TD5. Classes modulo un sous-groupe, sous-groupe distingué, groupe quotient

Exercice 1. On considère le groupe symétrique S_3.

1. Déterminer tous les éléments du sous-groupe H de S_3 engendré par le cycle $(1\,2\,3)$.

2. Déterminer l'ensemble des classes à gauche de H, dans S_3, puis l'ensemble des classes à droite.

3. Ces classes sont-elles identiques ?

4. Pouvait-on prévoir leur nombre ?

Exercice 2. On considère $G = (\mathbb{Z}, +)$ et $H = (5\mathbb{Z}, +)$.

1. Vérifier que H est un sous-groupe de G.

2. Justifier que H est distingué dans G.

3. Quelle est la classe à gauche de 5 modulo H dans G ?

4. Déterminer l'indice $[G : H]$.

Exercice 3.

1. Rappeler pourquoi dans un groupe fini, l'ordre de chaque élément divise le cardinal du groupe.

2. Vrai ou faux ? *"Pour tout entier naturel n non nul, pour tout groupe G de cardinal n et pour tout diviseur d de n, il y a toujours un élément d'ordre d dans G."*

Exercice 4. Montrer que tout sous-groupe H d'indice 2 dans un groupe G est distingué.

Exercice 5. Soit n un entier strictement supérieur à 1. Soit $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ l'application définie par $f(z) = z^n$ pour tout $z \in \mathbb{U}$.

1. Montrer que f est un morphisme de groupes.

2. Quel est le noyau de f ?

3. Posons $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrer que le groupe quotient $\mathbb{U}/ < \zeta >$ est isomorphe à $\mathbb{U}$.

Exercice 6. On rappelle que le noyau de la signature $\varepsilon : S_3 \to \{-1, 1\}$ est un sous-groupe de S_3 noté $\mathcal{A}_3$ et appelé *groupe alterné*.

1. Pourquoi $\mathcal{A}_3$ est-il distingué dans S_3 ?

2. Montrer que $S_3/\mathcal{A}_3$ est isomorphe à $\{-1, 1\}$. En déduire l'indice de $\mathcal{A}_3$ dans S_3, puis le cardinal de $\mathcal{A}_3$.

3. Dresser une liste des éléments de $\mathcal{A}_3$.

4. Reprendre l'exercice pour S_4 et $\mathcal{A}_4$.

5. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dit qu'une permutation $\sigma \in S_n$ est paire lorsque $\varepsilon(\sigma) = 1$ et qu'elle est impaire sinon.

a. Montrer qu'il y a dans S_n autant de permutations paires que de permutations impaires.

b. Montrer que $\text{card}\,(\mathcal{A}_n) = \dfrac{n!}{2}$.

Exercice 7. Soit G un groupe. On appelle *centre* de G, et on note $Z(G)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres, autrement dit

$$Z(G) = \{x \in G \,/\, \forall y \in G,\, xy = yx\}$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

2. Montrer qu'il est distingué dans G.

3. Montrer que pour tout morphisme $\varphi : G \to G$, on a $\varphi(Z(G)) \subset Z(G)$.

4. $Z(G)$ est-il commutatif ?

5. Montrer que le centre de $GL_2(\mathbb{R})$ n'est pas réduit à son élément neutre.

On rappelle que $GL_2(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices 2×2 inversibles, à coefficients réels.

Exercice 8. Soient K, H, G des groupes tels que K soit un sous-groupe de H et H soit un sous-groupe de G. Si $K \lhd H$ et $H \lhd G$, peut-on conclure que $K \lhd G$?

Exercice 9. Pour toute matrice $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et tout $B \in \mathbb{R}^2$, on note

$$\varphi_{A,B} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ X & \mapsto & AX + B \end{array} \right.$$

1. Montrer que $G = \{\varphi_{A,B} \,/\, A \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathbb{R}^2\}$, muni de la composition, a une structure de groupe. Ce groupe est-il commutatif ?

2. On pose $H = \{\varphi_{A,0} \,/\, A \in GL_2(\mathbb{R})\}$.

a. Montrer que H est un sous-groupe de G.

b. Montrer que H est distingué dans G.

3. a. Montrer que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & GL_2(\mathbb{R}) \\ \varphi_{A,B} & \mapsto & \varphi_{A,0} \end{array} \right.$$

est une application bien définie, puis que c'est un morphisme surjectif de groupes.

b. Quel est son noyau ?

c. En déduire que G/H est isomorphe à $GL_2(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Dans S_4, on considère $H = \{\mathrm{Id}, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$.

1. Montrer que H est un sous-groupe de S_4. Quels sont les ordres de ses éléments ?

2. Soit $n \geqslant 3$ et $r \geqslant 2$, soit σ une permutation de S_n et $\gamma = (j_1\, j_2 \ldots j_r)$ un r-cycle de S_n. Montrer que

$$\sigma \circ \gamma = (\sigma(j_1)\, \sigma(j_2)\, \ldots\, \sigma(j_r)) \circ \sigma$$

3. En déduire que $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1} = (\sigma(j_1)\, \sigma(j_2)\, \ldots\, \sigma(j_r))$.

4. Pour toutes permutations α et σ, on appelle *conjuguée* de α par σ la permutation $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$. Montrer que toute conjuguée d'une transposition est une transposition, que toute conjuguée d'une double transposition est une double transposition.

5. En déduire que H est un sous-groupe distingué de S_4.

6. Démontrer que H est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.