Université d'Évry Val d'Essonne 2015-2016
M63 algèbre linéaire et bilinéaire et géométrie

Examen du Licence 3 de Mathématiques

Exercice 1.
Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{R}$ et soit f l'application de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(A, B) = \mathrm{Tr}\left(A\,{}^tB\right)$.

1. Démontrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. Déterminer la signature de f.

   Dans ce qui suit, on prend $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$.

3. Quelle est la matrice de f dans la "base canonique" de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
4. Donner la forme quadratique associée à f. Est-elle définie positive?
5. Démontrer que $q : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $q(A) = \det(A)$ est une forme quadratique sur E. Déterminer son rang, sa signature et les éléments isotropes pour q.
6. Détreminer la forme polaire associée à q.
7. Soit F le sous-espace vectoriel de E formé des matrices de trace nulle. Quel est l'orthogonal de F pour la forme polaire associée à q?

Exercice 2. Décomposer la forme quadratique suivante en sommes de carrés. En déduire si elle est positive. $q(x, y, z, t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$;

Exercice 3. Soit Q une forme quadratique non dégénérée et non définie sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$. Nous prendrons φ la forme bilinéaire associée. Nous dirons qu'un sous-espace A est S.E.T.I.M., si A est sous-espace totalement isotrope et maximal. Rappel :A est dit isotrope si $A \subset A^{\perp}$ et maximal si pour tout sous-espace B de E tel que $A \subset B$ et $B \subset B^{\perp}$ alors $A = B$.

1. Montrer que tout sous-espace totalement isotrope est inclus dans un S.E.T.I.M.

2. Soient A, B deux S.E.T.I.M. et A', B' des sous-espaces tels que :

$$\begin{aligned} A &= (A \cap B) \oplus A' \\ B &= (A \cap B) \oplus B' \end{aligned}$$

   Montrer que $A + (A'^{\perp} \cap B')$ est totalement isotrope et que $(A'^{\perp} \cap B') \subset A$.

3. Prouver que $A \cap B' = \{0\}$, déduire que $A'^{\perp} \cap B' = \{0\}$.

4. Après avoir majoré $dim(A'^{\perp} + B')$, montrez que $dimB' \leq dimA'$.

5. En déduire que tout les sous-espaces S.E.T.I.M. ont la même dimension. Cette dimension est appelée l'indice de Q.
   Application : Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et Q a pour signature $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, notre but sera de déterminer l'indice de Q. Nous supposerons $p \geq q$ (quitte à prendre $-Q$).

6. Pourquoi existe-t-il une base $(e_1, \ldots, e_n)$ tel que la matrice de Q dans cette base soit $diag(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q})$?

7. Considérez $H = Vect\big(e_1 + e_{p+1}, e_2 + e_{p+2}, \ldots, e_p + e_{p+q}\big)$, vérifiez que H est bien isotrope.

8. Prenons un vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $H + \mathbb{K}x$ soit isotrope. Démontrer que pour tout $1 \leq j \leq q$ on a $\lambda_j = \lambda_{p+j}$.

9. En déduire l'indice de Q.
