui nous ont conduit aux estimations (4.36) et (4.39) (à la différence que $\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^\infty} \leq CR^{-1}$) on obtient

$$\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \leq C \max\{R^{-1+\frac{1}{r^-_{\mathscr{C}}}}, R^{-1+\frac{1}{r^+_{\mathscr{C}}}}\} + C\max\{R^{-1+\frac{3}{r^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}}}, R^{-1+\frac{3}{r^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}}}\}, \tag{4.44}$$

maintenant, d'après les valeurs de la fonction $r(\cdot)$ données dans (4.43) on a facilement

$$-1 + \frac{1}{r^+_{\mathscr{C}}} \leq -1 + \frac{1}{r^-_{\mathscr{C}}} < 0 \qquad \text{and} \qquad -1 + \frac{3}{r^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}} \leq -1 + \frac{3}{r^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{C})}} < 0,$$

d'où on déduit que $\lim\limits_{R\to+\infty} \|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} = 0$, et donc, par le contrôle (4.42) on a $\lim\limits_{R\to+\infty} \beta_1(R) = 0$.

- Nous continuons maintenant avec l'analyse du terme $\beta_2(R)$ donné dans l'expression (4.41). En appliquant les inégalités de Hölder avec $\frac{1}{p(\cdot)} + \frac{2}{p(\cdot)} + \frac{1}{r(\cdot)} = 1$ (voir [63, Corollaire 2.30]), on a

$$\begin{aligned} \beta_2(R) &= \int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)} |\vec{\nabla}\theta_R||p||\vec{u}| dx \leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \|p\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{2}}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \|\vec{u}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \\ &\leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \|p\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)} \|\vec{u}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Puisque nous avons par hypothèse que $\vec{u} \in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ et $p \in L^{\frac{p(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)$, il suffit d'étudier la quantité $\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}$ où l'exposant $r(\cdot)$ satisfait (4.43). En suivant les mêmes arguments que ci-dessus, nous obtenons $\lim\limits_{R\to+\infty} \|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{r(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} = 0$, et nous avons donc la limite $\lim\limits_{R\to+\infty} \beta_2(R) = 0$.

Avec ces deux limites à portée de main pour les quantités $\beta_1(R)$ et $\beta_2(R)$, on déduit facilement de (4.41) que $\lim\limits_{R\to+\infty} \beta(R) = 0$.

Nous avons ainsi prouvé que les termes $\alpha(R)$ et $\beta(R)$ donnés dans (4.27) tendent vers 0 lorsque $R \to +\infty$: la preuve du Théorème 4.4.1 est maintenant terminée. ■

Démonstration du Théorème 4.4.2

Il suffit de prouver les limites (4.28) où les quantités $\alpha(R)$ et $\beta(R)$ sont définies dans (4.27).

1) Estimations pour $\alpha(R)$. En procédant comme dans (4.29) on a l'estimation

$$\alpha(R) = \int_{B_R} \Delta\theta_R \frac{|\vec{u}|^2}{2} dx \leq C\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathfrak{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)} \|\vec{u}\|^2_{L^{\mathfrak{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.45}$$

où nous avons appliqué les inégalités de Hölder avec $\frac{2}{\mathfrak{p}(\cdot)} + \frac{1}{\mathfrak{q}(\cdot)} = 1$ (*i.e.* $\mathfrak{q}(\cdot) = \frac{\mathfrak{p}(\cdot)}{\mathfrak{p}(\cdot)-2}$). Comme l'exposant variable $\mathfrak{p}(\cdot)$ satisfait les conditions (4.25), on a donc les conditions suivantes pour $\mathfrak{q}(\cdot)$

$$\mathfrak{q}(x) = \begin{cases} \frac{9}{5} < \mathfrak{q}^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{S})} \leq \mathfrak{q}_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{S})}(x) \leq \mathfrak{q}^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{S})} < 3, \\ \\ \frac{6\gamma+3}{2\gamma+3} < \mathfrak{q}^-_{\mathscr{S}} \leq \mathfrak{q}_{\mathscr{S}}(x) \leq \mathfrak{q}^+_{\mathscr{S}} < \frac{9}{5}, \end{cases} \tag{4.46}$$

où $\mathscr{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leq x_1^\gamma,\ x_1 > 0\}$ et $0 < \gamma < 1$.

Puisque nous avons par hypothèse que $\vec{u} \in L^{\mathfrak{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$, comme expliqué précédemment, nous pouvons nous concentrer sur la quantité $\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathfrak{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}$. Encore une fois, grâce aux propriétés de support de cette fonction localisante θ_R, nous pouvons écrire (voir (4.31) ci-dessus)

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathfrak{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)} = \|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathfrak{q}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}.$$

Si l'on écrit $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ les ensembles

$$\mathscr{S}_1 = \mathcal{C}\left(\tfrac{R}{2}, R\right) \cap \mathscr{S} \qquad \text{and} \qquad \mathscr{S}_2 = \mathcal{C}\left(\tfrac{R}{2}, R\right) \setminus \mathscr{S},$$

on obtient

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathfrak{q}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \leq \|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathfrak{q}_{\mathscr{S}_1}(\cdot)}(\mathscr{S}_1)} + \|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathfrak{q}_{\mathscr{S}_2}(\cdot)}(\mathscr{S}_2)}. \tag{4.47}$$

Pour le premier terme du membre de droite ci-dessus, en suivant les mêmes idées données dans (4.34)-(4.35), on a

$$\begin{aligned} \|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathfrak{q}_{\mathscr{S}_1}(\cdot)}(\mathscr{S}_1)} &\leq C\|\Delta\theta_R\|_{L^\infty(\mathscr{S}_1)}\|1\|_{L^{\mathfrak{q}_{\mathscr{S}_1}(\cdot)}(\mathscr{S}_1)} \leq CR^{-2}\|1\|_{L^{\mathfrak{q}_{\mathscr{S}_1}(\cdot)}(\mathscr{S}_1)} \\ &\leq CR^{-2}\max\{|\mathcal{C}(\tfrac{R}{2}, R) \cap \mathscr{S}|^{\frac{1}{\mathfrak{q}^-_{\mathscr{S}}}}, |\mathcal{C}(\tfrac{R}{2}, R) \cap \mathscr{S}|^{\frac{1}{\mathfrak{q}^+_{\mathscr{S}}}}\}. \end{aligned}$$

Puisque l'on a

$$\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\cap \mathscr{S} \subset \mathscr{B}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x_2^2+x_3^2}\leq x_1^{\gamma},\ 0<x_1<R\},$$

en calculant le volume du solide de révolution $\mathscr{B}$ défini ci-dessus, on a

$$|\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\cap \mathscr{S}|\leq |\mathscr{B}| = C\int_0^R x_1^{2\gamma}dx_1 = CR^{2\gamma+1},$$

et nous écrivons

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathfrak{q}_{\mathscr{S}_1}(\cdot)}(\mathscr{S}_1)}\leq C\max\{R^{-2+\frac{2\gamma+1}{\mathfrak{q}^-_{\mathscr{S}}}}, R^{-2+\frac{2\gamma+1}{\mathfrak{q}^+_{\mathscr{S}}}}\}. \tag{4.48}$$

Mais comme on a (4.46), il vient $\frac{5}{9}<\frac{1}{\mathfrak{q}^+_{\mathscr{S}}}\leq\frac{1}{\mathfrak{q}^-_{\mathscr{S}}}<\frac{2\gamma+3}{6\gamma+3}$, et l'on obtient (car $0<\gamma<1$)

$$-2+\frac{2\gamma+1}{\mathfrak{q}^+_{\mathscr{S}}}\leq -2+\frac{2\gamma+1}{\mathfrak{q}^-_{\mathscr{S}}}<-2+(2\gamma+1)\frac{2\gamma+3}{6\gamma+3}<0,$$

et donc toutes les puissances de $R>1$ dans la formule (4.48) sont négatives, d'où on déduit facilement $\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathfrak{q}_{\mathscr{S}_1}(\cdot)}(\mathscr{S}_1)}\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Pour le deuxième terme du côté droit de (4.47), puisque nous avons $\mathscr{S}_2=\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\setminus\mathscr{S}\subset\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{S}$, par les mêmes arguments donnés précédemment dans (4.38)-(4.39) on obtient $\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathfrak{q}_{\mathscr{S}_2}(\cdot)}(\mathscr{S}_2)}\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Avec toutes ces estimations à portée de main et en revenant à (4.45) on obtient finalement $\lim\limits_{R\to+\infty}\alpha(R)\to 0$.

2) Estimations pour $\beta(R)$. En suivant les idées de (4.41), nous avons

$$|\beta(R)|\leq \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)}|\vec{\nabla}\theta_R||\vec{u}|^3dx}_{\beta_1(R)}+\underbrace{\int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)}|\vec{\nabla}\theta_R||P||\vec{u}|dx}_{\beta_2(R)}. \tag{4.49}$$

Pour le premier terme du côté droit ci-dessus, suivant (4.42) on écrit

$$\beta_1(R)\leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathfrak{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\|\vec{u}\|^3_{L^{\mathfrak{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}, \tag{4.50}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Hölder avec $\frac{3}{\mathfrak{p}(\cdot)}+\frac{1}{\mathfrak{r}(\cdot)}=1$ (*i.e.* nous avons $\mathfrak{r}(\cdot)=\frac{\mathfrak{p}(\cdot)}{\mathfrak{p}(\cdot)-3}$). Comme l'exposant $\mathfrak{p}(\cdot)$ est donné par les conditions énoncées dans (4.25), l'exposant variable $\mathfrak{r}(\cdot)$ satisfait

$$\mathfrak{r}(x)=\begin{cases}3<\mathfrak{r}^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{S})}\leq\mathfrak{r}_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{S})}(x)\leq\mathfrak{r}^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{S})}<+\infty,\\[2ex] 2\gamma+1<\mathfrak{r}^-_{\mathscr{S}}\leq\mathfrak{r}_{\mathscr{S}}(x)\leq\mathfrak{r}^+_{\mathscr{S}}<3.\end{cases} \tag{4.51}$$

Encore une fois, puisque par hypothèse nous avons $\|\vec{u}\|_{L^{\mathfrak{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}<+\infty$, pour comprendre le comportement de $\beta_1(R)$ il suffit d'étudier la quantité $\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathfrak{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}$. En suivant les idées principales utilisées pour obtenir l'estimation (4.44) et par les mêmes arguments affichés ci-dessus (rappelons que $|\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\cap\mathscr{S}|\leq CR^{2\gamma+1}$), on a

$$\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathfrak{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\leq C\max\{R^{-1+\frac{2\gamma+1}{\mathfrak{r}^-_{\mathscr{S}}}},R^{-1+\frac{2\gamma+1}{\mathfrak{r}^+_{\mathscr{S}}}}\}+C\max\{R^{-1+\frac{3}{\mathfrak{r}^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{S})}}},R^{-1+\frac{3}{\mathfrak{r}^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{S})}}}\}.$$

Par les contraintes (4.51) on obtient

$$-1+\frac{2\gamma+1}{\mathfrak{r}^+_{\mathscr{S}}}\leq -1+\frac{2\gamma+1}{\mathfrak{r}^-_{\mathscr{S}}}<0 \qquad \text{and} \qquad -1+\frac{3}{\mathfrak{r}^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{S})}}\leq -1+\frac{3}{\mathfrak{r}^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{S})}}<0,$$

et comme toutes les puissances du paramètre $R>1$ sont négatives on a bien la limite $\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathfrak{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En revenant à (4.50) il vient $\lim\limits_{R\to+\infty}\beta_1(R)=0$.

Pour le terme $\beta_2(R)$ donné dans (4.49) on procède comme suit : par les inégalités de Hölder avec $\frac{1}{\mathfrak{p}(\cdot)}+\frac{2}{\mathfrak{p}(\cdot)}+\frac{1}{\mathfrak{r}(\cdot)}=1$, on obtient

$$\begin{aligned}\beta_2(R) &= \int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)}|\vec{\nabla}\theta_R||p||\vec{u}|dx \leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathfrak{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\|p\|_{L^{\frac{\mathfrak{p}(\cdot)}{2}}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\|\vec{u}\|_{L^{\mathfrak{p}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\\ &\leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathfrak{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\|p\|_{L^{\frac{\mathfrak{p}(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}\|_{L^{\mathfrak{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Maintenant, puisque nous avons par hypothèse que $\vec{u}\in L^{\mathfrak{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ et $p\in L^{\frac{\mathfrak{p}(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)$, il suffit d'étudier la quantité $\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathfrak{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}$ où l'exposant $\mathfrak{r}(\cdot)$ satisfait cette fois les relations $\frac{1}{\mathfrak{p}(\cdot)}+\frac{2}{\mathfrak{p}(\cdot)}+\frac{1}{\mathfrak{r}(\cdot)}=1$, *i.e.* $\mathfrak{r}(\cdot)=\frac{\mathfrak{p}(\cdot)}{\mathfrak{p}(\cdot)-3}$, où $\mathfrak{r}(\cdot)$ vérifie (4.51). Ainsi, en suivant exactement les mêmes arguments que ci-dessus, nous obtenons $\lim\limits_{R\to+\infty}\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathfrak{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}=0$, et on obtient finalement la limite $\lim\limits_{R\to+\infty}\beta_2(R)=0$.

Nous avons obtenu $\lim\limits_{R\to+\infty}\beta_1(R)=\lim\limits_{R\to+\infty}\beta_2(R)=0$, d'où, en revenant à l'expression (4.49), on en déduit facilement que $\lim\limits_{R\to+\infty}\beta(R)=0$.

Avec les estimations précédentes pour les termes $\alpha(R)$ et $\beta(R)$, on obtient les limites (4.28) et on en déduit que $\vec{u}\equiv 0$. La preuve du théorème 4.4.2 est maintenant terminée. ■

Démonstration du Théorème 4.4.3

1) **Estimations pour** $\alpha(R)$. Par les inégalités de Hölder avec $\frac{2}{\mathbf{p}(\cdot)}+\frac{1}{\mathbf{q}(\cdot)}=1$, on a

$$\alpha(R)=\int_{B_R}\Delta\theta_R\frac{|\vec{u}|^2}{2}dx\leq C\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}\|^2_{L^{\mathbf{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}.$$

Etant donné que l'on a $\|\vec{u}\|_{L^{\mathbf{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}<+\infty$, il suffit d'étudier le terme $\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}$. Comme l'exposant variable $\mathbf{p}(\cdot)$ satisfait les conditions (4.26), on en déduit que l'exposant variable $\mathbf{q}(\cdot)=\frac{\mathbf{p}(\cdot)}{\mathbf{p}(\cdot)-2}$ est donné par

$$\mathbf{q}(x)=\begin{cases}\frac{9}{5}<\mathbf{q}^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}\leq\mathbf{q}_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}(x)\leq\mathbf{q}^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}<3,\\ \mathbf{q}_{\mathscr{N}}(x)=\mathbf{q}^-_{\mathscr{N}}=\mathbf{q}^+_{\mathscr{N}}=1,\end{cases}\tag{4.52}$$

avec $\mathscr{N}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\sqrt{x_2^2+x_3^2}\leq x_1^{-\frac{\sigma}{2}},\ \ x_1>0\}$ et $0<\sigma<1$. On écrit alors

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}=\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\leq\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}_{\mathscr{N}_1}(\cdot)}(\mathscr{N}_1)}+\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}_{\mathscr{N}_2}(\cdot)}(\mathscr{N}_2)}.\tag{4.53}$$

avec $\mathscr{N}_1=\mathcal{C}\left(\frac{R}{2},R\right)\cap\mathscr{N}$ and $\mathscr{N}_2=\mathcal{C}\left(\frac{R}{2},R\right)\setminus\mathscr{N}$.
Pour le terme $\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}_{\mathscr{N}_1}(\cdot)}(\mathscr{N}_1)}$ donné dans (4.53), on écrit

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}_{\mathscr{N}_1}(\cdot)}(\mathscr{N}_1)}\leq CR^{-2}\|1\|_{L^{\mathbf{q}_{\mathscr{N}_1}(\cdot)}(\mathscr{N}_1)}\leq CR^{-2}\max\{|\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\cap\mathscr{N}|^{\frac{1}{\mathbf{q}^-_{\mathscr{N}}}},|\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\cap\mathscr{N}|^{\frac{1}{\mathbf{q}^+_{\mathscr{N}}}}\}.$$

Puisque $\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\cap\mathscr{N}\subset\mathscr{N}$ on a par (4.52) que $\mathbf{q}^-_{\mathscr{N}}=\mathbf{q}^-_{\mathscr{N}}=1$, de plus on a l'inclusion d'ensembles

$$\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\cap\mathscr{N}\subset\mathscr{D}=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\sqrt{x_2^2+x_3^2}\leq x_1^{-\frac{\sigma}{2}},\ \ 0<x_1<R\},$$

et en calculant le volume du solide de révolution de l'ensemble $\mathscr{D}$ on obtient l'estimation suivante (rappelons que $0<\sigma<1$) :

$$|\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\cap\mathscr{N}|\leq|\mathscr{D}|=C\int_0^R x_1^{-\sigma}dx_1=CR^{1-\sigma},$$

et on écrit

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}_{\mathscr{N}_1}(\cdot)}(\mathscr{N}_1)}\leq CR^{-1-\sigma}\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Nous étudions maintenant le terme $\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}_{\mathscr{N}_2}(\cdot)}(\mathscr{N}_2)}$ donné dans (4.53). Puisque nous avons l'ensemble des inclusions $\mathscr{N}_2=\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\setminus\mathscr{N}\subset\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N}$ et puisque sur cet ensemble nous avons que l'exposant variable $\mathbf{q}(\cdot)$ satisfait la condition (4.52), par les mêmes arguments donnés dans (4.38)-(4.39) on obtient

$$\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}_{\mathscr{N}_2}(\cdot)}(\mathscr{N}_2)}\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Avec ces deux estimations nous déduisons, en revenant à (4.53), que $\|\Delta\theta_R\|_{L^{\mathbf{q}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et ce fait implique que nous avons $\alpha(R)\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

2) Estimations pour $\beta(R)$. Le contrôle de ces termes suit les mêmes idées générales utilisées dans (4.41), on peut donc écrire

$$|\beta(R)|\leq\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)}|\vec{\nabla}\theta_R||\vec{u}|^3dx}_{\beta_1(R)}+\underbrace{\int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)}|\vec{\nabla}\theta_R||P||\vec{u}|dx}_{\beta_2(R)}.\tag{4.54}$$

Pour le premier terme du côté droit ci-dessus, suivant (4.42) on écrit :

$$\beta_1(R)\leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathbf{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\|\vec{u}\|^3_{L^{\mathbf{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)},\tag{4.55}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Hölder avec $\frac{3}{\mathbf{p}(\cdot)}+\frac{1}{\mathbf{r}(\cdot)}=1$. Puisque l'exposant $\mathbf{p}(\cdot)$ est donné par les conditions énoncées dans (4.26), l'exposant variable $\mathbf{r}(\cdot)=\frac{\mathbf{p}(\cdot)}{\mathbf{p}(\cdot)-3}$ satisfait :

$$\mathbf{r}(x)=\begin{cases}3<\mathbf{r}^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}\leq\mathbf{r}_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}(x)\leq\mathbf{r}^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}<+\infty,\\ \\ \mathbf{r}^-_{\mathscr{N}}=\mathbf{r}_{\mathscr{N}}(x)=\mathbf{r}^+_{\mathscr{N}}=1.\end{cases}\tag{4.56}$$

Pour comprendre le comportement de $\beta_1(R)$, puisque par hypothèse on a $\|\vec{u}\|_{L^{\mathbf{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}<+\infty$, il suffit d'étudier la quantité $\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathbf{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}$. En suivant les idées principales utilisées pour obtenir l'estimation (4.44), nous avons

$$\begin{aligned}\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathbf{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\ \leq\ & CR^{-1}\max\{|\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\cap\mathscr{N}|^{\frac{1}{\mathbf{r}^-_{\mathscr{N}}}},|\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\cap\mathscr{N}|^{\frac{1}{\mathbf{r}^+_{\mathscr{N}}}}\}\\ &+CR^{-1}\max\{|\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\setminus\mathscr{N}|^{\frac{1}{\mathbf{r}^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}}},|\mathcal{C}(\tfrac{R}{2},R)\setminus\mathscr{N}|^{\frac{1}{\mathbf{r}^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}}}\}.\end{aligned}$$

En rappelant que nous avons $|\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\cap\mathscr{N}|\leq CR^{1-\sigma}$ et $|\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)\setminus\mathscr{N}|\leq CR^3$, on obtient, puisque $\mathbf{r}^-_{\mathscr{N}}=\mathbf{r}_{\mathscr{N}}(x)=\mathbf{r}^+_{\mathscr{N}}=1$:

$$\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathbf{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))} \leq CR^{-\sigma}+C\max\{R^{-1+\frac{3}{\mathbf{r}^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}}},R^{-1+\frac{3}{\mathbf{r}^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}}}\}$$

Or, par les restrictions (4.56) on en déduit facilement que $-1+\frac{3}{\mathbf{r}^+_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}}\leq -1+\frac{3}{\mathbf{r}^-_{(\mathbb{R}^3\setminus\mathscr{N})}}<0$ et comme toutes les puissances du paramètre $R>1$ sont négatives on a $\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathbf{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Ainsi, pour revenir à (4.55), nous avons $\lim\limits_{R\to+\infty}\beta_1(R)=0$.

Pour le terme $\beta_2(R)$ donné dans (4.54) on procède selon les mêmes idées utilisées précédemment : par les inégalités de Hölder avec $\frac{1}{\mathbf{p}(\cdot)}+\frac{2}{\mathbf{p}(\cdot)}+\frac{1}{\mathbf{r}(\cdot)}=1$, on obtient

$$\begin{aligned}\beta_2(R) &= \int_{\mathcal{C}(\frac{R}{2},R)}|\vec{\nabla}\theta_R||p||\vec{u}|dx\leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathbf{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\|p\|_{L^{\frac{\mathbf{p}(\cdot)}{2}}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\|\vec{u}\|_{L^{\mathbf{p}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\\ &\leq C\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathbf{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}\|p\|_{L^{\frac{\mathbf{p}(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)}\|\vec{u}\|_{L^{\mathbf{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Puisque par hypothèse $\vec{u}\in L^{\mathbf{p}(\cdot)}(\mathbb{R}^3)$ et $p\in L^{\frac{\mathbf{p}(\cdot)}{2}}(\mathbb{R}^3)$, comme auparavant, il suffit d'étudier la quantité $\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathbf{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}$ où l'exposant variable $\mathbf{r}(\cdot)=\frac{\mathbf{p}(\cdot)}{\mathbf{p}(\cdot)-3}$ est donné par (4.56). Ainsi, en suivant exactement les mêmes arguments que ci-dessus, nous obtenons $\lim\limits_{R\to+\infty}\|\vec{\nabla}\theta_R\|_{L^{\mathbf{r}(\cdot)}(\mathcal{C}(\frac{R}{2},R))}=0$, et on obtient finalement la limite $\lim\limits_{R\to+\infty}\beta_2(R)=0$.

Nous avons obtenu que $\lim\limits_{R\to+\infty}\beta_1(R)=\lim\limits_{R\to+\infty}\beta_2(R)=0$, d'où, pour revenir à l'expression (4.54), on en déduit facilement que $\lim\limits_{R\to+\infty}\beta(R)=0$.

Nous avons ainsi prouvé que les termes $\alpha(R)$ et $\beta(R)$ donnés dans (4.27) tendent vers 0 si $R\to+\infty$: la preuve du Théorème 4.4.3 est maintenant terminée. ■

Bibliographie

[1] D. R. Adams and J. Xiao. Morrey spaces in harmonic analysis. *Ark. Mat.*, 50(2) :201–230, 2012.

[2] T. Barker and C. Prange. Localized smoothing for the Navier-Stokes equations and concentration of critical norms near singularities. *Arch. Rational. Mech. Anal.*, 236 :1487–1541, 2020.

[3] T. Barker and C. Prange. Quantitative regularity for the Navier-Stokes equations via spatial concentration. *Commun. Math. Phys*, 385 :717–792, 2021.

[4] D. Bo-Qing and C. Zhin-Min. Regularity criteria of weak solutions to the three-dimensional micropolar flows. *J. Math. Phys.*, 50, 2009.

[5] L. Brandolese and M. E. Schonbek. Large time decay and growth for solutions of a viscous Boussinesq system. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(10) :5057–5090, 2012.

[6] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35 :771–831, 1982.

[7] L. Caffarelli and A. Vasseur. Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation. *Ann. of Math.*, 2(171) :1903–1930, 2010.

[8] J.R. Cannon and E. DiBenedetto. The initial problem for the Boussinesq equations with data in l^p. *Lectures notes in Mathematics*, 771 :129–789., 1980.

[9] C. Cao and J. Wu. Two regularity criteria for the 3D MHD equations. *J. Differ. Eqs.*, 248 :2263–2274, 2010.

[10] D. Chae. Global regularity for the 2D Boussinesq equations with partial viscosity terms. *Adv. Math.,*, 203(2) :497–513, 2006.

[11] D. Chae, P. Constantin, D. Córdoba, F. Gancedo, and J. Wu. Generalized surface quasi-geostrophic equations with singular velocities. *Comm. Pure Appl. Math.*, 65(8) :1037–1066, 2012.

[12] D. Chae and J. Wolf. On liouville type theorems for the steady navier-stokes equations in $\mathbb{R}^3$. *Journal of Differential Equations*, 261(10) :5541–5560, 2016.

[13] D. Chae and T. Yoneda. On the liouville theorem for the stationary navier-stokes equations in a critical space. *J. Math. Anal. Appl.*, 405 :706–710, 2013.

[14] G. Chae and S. Weng. Liouville type theorems for the steady axially symmetric Navier-Stokes and magnetohydrodynamic equations. *Discrete And Continuous Dynamical Systems*, 36(10) :5267–5285, 2016.

[15] D. Chamorro. Improved Sobolev inequalities and Muckenhoupt weights on stratified Lie groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 377 :695–709, 2011.

[16] D. Chamorro. Some functional inequalities on polynomial volume growth Lie groups. *Canad. J. Math.*, 64 :481–496, 2012.

[17] D. Chamorro. A counterexample for improved Sobolev inequalities over the 2-adic group. *Commun. Korean Math. Soc.*, 28(2) :231–241, 2013.

[18] D. Chamorro. A molecular method applied to a non-local PDE in stratified Lie groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 413 :583–608, 2014.

[19] D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, volumen 1.* Number 1 in Colección de Matemáticas Universitarias. Editorial AMARUN, 2017.

[20] D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, volumen 2.* Number 2 in Colección de Matemáticas Universitarias. Editorial AMARUN, 2017.

[21] D. Chamorro. *Espacios de Lebesgue y de Lorentz, volumen 3.* Colección de Matemáticas Universitarias. Editorial AMARUN, 2020.

[22] D. Chamorro. Mixed Sobolev-like inequalities in Lebesgue spaces of variable exponents and in Orlicz spaces. *Positivity*, 26(5), 2022.

[23] D. Chamorro. *Introduction aux équations de Navier-Stokes incompressibles.* Savoirs Actuels. EDPScience, 2025.

[24] D. Chamorro and F. Cortez. The role of the dimension in uniqueness results for the stationary quasi-geostrophic system. *Preprint*, 2025.

[25] D. Chamorro, F. Cortez, J. He, and O. Jarrín. On the local regularity theory for the MHD equations. *Documenta Mathematica*, 26 :103–126, 2021.

[26] D. Chamorro and J. He. On the partial regularity theory for the MHD equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 494(1), 2021.

[27] D. Chamorro and J. He. Regularity theory for the dissipative solutions of the MHD equations. *SIAM, Journal on Mathematical Analysis.*, 53(5), 2021.

[28] D. Chamorro and E. Issoglio. Blow-up for a nonlinear PDE with fractional Laplacian and singular quadratic nonlinearity. *Mathematische Nachrichten*, 295 :1462–1479, 2022.

[29] D. Chamorro and O. Jarrín. Fractional Laplacians and nilpotent Lie groups. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I(353) :517–522, 2015.

[30] D. Chamorro and O. Jarrín. A turbulent study for a damped Navier-Stokes equation : turbulence and problems. *Journal of Elliptic and Parabolic Equations*, 2025.

[31] D. Chamorro, O. Jarrín, and P.-G. Lemarié-Rieusset. Frequency decay for Navier-Stokes stationary solutions. *Comptes Rendus Mathématique*, 357 :175–179, 2019.

[32] D. Chamorro, O. Jarrín, and P.-G. Lemarié-Rieusset. On the Kolmogorov dissipation law in a damped Navier-Stokes equation. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 33 :1109–1134, 2021.

[33] D. Chamorro, O. Jarrín, and P.-G. Lemarié-Rieusset. Some Liouville theorems for stationary Navier-Stokes equations in Lebesgue and Morrey spaces. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 38(Issue 3) :689–710, May–June 2021.

[34] D. Chamorro and P.-G. Lemarié-Rieusset. Quasi-geostrophic equation, nonlinear Bernstein inequalities and α-stable processes. *Rev. Mat. Iberoam.*, 28(4) :1109–1122, 2012.

[35] D. Chamorro and P.-G. Lemarié-Rieusset. Real interpolation method, Lorentz spaces and refined Sobolev inequalities. *Journal of Functional Analysis*, 265 :3219–3232, 2013.

[36] D. Chamorro, P.-G. Lemarié-Rieusset, and K. Mayoufi. Local stability of energy estimates for the Navier-Stokes equations. *Contemporary Mathematics*, 2017.

[37] D. Chamorro, P.-G. Lemarié-Rieusset, and K. Mayoufi. The role of the pressure in the partial regularity theory for weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 228(1) :237–277, 2018.

[38] D. Chamorro and D. Llerena. Interior ϵ-regularity theory for the solutions of the magneto-micropolar equations with a perturbation term. *Journal of Elliptic and Parabolic Equations*, (DOI 10.1007/s41808-022-00163-y), 2022.

[39] D. Chamorro and D. Llerena. A crypto-regularity result for the micropolar fluids equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 520(2), 2023.

[40] D. Chamorro and D. Llerena. Partial suitable solutions for the micropolar equations and regularity properties. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, 2024.

[41] D. Chamorro and D. Llerena. Partial regularity and l3-norm concentration effects around possible blow-up points for the micropolar fluid equations. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 2025.

[42] D. Chamorro, D. Llerena, and G. Vergara-Hermosilla. Some remarks about the stationary micropolar fluid equations : existence, regularity and uniqueness. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 536(2), 2024.

[43] D. Chamorro and M. Mansais. Some general external forces and critical mild solutions for the fractional Navier-Stokes equations. *Preprint*, 2025.

[44] D. Chamorro, A.-N. Marcoci, and L.-G. Marcoci. Improved Sobolev inequalities : generalizations to classical Lorentz spaces. 2015.

[45] D. Chamorro, A.-N. Marcoci, and L.-G. Marcoci. A new pointwise inequality for rough operators and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2025.

[46] D. Chamorro and M. E. Martinez. Global weak solutions for a variation of the whitham equation. *Preprint*, 2025.

[47] D. Chamorro and S. Menozzi. Fractional operators with singular drift : Smoothing properties and Morrey-Campanato spaces. *Rev. Mat. Iberoam.*, 32(no. 4) :1447–1501, 2016.

[48] D. Chamorro and S. Menozzi. Nonlinear singular drifts : when Besov meets Morrey and Campanato. *Potential Analysis*, 49(Issue 1) :1–35, 2018.

[49] D. Chamorro and S. Menozzi. Non linear singular drifts and fractional operators. *Partial Differential Equations and Applications*, 5(33), 2024.

[50] D. Chamorro and N. Meunier. Analysis of a nonlocal and nonlinear system for cell-cell communication. *preprint*, 2022.

[51] D. Chamorro and C. Mindrila. A new approach for the regularity of weak solutions of the 3D Boussinesq system. *Nonlinearity*, 37(6), 2024.

[52] D. Chamorro and B. Poggi. On an almost sharp liouville type theorem for fractional navier-stokes equations. *Publ. Mat.*, 69 :27–43, 2025.

[53] D. Chamorro and G. Vergara-Hermosilla. Lebesgue spaces with variable exponent : some applications to the Navier-Stokes equations. *Positivity*, 28(24), 2024.

[54] D. Chamorro and G. Vergara-Hermosilla. Liouville type theorems for stationary navier-stokes equations with lebesgue spaces of variable exponent. *Documenta Mathematica*, 2025.

[55] D. Chamorro and M. Yangari. Some existence and regularity results for a non-local transport-diffusion equation with fractional derivatives in time and space. *Journal of Differential Equations*, 428 :389–421, 2025.

[56] Q. Chen, C. Miao, and Z. Zhang. On the regularity criterion of weak solution for the 3D viscous magneto-hydrodynamics equations. *Commun. Math. Phys.*, 284 :919–930, 2008.

[57] H. J. Choe. Regularity question of the incompressible Navier-Stokes equation i. *http ://www.japan-germany.sci.waseda.ac.jp*, 2013.

[58] R. Coifmann and G. Weiss. Extensions of hardy spaces and their use in analysis. *Bull Amer. Math. Soc.,*, 83(4), 1977.

[59] P. Constantin. Euler equations Navier-Stokes equations and turbulence, Mathematical Foundation of Turbulent Viscous Flows. *Lecture Notes in Mathematics*, 1871 :1–43, 2005.

[60] P. Constantin and Wu J. Regularity of Hölder continuous solutions of the supercritical quasi-geostrophic equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 25(6) :1103–1110, 2008.

[61] P. Constantin, Q. Nie, and S. Tanveer. Bounds for second order structure functions and energy spectrum in turbulence. *Physics of fluids*, 11, 1999.

[62] A. Cordoba and D. : Cordoba. A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations. *Comm. Math. Phys.*, 249(3) :511–528, 2004.

[63] D. V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza. *Variable Lebesgue spaces : Foundations and harmonic analysis*. Springer Science & Business Media, 2013.

[64] R. Danchin and M. Paicu. Les théorèmes de Leray et de Fujita-Kato pour le système de Boussinesq partiellement visqueux. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 136(2) :261–309, 2008.

[65] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Ruzicka. *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*. Springer Verlag, 2011.

[66] C. Doering and C. Foias. Energy dissipation in body-forced turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 467 :289–306, 2002.

[67] W. Elsasser. The hydromagnetic equations. *Phys. Rev.*, 79(183), 1950.

[68] A.C. Eringen. Theory of micropolar fluids. *J. Math. Mech.*, 16 :1–18, 1966.

[69] L. Escauriaza, G. Seregin, and W. Sverak. $L^{\infty,3}$-solutions of the Navier-Stokes equations and backward uniqueness. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 58(350) :3–44, 2003.

[70] J. Fan and Y. Zhou. A note on regularity criterion for the 3D Boussinesq system with partial viscosity. *Appl. Math. Letters*, 22(5) :802–805, 2009.

[71] C. Foias, O. Manley, R. Rosa, and R. Temam. Estimates for the energy cascade in three-dimensional turbulent flows. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 332(Série I) :509–514, 2001.

[72] G. P. Galdi and S. Rionero. A note on the existence and uniqueness of solutions of the micropolar fluid equations. *Internat. J. Eng. Sci.*, 15 :105–108, 1977.

[73] P. Galdi. *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations : Steady-State Problems*. Springer Verlag, 2011.

[74] Z. Gao, Z. Tan, and G. Wu. Energy dissipation for weak solutions of incompressible MHD equations. *Acta Mathematica Scientia*, 33 :865–871, 2013.

[75] D. Goldberg. A local version of real Hardy spaces. *Duke Math. J.*, 46(1) :27–42, 1979.

[76] L. Grafakos and S. Oh. The Kato-Ponce inequality. *Comm. Partial Differential Equations*, 39(6) :1128–1157, 2014.

[77] B. Guo and G. Yuan. On the suitable weak solutions for the Cauchy problem of the Boussinesq equations. *Nonlinear Analysis*, 26(8) :1367–1385, 1996.

[78] C. He and Z. Xin. On the regularity of weak solutions to the magnetohydrodynamic equations. *J. Differ. Eqs.*, 213 :235–254, 2005.

[79] C. He and Z. Xin. Partial regularity of suitable weak solutions to the incompressible magnetohydrodynamic equations. *J. Funct. Anal.*, 227 :113–152, 2005.

[80] G. Houël. Estimates on the energy dissipation rate in kinetic turbulence. Research project in the laboratory mec559, Ecole Polytechnique, 2005.

[81] W. Hu, I. Kukavica, and M. Ziane. Persistence of regularity for the viscous Boussinesq equations with zero diffusivity. *Asympt. Anal.*, 91 :111–124, 2015.

[82] N. Jacob. *Pseudo-Differential Operators and Markov Processes*, volume I. Imperial College Press, 2001.

[83] Q. Jiu and Y. Wang. Remarks on partial regularity for suitable weak solutions of the incompressible magnetohydrodynamic equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 409 :1052–1065, 2014.

[84] K. Kang and J. Lee. Interior regularity criteria for suitable weak solutions of the magnetohydrodynamic equations. *J. Differ. Eqs,*, 247 :2310–2330, 2009.

[85] K. Kang, H. Miura, and T. Tsai. An ε-regularity criterion and estimates of the regular set for Navier-Stokes flows in terms of initial data. *Pure Appl. Anal.*, 3 :567–594, 2021.

[86] G. Karch. *Nonlinear evolution equations with anomalous diffusion.*, volume Lect. Notes 5, chapter Qualitative properties of solutions to partial differential equations, pages 25–68. Prague, matfyzpress edition, 2009.

[87] A. Kiselev and F. Nazarov. A variation on a theme of Caffarelli and Vasseur. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 370 :55–82, 2009.

[88] G. Koch, N. Nadirashvili, G. Seregin, and V. Sverak. Liouville theorems for the navier-stokes equations and applications. *Acta Mathematica*, 203 :83–105, 2009.

[89] A. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynold numbres (en russe). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, (30) :9–13, 1941.

[90] A. Kolmogorov. On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 31, 1941.

[91] I. Kukavica. On partial regularity for the Navier–Stokes equations. *Discrete and continuous dynamical systems*, 21 :717–728, 2008.

[92] I. Kukavica. Partial regularity for the Navier–Stokes equations with a force in a Morrey space. *J. Math. Anal. Appl.*, 374 :573–584, 2011.

[93] P.-G. Lemarié-Rieusset. *The Navier-Stokes problem in the 21st Century.* CRC press, 2016.

[94] J. Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, Volume 63 :193–248, 1934.

[95] F. Lin. A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem. *Comm. Pure Applied Math.*, 51 :240–257, 1998.

[96] M. Loayza and M.A. Rojas-Medar. A weak-L^p Prodi-Serrin type regularity criterion for the micropolar fluid equations. *Journal of Mathematical Physics.*, 57(2), 2016.

[97] J. Lorenz, W. G. Melo, and S. C. P. de Souza. Regularity criteria for weak solutions of the magneto-micropolar equations. *Electronic Research Archive.*, 29(1) :1625–1639, 2021.

[98] J. Lorenz, W.G. Melo, and S.C.P. de Souza. Regularity criteria for weak solutions of the magneto-micropolar equations. *Electronic Research Archive*, 29(1) :1625–1639, 2021.

[99] G. Lukaszewicz. *Micropolar fluids : theory and applications.* Springer, 1999.

[100] F. Marchand. Existence and Regularity of Weak Solutions to the Quasi-Geostrophic Equations in the spaces l^p or $\dot{H}^{-1/2}$. *Commun. Math. Phys.*, 277 :45–67, 2008.

[101] K. Mayoufi. *Rôle de la pression et régularité partielle dans les équations de Navier-Stokes*. Université d'Evry, Thèse, 2017.

[102] V. Naibo and A. Thomson. Coifman-meyer multipliers : Leibniz-type rules and applications to scattering of solutions to pdes. *Transactions of the AMS*, 372(8) :5453–5481, 2019.

[103] M. O'Leary. Conditions for the local boundedness of solutions of the Navier-Stokes system in three dimensions. *Comm. Partial Differential Equations*, 28 :617–636, 2003.

[104] F. Otto and F. Ramos. Universal bounds for the Littlewood-Paley first-order moments of the 3-D Navier-Stokes equations. *Commun. Math. Phys.*, 300 :301–315, 2010.

[105] J. Pedlosky. *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1987.

[106] S. Resnick. *Dynamical Problem in Nonlinear Advective Partial Differential Equations*. PhD thesis, University of Chicago, 1995.

[107] G. Seregin. Liouville type theorem for stationnary navier-stokes equations. *Nonlinearity*, 29 :2191–2195, 2015.

[108] G. Seregin. A liouville type theorem for steady-state navier-stokes equations. *J.É.D. P.*, Exposé no IX, 2016.

[109] J. Serrin. On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.,*, 9 :187–195, 1962.

[110] L. Silvestre, V. Vicol, and A. Zlatos. On the loss of continuity for super-critical drift-diffusion equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 207(3) :845–877, 2013.

[111] E. Stein. *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood–Paley theory*. Number 63 in Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1970.

[112] E. Stein. *Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*. Princeton University Press, 1993.

[113] M. Struwe. On partial regularity results for the Navier–Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 41 :437–458, 1988.

[114] S. Takahashi. On interior regularity criteria for weak solutions of the Navier–Stokes equations. *Manuscripta Math.*, 69 :237–254, 1990.

[115] H. Tennekes and J.L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. MIT, 1972.

[116] A. Torchinski. *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*. Dover, 2004.

[117] A. Vasseur. A new proof of partial regularity of solutions to Navier-Stokes equations. *Nonlinear Diff. Equ. Appl.*, 14 :753–785, 2007.

[118] J. Wu. Regularity results for weak solutions of the 3D MHD equations. *Discrete. Contin. Dynam. Systems*, 10 :543–556, 2004.

[119] B. Yuan. Regularity of weak solutions to magneto-micropolar fluid equations. *Math. Sci. Ser*, 30 :1469–1480, 2010.