

## Résumé détaillé de la thèse

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

*Établissement d'inscription* : Université d'Evry-Val d'Essonne

Igor HONORÉ

Estimations non-asymptotiques de mesures invariantes et régularisation  
par un bruit dégénéré de chaînes d'Équations Différentielles Ordinaires

STÉPHANE MENOZZI (LaMME, Évry) Directeur de thèse

*Date de soutenance* : 05/11/2018

### Résumé

Ma thèse s'articule autour de deux thématiques. La première traite de l'étude de mesures invariantes de processus de diffusion et de ses approximations. J'établis, dans différentes situations, des contrôles non-asymptotiques de l'erreur d'estimation par des inégalités de concentration Gaussienne. Cela permet ainsi d'obtenir des contrôles précis d'intervalles de confiance.

La seconde partie aborde, quant à elle, le phénomène de régularisation par le bruit. Tout d'abord à travers des estimées de Schauder, j'établis pour une équation aux dérivées partielles (EDP) de type Kolmogorov associée à un système d'équations stochastiques (EDS) dégénérées. Je montre que la solution de l'EDP bénéficie d'un gain de régularité *parabolique* correspondant à l'indice d'auto-similarité du bruit considéré.

Dans un second temps, je démontre l'unicité forte de la solution de l'EDS étudiée précédemment. Cette équation peut être vue comme une équation différentielle ordinaire (EDO) bruitée. La présence d'un bruit auto-similaire permet de restaurer l'unicité de la solution dans un cadre hölderien.

# I) Inégalités de concentration non-asymptotiques

## (Partie II du manuscrit de thèse)

### Avant-propos

La première partie de ce résumé de thèse se compose de 4 sections. La Section 1 explique brièvement les motivations et les difficultés pour calculer une mesure invariante d'un processus de diffusion. La Section 2, correspondant au Chapitre 3 du manuscrit de thèse, présente le schéma d'approximation considéré, les principales inégalités de concentration obtenues dans ce chapitre ainsi que les grandes lignes des preuves. Dans cette section, je présente également des contrôles ponctuels de la solution de l'équation de Poisson. La Section 3, dédiée au Chapitre 4 de ma thèse, expose un résultat de concentration optimal. La Section 4, qui traite du Chapitre 5 de mon manuscrit, explique en quelques mots comment la méthode développée dans le cas Brownien peut s'étendre à des diffusions dirigées par un certain type de processus de Lévy.

## 1 Estimations de mesures invariantes

Les lois de la physique et de la biochimie conduisent à des modèles stochastiques dont la connaissance du comportement limite est cruciale. Les équations issues de la mécanique hamiltonienne (par exemple en dynamique moléculaire avec des forces van der Waals, cf. [LRS10]), de la mécanique des fluides newtoniens avec les équations de Navier-Stokes (e.g. [HM06] dans le cadre infini dimensionnel), du modèle de réseau de neurones en neuroscience (cf. [FM14]) sont des exemples représentatifs.

D'un point de vue numérique, il est très coûteux de chercher à calculer la moyenne d'un grand nombre de réalisations du processus simulé jusqu'à un temps suffisamment important. Nous cherchons donc à bénéficier de propriétés ergodiques du processus pour pouvoir ne simuler qu'une seule trajectoire. Toujours dans une perspective pratique d'approximation, nous voulons établir des estimations ergodiques non-asymptotiques.

Considérons tout d'abord le processus  $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$  donné par la dynamique suivante :

$$d\mathbf{X}_t = b(\mathbf{X}_t)dt + \sigma(\mathbf{X}_t)dW_t, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

où  $(W_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement Brownien de dimension  $r \in \mathbb{N}^*$ , et  $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$  (potentiellement dégénérée) sont des fonctions Lipschitz. Nous supposons que le processus  $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0}$  est ergodique et admet une unique mesure  $\nu$  stationnaire. Une mesure est dite stationnaire si pour toute fonction  $f$  suffisamment régulière et  $t \geq 0$ ,

$$\int P_t f(x) \nu(dx) = \nu(f) =: \int f(x) \nu(dx),$$

où le semi-groupe associé est défini par  $P_t f(x) := \mathbb{E}[f(\mathbf{X}_t) | \mathbf{X}_0 = x]$ . Le processus stationnaire de mesure invariante  $\nu$  est ergodique si pour toute fonction  $f$  continue bornée on a presque sûrement (p.s.) :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds =: \lim_{t \rightarrow +\infty} \nu_t(f) = \nu(f) = \int f(x) \nu(dx). \quad (1.2)$$

La vitesse de convergence vers la mesure invariante est donnée par le Théorème de la Limite Centrale (TLC). Pour la diffusion (1.1), Bhattacharya [Bha82], sous des hypothèses de type irréductibilité (diffusions non-dégénérées), a montré le TLC correspondant : pour toute fonction  $f$  à croissance polynomiale,

$$\sqrt{t}(\nu_t(f - \nu(f))) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\text{(loi)}} \mathcal{N}\left(0, \int_{\mathbb{R}^d} |\sigma^* \nabla \varphi(x)|^2 \nu(dx)\right), \quad (1.3)$$

avec  $\varphi$  solution de l'équation de Poisson

$$\mathcal{A}\varphi = f - \nu(f). \quad (1.4)$$

En pratique, il faut passer par une méthode de discrétisation pour estimer la mesure invariante. Une approche classique est fourni par le schéma d'Euler à pas constant  $\gamma > 0$  associé à (1.1) :

$$X_{n+1}^\gamma = X_n^\gamma + \gamma b(X_n^\gamma) + \sqrt{\gamma} \sigma(X_n^\gamma) U_{n+1},$$

où  $(U_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires de  $\mathbb{R}^r$  indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) correspondant aux incréments du Brownien, cf. [TT90].

Néanmoins, le théorème ergodique donne que pour  $f$  continue bornée,  $\nu_n^\gamma(f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \nu^\gamma(f)$ , où  $\nu^\gamma$  est la mesure invariante du schéma et non pas celle de la diffusion (1.1). Ainsi, ce schéma comporte asymptotiquement un biais, correspondant à l'erreur de discrétisation. Pour pallier ce problème, je me suis intéressé à l'algorithme à pas décroissant.

## 2 Un premier résultat de concentration (Chapitre 3)

Sous des hypothèses de Lyapunov *ad hoc*, nous montrons que l'erreur d'approximation de la mesure invariante par le schéma de Lambertion Pagès satisfait non-asymptotiquement une inégalité de concentration Gaussienne. Ce résultat repose fortement sur la régularité de la solution de Poisson associée à la dynamique stochastique considérée, via un développement du schéma correspondant à une version discrétisée de la formule d'Itô.

### 2.1 Schéma à pas décroissant

Le premier chapitre de la thèse concerne un travail en collaboration avec S. Menozzi (LaMME, UEVE) et G. Pagès (LPSM, Paris 6) à paraître aux *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, [HMP19]. Nous établissons des inégalités de concentration Gaussienne non-asymptotiques associées à un schéma de discrétisation à pas décroissant. Cet algorithme a été introduit par [PS94], [BHW97]. Puis Lambertion et Pagès [LP02] ont établi le théorème ergodique et le TLC sans biais associé à ce schéma. Autrement dit, cette approche permet asymptotiquement de calculer la mesure invariante sans biais. On définit pour  $n \geq 0$  :

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_{n+1} b(X_n) + \sqrt{\gamma_{n+1}} \sigma(X_n) U_{n+1}. \quad (2.1)$$

La mesure d'occupation empirique se définit de la façon suivante : pour tout ensemble Borélien  $A$ ,

$$\nu_n(A) := \nu_n(\omega, A) := \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k \delta_{X_{k-1}(\omega)}(A)}{\Gamma_n}, \quad \Gamma_n := \sum_{k=1}^n \gamma_k. \quad (2.2)$$

Indiquons que  $\Gamma_n$  est l'analogue discret du temps  $t$  considérée dans (1.2). Dans une perspective d'étude en temps long, la suite des pas de temps  $(\gamma_k)_{k \geq 1}$  sera donc choisie telle que  $\Gamma_n \xrightarrow[n]{n} +\infty$ .

Sous de bonnes hypothèses de Lyapunov, Lamberton et Pagès montrent d'abord le théorème ergodique associé à l'algorithme (2.1), i.e. le pendant discret de (1.2) : pour toute fonction  $f$  continue bornée,

$$\nu_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \nu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \nu(dx). \quad (2.3)$$

Supposons maintenant que les hypothèses de Lyapunov suivantes sont vérifiées

( $\mathcal{L}_V$ ) Il existe une fonction  $V : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty[$ , satisfaisant les conditions suivantes :

- i) Régularité-Coercivité.  $V$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\|D^2V\|_\infty < +\infty$ ,  
 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ .
- ii) Contrôle de la croissance. Il existe  $C_V \in (0, +\infty)$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  :

$$|\nabla V(x)|^2 + |b(x)|^2 \leq C_V V(x).$$

- iii) Stabilité. Il existe  $\alpha_V > 0$ ,  $\beta_V \in \mathbb{R}^+$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathcal{A}V(x) \leq -\alpha_V V(x) + \beta_V.$$

Ces hypothèses impliquent que  $V$  est sous-quadratique et  $b$  sous-linéaire, le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  «ressemble» donc à un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

D'après [LP02], s'il existe une unique mesure invariante à la diffusion (1.1) et si  $\lim_n \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k^2}{\sqrt{\Gamma_n}} = 0$ , alors pour toute fonction  $\varphi$  suffisamment régulière :

$$\sqrt{\Gamma_n} \nu_n(\mathcal{A}\varphi) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(loi)} \mathcal{N}\left(0, \int_{\mathbb{R}^d} |\sigma^* \nabla \varphi|^2 d\nu\right). \quad (2.4)$$

Pour un pas de temps polynomial, s'il existe  $\theta \in [0, 1]$  tel que  $\gamma_k \asymp k^{-\theta}$ , alors la condition  $\lim_n \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k^2}{\sqrt{\Gamma_n}} = 0$  équivaut à  $\theta \in (1/3, 1]$ . Ainsi, sous cette contrainte de pas, il n'y a pas d'effet de discrétisation sur la vitesse de convergence du schéma.

Pour le cas critique  $\theta = 1/3$ , la vitesse de convergence augmente. Dans ce cas, le TLC est toujours valable mais un biais apparaît dû à une discrétisation trop «grossière».

Pour  $\theta < 1/3$ , il n'y a pas de TLC. L'erreur de discrétisation «cache» en quelque sorte le TLC, on a seulement la convergence en probabilité de  $\frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k^2}{\sqrt{\Gamma_n}} (\nu(f) - \nu_n(f))$ .

## 2.2 Inégalités de concentration

À partir de maintenant, nous supposons que l'innovation  $(U_k)_{k \geq 1}$  du schéma (2.1) vérifie la propriété de concentration Gaussienne suivante :

( $\mathbf{GC}$ ) La variable aléatoire  $U$  admet les mêmes trois premiers moments que la loi normale  $\mathcal{N}(0, I_r)$ , et vérifie pour toute fonction  $g : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ , 1-Lipschitz et pour tout  $\lambda > 0$  :

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda g(U))] \leq \exp\left(\lambda \mathbb{E}[g(U)] + \frac{\lambda^2}{2}\right).$$

Cette propriété signifie que les queues de la loi de  $U$  sont sous-Gaussiennes. En particulier, cela est vérifié par la loi normale, la loi de Rademacher, et plus généralement toute loi vérifiant l'inégalité de log-Sobolev (ou Gross, cf. [Roy07]).

Nous obtenons sous ces hypothèses, pour  $\nu_n$  définie en (2.2), pour tout  $n > 0$  et  $a = a(n) > 0$  :

$$\mathbb{P}[\sqrt{\Gamma_n}|\nu_n(f) - \nu(f)| \geq a] \leq C_n \exp\left(-c_n \frac{a^2}{2\|\sigma\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_\infty^2}\right), \quad (2.5)$$

avec  $C_n, c_n > 0$  tels que  $\lim_n C_n = \lim_n c_n = 1$ . Ce résultat est valable pour  $f$  appartenant à une classe appropriée de fonctions tests  $f$  (suffisamment régulières, ici de classe  $C^{1,\beta}$  : dérivée bornée et  $\beta$ -Hölder) telles que  $f - \nu(f)$  soit un cobord du générateur infinitésimal. Autrement dit, il faut que l'équation de Poisson

$$f - \nu(f) = \mathcal{A}\varphi, \quad (2.6)$$

admette une solution  $\varphi$  suffisamment régulière, avec  $\mathcal{A}$  correspondant au générateur infinitésimal associé à (1.1).

Comme corollaire important du résultat de concentration (2.5), on obtient l'estimation suivante :

$$\mathbb{P}\left[\nu(f) \in \left[\nu_n(f) - \frac{a}{\sqrt{\Gamma_n}}, \nu_n(f) + \frac{a}{\sqrt{\Gamma_n}}\right]\right] \geq 1 - 2C_n \exp\left(-c_n \frac{a^2}{2\|\sigma\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_\infty^2}\right).$$

La constante de concentration  $\|\sigma\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_\infty^2$  n'est pas optimale au sens où le TLC (2.4) montre que le régime limite admet comme variance  $\nu(|\sigma^* \nabla\varphi|^2)$ , appelée *carré du champ*. Or on a clairement l'inégalité suivante :  $\|\sigma\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_\infty^2 \geq \nu(|\sigma^* \nabla\varphi|^2)$ , ce qui potentiellement peut changer grandement le contrôle de la vitesse de convergence de l'algorithme.

Nous montrons que ces bornes peuvent encore être améliorées lorsque la norme de Frobenius au carré (ou toute autre norme majorant la norme d'opérateur) du coefficient de la diffusion  $\sigma$  se situe dans la même classe cobord que  $f$ . Nous montrons pour une large classe de déviation ( $a = o(\sqrt{\Gamma_n})$ ) une inégalité plus précise que (2.5)

$$\mathbb{P}[\sqrt{\Gamma_n}|\nu_n(f) - \nu(f)| \geq a] \leq C_n \exp\left(-c_n \frac{a^2}{2\nu(\|\sigma\|^2) \|\nabla\varphi\|_\infty^2}\right).$$

Nous mettons également en évidence des bornes de déviation non-asymptotiques pour le Théorème de la Limite Centrale presque sûr.

Dans l'inégalité de concentration précédente, le terme  $\nu(\|\sigma\|^2) \|\nabla\varphi\|_\infty^2$  est une approximation du *carré du champ* qui dépend de la mesure invariante  $\nu$  que l'on cherche justement à estimer. Pour contourner cette difficulté, après une renormalisation appropriée nous établissons un résultat du type lemme de Slutsky :

$$\mathbb{P}\left[\sqrt{\Gamma_n} \frac{|\nu_n(f) - \nu(f)|}{\sqrt{\nu_n(\|\sigma\|^2)}} \geq a\right] \leq C_n \exp\left(-c_n \frac{a^2}{2\|\nabla\varphi\|_\infty^2}\right).$$

Nous améliorons également ces premiers résultats pour pouvoir prendre en compte une source  $f$  de régularité Lipschitz. Ce contexte Lipschitzien est usuel dans le cadre des inégalités fonctionnelles (transport optimal, inégalités de Talagrand...). Ce cadre conduit à une contrainte supplémentaire sur les pas,  $\theta > \frac{1}{2}$ , ce qui diminue la vitesse de convergence.

## 2.3 Idée principale de la preuve de l'inégalité (2.5).

La démonstration s'appuie sur une méthode de martingale dite approche d'Azuma, cf. [Azu67]. On commence par appliquer l'inégalité de Bienaymé Chebyshev exponentielle pour tout  $\lambda > 0$  :

$$\mathbb{P}[\sqrt{\Gamma_n}\nu_n(\mathcal{A}\varphi) \geq a] \leq \exp\left(-\frac{\lambda a}{\sqrt{\Gamma_n}}\right)\mathbb{E}[\exp(\lambda\nu_n(\mathcal{A}\varphi))]. \quad (2.7)$$

On effectue, ensuite, un développement de Taylor entre  $\varphi(X_k)$  et  $\varphi(X_{k-1})$  pour faire apparaître le générateur associé à la dynamique (1.1). Nous obtenons en quelque sorte une forme discrétisée de la formule d'Itô :

$$\varphi(X_k) - \varphi(X_{k-1}) = \gamma_k \mathcal{A}\varphi(X_{k-1}) + \Delta_k(X_{k-1}, U_k) + R_{k,k-1}, \quad (2.8)$$

où  $R_{k,k-1}$  est un terme de reste,  $\Delta_k(X_{k-1}, U_k)$  est un accroissement de martingale et où la fonction  $u \mapsto \Delta_k(X_{k-1}, u)$  est Lipschitz. En effet, dans l'identité (2.8), à droite de l'égalité, seul  $\psi_k(X_{k-1}, U_k)$  dépend de  $U_k$  alors qu'à gauche de l'égalité  $\varphi(X_k)$  est bien Lipschitz en  $U_k$ , d'où

$$[\Delta_k(X_{k-1}, \cdot)]_1 \leq \sqrt{\gamma_k} \|\sigma(X_{k-1})\| \|\nabla\varphi\|_\infty \leq \sqrt{\gamma_k} \|\sigma\|_\infty \|\nabla\varphi\|_\infty, \text{ p.s.} \quad (2.9)$$

On somme le développement de Taylor (2.8) pour aboutir à :

$$\Gamma_n \nu_n(\mathcal{A}\varphi) = -M_n - R_n,$$

avec  $R_n = \varphi(X_0) - \varphi(X_n) + \sum_{k=1}^n R_{k,k-1}$  comme terme de reste et  $M_n = \sum_{k=1}^n \Delta_k(X_{k-1}, U_k)$  comme terme martingale qui induit la concentration Gaussienne. La contribution de  $R_n$  se traite de façon assez technique avec comme argument principal l'intégrabilité exponentielle de la fonction de Lyapunov  $V$ .

De (2.7) et par l'inégalité d'Hölder pour  $p, q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on obtient :

$$\mathbb{P}[\sqrt{\Gamma_n}\nu_n(\mathcal{A}\varphi) \geq a] \leq \exp\left(-\frac{\lambda a}{\sqrt{\Gamma_n}}\right)\mathbb{E}[\exp\left(-\frac{\lambda q M_n}{\Gamma_n}\right)]^{1/q} \mathbb{E}[\exp\left(\frac{\lambda p R_n}{\Gamma_n}\right)]^{1/p}. \quad (2.10)$$

On montre qu'on peut choisir  $p = p(n) \rightarrow_n +\infty$  tel que  $\mathbb{E}[\exp(\frac{\lambda p R_n}{\Gamma_n})]^{1/p} = \mathcal{R}_n \rightarrow_n 1$ . Par propriété des espérances conditionnelles  $\mathbb{E}[e^{-\frac{\lambda q M_n}{\Gamma_n}}] = \mathbb{E}[e^{-\frac{\lambda q M_{n-1}}{\Gamma_n}} \mathbb{E}[e^{\frac{\lambda q \Delta_n(X_{n-1}, U_n)}{\Gamma_n}} | \mathcal{F}_{n-1}]]$ , par l'inégalité (2.10) et en utilisant **(GC)**, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\sqrt{\Gamma_n}\nu_n(\mathcal{A}\varphi) \geq a] &\leq \mathcal{R}_n \exp\left(-\frac{\lambda a}{\sqrt{\Gamma_n}}\right) \mathbb{E}[\exp\left(-\frac{\lambda q M_n}{\Gamma_n}\right)]^{1/q} \\ &\stackrel{\text{(GC)}}{\leq} \mathcal{R}_n \exp\left(-\frac{\lambda a}{\sqrt{\Gamma_n}} + \frac{\lambda^2 q \gamma_n \|\sigma\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_\infty^2}{2\Gamma_n^2}\right) \mathbb{E}[\exp\left(-\frac{\lambda q M_{n-1}}{\Gamma_n}\right)]^{1/q}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Après itération du raisonnement, on déduit que :

$$\mathbb{P}[\sqrt{\Gamma_n}\nu_n(\mathcal{A}\varphi) \geq a] \leq \exp\left(-\frac{\lambda a}{\sqrt{\Gamma_n}} + \frac{q\lambda^2 \|\sigma\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_\infty^2}{2\Gamma_n}\right).$$

Une optimisation en  $\lambda$  conduit au résultat.

## 2.4 Étude de l'équation de Poisson

Ces résultats de concentration nécessitent de contrôler le gradient de la solution de l'équation de Poisson associé à l'EDS. Nous obtenons une telle inégalité dans un cadre elliptique et de confluence «*mild*» ainsi que dans un cadre régulier et de confluence forte. L'hypothèse de confluence que nous considérons s'écrit :

( $\mathbf{D}_\alpha^p$ ) Il existe  $\alpha > 0$  et  $p \in (1, 2]$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\left\langle \frac{Db(x) + Db(x)^*}{2} \xi, \xi \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \left( (p-2) \frac{|\langle D\sigma_{\cdot j}(x)\xi, \xi \rangle|^2}{|\xi|^2} + |D\sigma_{\cdot j}\xi|^2 \right) \leq -\alpha|\xi|^2.$$

Cette condition assez technique signifie que les fluctuations de la dérive  $b$  doivent rappeler le processus vers l'origine plus fortement que les variations de la matrice de diffusion  $\sigma$ .

Dans le cas où ( $\mathcal{L}_\nu$ ) et ( $\mathbf{D}_\alpha^p$ ) sont vérifiées, nous montrons que si :

- [*U.E., confluence «mild»*]  $\sigma$  est U.E.,  $\|D\sigma\|_\infty^2 \leq \frac{2\alpha}{2(1+\beta)-p}$ ,  $b, \sigma, f \in C^{1,\beta}$ , plus une hypothèse de structure sur  $\sigma$

ou

- [*Régularité, confluence forte*]  $\|D\sigma\|_\infty^2 \leq \frac{2\alpha}{2(3+\beta)-p}$  et  $b, \sigma, f$  de classe  $C^{3,\beta}$

alors il existe une unique mesure invariante associée à la dynamique (1.1). L'équation de Poisson

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \mathcal{A}\varphi(x) = f(x) - \nu(f), \quad (2.12)$$

admet une unique solution  $\varphi \in \mathcal{C}^{3,\beta}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ,  $\beta \in (0, 1)$ , centrée en  $\nu$ , et vérifiant :

$$\|\nabla\varphi\|_\infty \leq \frac{[f]_1}{\alpha}.$$

Pour montrer ces propriétés, on utilise la représentation Feynman-Kac de la solution de (2.12),

$$\varphi(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} f(\mathbf{X}_t) - \nu(f) dt\right], \quad (2.13)$$

puis on dérive le flot «à la Kunita» [Kun97]. Dans le cas U.E., on utilise les estimées de Schauder établies par Krylov et Priola [KP10]. Dans le cas régulier, on dérive itérativement le flot et l'hypothèse de confluence permet d'intégrer en temps les dérivées de (2.13).

## 3 Inégalité de concentration optimale (Chapitre 4)

Nous obtenons une inégalité de concentration optimale de l'erreur d'approximation de la mesure invariante par le schéma de Lamberton Pagès. Ce résultat s'obtient en considérant une nouvelle équation de Poisson, où naturellement apparaît que la variance limite du TLC associée est cobord. Ce chapitre est issu d'un travail seul [Hon19], accepté pour publication dans la revue *Stochastic Processes and their Applications*.

S'il existe une fonction  $\vartheta \in \mathcal{C}^{3,\beta}$  telle que  $\mathcal{A}\vartheta = |\sigma^*\nabla\vartheta|^2 - \nu(|\sigma^*\nabla\vartheta|^2)$ , alors, pour tout  $\theta \in (\frac{1}{2+\beta}, 1]$ ,  $n \geq 1$ ,  $a = a(n) > 0$  vérifiant  $a/\sqrt{\Gamma_n} \rightarrow 0$  (*déviations Gaussiennes*) :

$$\mathbb{P}[|\sqrt{\Gamma_n}\nu_n(f) - \nu(f)| \geq a] \leq 2C_n \exp\left(-c_n \frac{a^2}{2\nu(|\sigma^*\nabla\vartheta|^2)}\right), \quad (3.1)$$

avec  $\varphi$  suffisamment régulière telle que  $\mathcal{A}\varphi = f - \nu(f)$  et  $C_n, c_n > 0$  tendant vers 1 avec  $n$ . Les régimes de concentration considérés,  $a = o(\sqrt{\Gamma_n})$ , incluent, notamment les cas qui interviennent pour les Intervalles de Confiance ( $\Gamma_n \rightarrow_n +\infty$ ). Ainsi la constante' de concentration correspond bien à la variance de l'objet limite (2.4). Nous étendons également ce résultat à une source Lipschitz pour une diffusion non-dégénérée.

L'idée principale de la preuve consiste à raffiner l'inégalité de concentration utilisée dans (2.11). Pour se faire, il faut contrôler plus précisément le module de Lipschitz venant de (2.9). L'inégalité (3.1) permet aussi d'obtenir un contrôle optimal d'intervalles de confiance du type :

$$\mathbb{P}\left[\nu(f) \in \left[\nu_n(f) - \frac{a}{\sqrt{\Gamma_n}}, \nu_n(f) + \frac{a}{\sqrt{\Gamma_n}}\right]\right] \geq 1 - 2C_n \exp\left(-c_n \frac{a^2}{2\nu(|\sigma^* \nabla \varphi|^2)}\right).$$

## 4 Extension aux Poisson composés (Chapitre 5)

Nous obtenons des inégalités de concentration Gaussienne de l'erreur d'approximation de la mesure invariante associée à une EDS dirigée par un mouvement Brownien et par un processus de Poisson composé à sauts sous-Gaussiens. Nous utilisons un schéma fondé sur celui utilisé par Panloup pour des processus de Lévy plus généraux.

Une dernière extension des techniques développées dans les deux chapitres précédents a fait l'objet d'une collaboration avec D. Loukianova et A. Gloter (LaMME, UEVE), [GHL18]. Ce travail a été soumis. Nous obtenons des inégalités de concentration non-asymptotiques en présence de sauts dans la dynamique

$$d\mathbf{X}_t = b(\mathbf{X}_t)dt + \sigma(\mathbf{X}_t)dW_t + \kappa(\mathbf{X}_t)d\mathbf{Z}_t, \quad (4.1)$$

où  $\kappa$  est une fonction Lipschitz,  $\mathbf{Z}_t$  est un processus de Lévy de carré intégrable et de mesure de Lévy  $\pi$ . Une extension de l'algorithme de Lambertion Pagès dans ce cadre a été proposée par Panloup [Pan08a]. L'auteur démontre la convergence du schéma et un TLC pour son schéma à sauts, cf. [Pan08b] :

$$\sqrt{\Gamma_n} \nu_n(\mathcal{A}\varphi) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{(loi)}} \mathcal{N}\left(0, \int_{\mathbb{R}^d} (|\sigma^* \nabla \varphi|^2(x) + \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x + \kappa(x)y) - \varphi(x)|^2 \pi(dy)) \nu(dx)\right).$$

La présence de sauts dans la dynamique (4.1) engendre ainsi une variance limite différente du cadre Brownien (2.4). Nous observons de plus que ces sauts engendrent un bon nombre de problèmes, au premier lieu desquels le potentiel manque d'intégrabilité des grands sauts. De ce fait, nous nous sommes intéressés aux processus à sauts de type Poisson composé

$$\mathbf{Z}_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, \quad (4.2)$$

où  $N_t$  est un processus de Poisson d'intensité  $t$  et  $(Y_k)_{k \geq 1}$  forme une suite i.i.d. de variables aléatoires «sous-Gaussiennes» (vérifiant **(GC)**). À l'aide du schéma à pas décroissant, nous approchons les incréments des sauts du processus de Poisson composé  $\Delta \mathbf{Z}_t$  par une variable aléatoire du type  $B_n Y_n$  où  $B_n$  suit une loi de Bernoulli telle que  $\mathbb{P}[B_n = 1] = \gamma_n$  et  $\mathbb{P}[B_n = 0] = 1 - \gamma_n$ , et

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_{n+1} b(X_n) + \sqrt{\gamma_{n+1}} \sigma(X_n) U_{n+1} + \kappa(X_n) Z_{n+1}, \quad (4.3)$$



Cette approximation nous permet d'appliquer les méthodes de concentration développées dans le cas Brownien :  $\forall n \geq 1, 0 < a \ll \frac{\sqrt{\Gamma_n}}{\sum_{k=1}^n \gamma_k}$  :

$$\mathbb{P}[|\sqrt{\Gamma_n} \nu_n(\mathcal{A}\varphi)| \geq a] \leq 2 C_n \exp\left(-c_n \frac{a^2}{2((1+r)\|\kappa\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_\infty^2 + \|\sigma\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_\infty^2)}\right),$$

avec  $c_n, C_n > 0$  convergeant vers 1 avec  $n$ . La constante de concentration est «polluée» par une constante multiplicative devant le terme de saut. Contrairement à nos résultats précédents, nous n'avons pas obtenu une simple borne supérieure du *carré du champ* mais  $(1+r)$  fois la borne supérieure du terme de sauts. Cela est dû à la difficulté de vérifier que  $(Z_n)_{n \geq 1}$  satisfasse **(GC)**. Nous approchons un processus  $\mathbf{Z}_t$  qui ne satisfait **(GC)** pas, par un suite de variables  $Z_n$  qui vérifie cette propriété.

Pour espérer contrôler non-asymptotiquement des EDS dirigées par des processus de Lévy moins intégrables que  $\mathbf{Z}_t$  défini en (4.2), il faudrait utiliser une autre approche, fondée par exemple sur la théorie spectrale pour le schéma inhomogène. On pourrait espérer établir un développement de type Edgeworth ou Berry-Esseen pour  $\mathbf{Z}_t \in L^3$ .

## II) Régularisation par un bruit dégénéré (Partie III du manuscrit)

### Avant-propos

Après une courte introduction, dans la Section 5, j'explique de manière heuristique en quoi consiste la régularisation par le bruit. Puis, je propose un bref rappel sur les estimées de Schauder dans un cadre non-dégénéré. Dans la Section 6, je présente la méthode développée pendant la thèse.

Par soucis de simplification, je présente d'abord ces techniques dans le cas *cinétique* (chaîne d'ordre 2). Ensuite, dans la Section 7, je présente le modèle de chaîne dégénérée générale. Dans cette section, je présente quelques résultats connus d'estimées de Schauder pour la chaîne dégénérée linéaire. J'énonce également le résultat principal du Chapitre 6. Dans la Section 8, je présente les enjeux liés à l'unicité d'EDSs. J'établis le théorème principal du Chapitre 7 de mon manuscrit de thèse : l'unicité forte pour la chaîne d'EDS dégénérée. J'explique aussi en quoi consiste la transformée de Zvonkin Veretennikov qui est au cœur de l'analyse.

## 5 Régularisation par le bruit

Il s'agit de deux travaux en collaboration avec P.-E. Chaudru de Raynal LAMA, Université de Savoie Mont Blanc) et avec S. Menozzi . On considère une équation de Kolmogorov dégénérée et on montre des estimées de Schauder associées pour des coefficients à régularités minimales. Il s'agit d'une extension des travaux de Lunardi [Lun97] et de Priola [Pri09] à un cadre dégénéré non-linéaire. Nous proposons une nouvelle approche, même dans un cadre non-dégénéré, aux estimées de Schauder, constructive et qui s'articule autour d'une méthode perturbative. Ce travail a été soumis, [CDRHM18a].

Avec cette technique, nous avons également établi l'unicité forte pour une chaîne dégénérée d'EDS. La démonstration repose sur la transformée de Zvonkin Veretennikov qui nécessite une étude fine de l'équation de Kolmogorov associée. Ce travail a également été soumis, [CDRHM18b].

## 5.1 Heuristique

Dans un premier temps, je vais expliquer de manière heuristique comment la régularisation par le bruit permet de restaurer l'unicité d'une EDO scalaire de type

$$\dot{x}_t = \mathbf{F}(t, x_t), \quad (5.1)$$

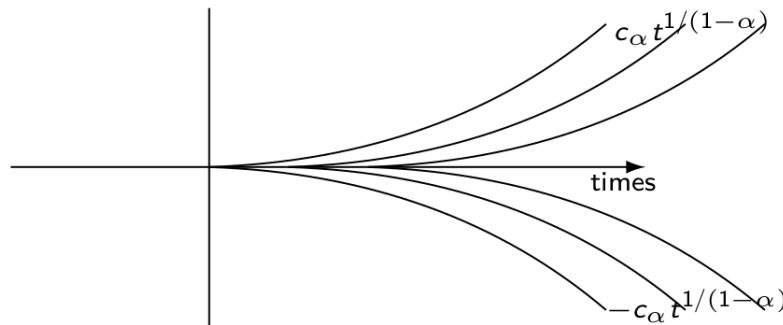
avec  $\mathbf{F}$  une fonction continue. Le théorème de Cauchy-Peano assure l'existence d'une solution  $x_t$  de (5.1). Si  $\mathbf{F}$  est Lipschitz alors le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que la solution est unique. Néanmoins, si  $\mathbf{F}$  est seulement Hölder, on ne sait rien *a priori* quant à l'unicité de la solution. Il existe même des cas connus où cette unicité n'est pas vérifiée. Prenons l'exemple de Peano,

$$\dot{x}_t = \text{sign}(x_t)|x_t|^\alpha, \alpha \in (0, 1).$$

Dans ce cas, il existe une infinité de solutions, à savoir :

$$x_t = c_\alpha(t - t_0)_+^{\frac{1}{1-\alpha}}, t_0 \in [0, T].$$

Le dessin ci-dessous représente les solutions maximales de cette EDO.



Pour qu'il y ait une unique solution à une EDO du type (5.1), avec  $\mathbf{F}$  Hölder, l'idée est d'ajouter un bruit auto-similaire  $(Z_t)_{t \geq 0}$ , par exemple un mouvement Brownien, un processus stable, un Brownien fractionnaire...

$$dX_t = \mathbf{F}(t, X_t)dt + dZ_t. \quad (5.2)$$

On dit que  $Z_t$  est auto-similaire d'indice  $\gamma$  si pour tout  $a > 0$  on a l'égalité en loi :

$$(Z_{at}, t \geq 0) \stackrel{\text{(loi)}}{=} (a^\gamma Z_t + (1 - a^\gamma)Z_0, t \geq 0). \quad (5.3)$$

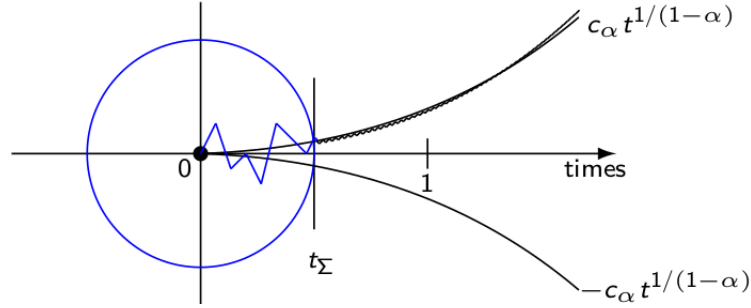
En particulier, si  $Z_t$  est un mouvement Brownien  $\gamma = 1/2$ , si  $Z_t$  est un processus  $\alpha$ -stable  $\gamma = 1/\alpha$ , ou si  $Z_t$  est un mouvement Brownien fractionnaire  $\gamma = H$  avec  $H$  l'exposant de Hurst associé.

Avec la présence de ce bruit, l'EDO (5.1) devient une EDS (5.2) où l'on constate la présence de deux types de régimes. En effet, Delarue et Flandoli [DF14] ont montré qu'il existe un temps typique  $0 < t_\Sigma < 1$  tel que :

- pour tout  $t < t_\Sigma$  ce sont les variations du bruit qui dominent. D'une certaine manière, la solution de l'EDS (5.2) quitte les singularités de la dérive  $\mathbf{F}$ .

- pour tout  $t < t_\Sigma$  c'est la dérive qui domine dans l'EDS (5.2). La solution de l'EDS fluctue alors autour de la solution maximale de l'ODE (5.1) associée.

On voit ainsi de manière heuristique qu'une réalisation du bruit jusqu'à l'instant  $t_\Sigma$  impose le choix de l'ODE liée à la dérive. Dit autrement, la présence d'un processus autosimilaire restaure l'unicité (en un certain sens) de l'ODE bruitée.



Pour observer ce phénomène, il faut que la dérive  $\mathbf{F}$  ne soit pas trop irrégulière par rapport à l'indice d'auto-similarité du bruit. Par exemple, considérons le cas d'une diffusion Brownienne cinétique\*

$$\begin{aligned} dX_t^1 &= dW_t \rightsquigarrow t^{\frac{1}{2}} \\ dX_t^2 &= X_t^1 + \mathbf{F}_2(t, X_t^2)dt \rightsquigarrow t^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{F}_2$   $\alpha$ -Hölder en espace. La variable non-dégénérée  $X_t^1$  est homogène au Brownien, c'est-à-dire à  $t^{\frac{1}{2}}$ . Tandis qu'au deuxième étage, la partie dégénérée,  $X_t^2$  est homogène à l'intégrale de  $X_t^1$  et donc à l'intégrale du Brownien qui est homogène à  $t^{\frac{3}{2}}$ .

Si l'on s'intéresse à la partie dégénérée, le bruit auto-similaire de (5.2) correspond à  $X_t^1$  et vérifie la propriété (5.3) pour  $\gamma = 3/2$ . Pour que les fluctuations de ce bruit, avant le temps critique  $t_\Sigma$ , soient plus importante que la solution maximale de l'EDO (5.1) la condition suivante doit être vérifiée

$$t_\Sigma^{\frac{1}{1-\alpha}} < t_\Sigma^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 1 - \alpha < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{3}. \quad (5.4)$$

On retrouve ainsi, dans le cas cinétique, le seuil pour l'unicité faible établi par Chaudru de Raynal et Menozzi [CdRM17]. Cette régularité requise est minimale au sens où dans cet article, les auteurs trouvent un contre-exemple de non-unicité faible pour une dérive  $\alpha$ -Hölder avec  $\alpha < 1/3$ .

Ces seuils sont également ceux que l'on trouve pour les estimées de Schauder de la solution de l'équation de Kolmogorov associée, cf. Section 7 plus loin. Néanmoins, comme nous le verrons dans la Section 8, les seuils de régularité minimale diffèrent pour l'unicité forte.

---

\*. On dit cinétique ou vitesse/position, car une fois intégrée cette équation, on voit que  $X_t^2$  correspond à l'intégrale de  $X_t^1$ . Ainsi  $X_t^1$  (la vitesse) peut être vu comme la dérivée de  $X_t^2$  (la position).

## 5.2 Schauder non-dégénérée

Les estimées de Schauder sont cruciales dans de (nombreux) domaines qui nécessitent des contrôles fins de solution d'équations aux dérivées partielles. C'est notamment le cas pour l'étude d'erreur de discrétisation, comme nous l'avons vu dans la première partie de ce résumé.

Je propose ici de faire un bref rappel des résultats existant pour l'équation de Kolmogorov non-dégénérée. Pour tout temps final  $T > 0$ , on considère le problème de Cauchy :  $\forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{nd}$ ,

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \langle \mathbf{F}(t, x), \mathbf{D}u(t, x) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{D}^2 u(t, x) a(t, x)) = -f(t, x), \\ u(T, x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (5.5)$$

$a$  est U.E. et bornée.

★ Friedman [Fri64] : pour  $\mathbf{F}, \sigma \in C_b^{\frac{\gamma}{2}, \gamma}$ , i.e.  $\sigma, \mathbf{F}$  bornées,  $\frac{\gamma}{2}$ -Hölder en temps et  $\gamma$ -Hölder en espace, la solution  $u$  de l'équation (5.5) vérifie :

$$\|u\|_{C_b^{\frac{2+\gamma}{2}, 2+\gamma}} \leq C(\|f\|_{C_b^{\frac{\gamma}{2}, \gamma}} + \|g\|_{C_b^{2+\gamma}}), \quad (5.6)$$

où les normes, sont les normes Hölder usuelles en temps/espace.

★ Le cas de la dérive non-bornée en espace a été longtemps un problème ouvert. Il a été résolu en 2010 par Krylov et Priola [KP10] : pour  $\sigma \in C_b^{\frac{\gamma}{2}, \gamma}$ , et  $\mathbf{F} \in L^\infty(C^\gamma)$ , i.e.  $\mathbf{F}$  bornée en temps et  $\gamma$ -Hölder en espace, la solution  $u$  d'une EDP du type (5.5) avec potentiel vérifie :

$$\|u\|_{L^\infty(C_b^{2+\gamma})} \leq C(\|f\|_{L^\infty(C^\gamma)} + \|g\|_{C_b^{2+\gamma}}), \quad (5.7)$$

les normes  $\|\cdot\|_{L^\infty(C_b^{2+\gamma})}$ ,  $\|\cdot\|_{L^\infty(C^\gamma)}$  sont des normes uniformes en temps et Hölder en espace.

En particulier, ces estimées assurent l'unicité de la solution de l'EDP. Si l'on considère deux solution  $u_1$  et  $u_2$  satisfaisant les même estimées de Schauder, on a directement :

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(C_b^{2+\gamma})} \leq 0 \implies u_1 = u_2.$$

On voit également apparaître ce qu'on appelle le «bootstrap parabolique» :

- en espace, si la fonction source  $f \in C_b^\gamma$  alors la solution  $u \in C_b^{2+\gamma}$ ,
- en temps, si la fonction source  $f \in C_b^{\frac{\gamma}{2}}$  alors la solution  $u \in C_b^{\frac{2+\gamma}{2}}$ .

Le gain de régularité de la solution par rapport à la fonction source  $f$  se fait suivant l'échelle parabolique associée. En effet, dans le cas non-dégénérée la pseudo-distance parabolique associée à ces équations est

$$\mathbf{d}_P((t, x), (t', x')) = |t - t'|^{1/2} + |x - x'|. \quad (5.8)$$

Une autre façon de voir cette échelle parabolique est de considérer l'opérateur différentiel  $\mathcal{L}_0$  typique associée à (5.5) et définie par :

$$\mathcal{L}_0 := \partial_t + \frac{1}{2} \Delta.$$

Pour  $\lambda > 0$ , et l'opérateur de dilatation  $\delta_\lambda : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \mapsto \delta_\lambda(t, x) = (\lambda^2 t, \lambda x)$ , on a :

$$\mathcal{L}_0 v = 0 \implies \mathcal{L}_0(v \circ \delta_\lambda) = 0. \quad (5.9)$$

Autrement dit, la pseudo-distance introduite en (5.8), rend bien homogène en temps/espace l'opérateur de dilatation  $\delta_\lambda$ . Cette échelle temps/espace est donc intrinsèque au problème parabolique considéré.

Le gain de régularité montré par les estimées de Schauder (5.6), (5.7) peut s'interpréter comme étant une expression de la régularisation par le bruit. En effet, l'équation de Kolmogorov (5.5) est liée à une EDS du type (5.2). En particulier, le terme de gauche dans (5.5) correspond à la partie non martingale dans la formule d'Itô. Dit autrement, le terme d'ordre 2 dans l'équation (5.5) est le pendant déterministe de la présence d'un bruit d'indice d'auto-similarité d'indice 1/2, ici le mouvement Brownien.

## 6 Méthode perturbative

L'un des principaux apports dans la deuxième partie de ma thèse a été de développer une nouvelle méthode pour établir des estimées de Schauder. Cette méthode est constructive, contrairement à la méthode de continuité, et robuste. Récemment, notre méthode a été mise en œuvre dans [CdRMP19] pour établir des estimées de Schauder pour l'équation de Kolmogorov à opérateur fractionnaire (associé à un processus stable) dans un cadre de régularité et d'auto-similarité sur-critique, i.e. lorsque l'indice d'auto-similarité du bruit domine pas l'ordre 1 de la dérive,  $\alpha < 1$ .

### 6.1 Modèle cinétique

Par soucis de simplification, dans cette section, je vais expliquer en quoi consiste notre méthode dans un cadre cinétique. C'est un modèle utilisé dans différents domaines, en finance avec la dynamique d'options asiatiques, en physique Hamiltonienne... La chaîne dégénérée complète sera abordée dans la section suivante. Considérons le problème de Cauchy associé au modèle cinétique suivant :

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}_t^1 &= \mathbf{F}_1(t, \mathbf{X}_t) + \sigma(t, \mathbf{X}_t)dW_t, \\ d\mathbf{X}_t^2 &= \mathbf{F}_2(t, \mathbf{X}_t)dt, \end{aligned} \tag{6.1}$$

$\sigma$  est une racine carrée de  $a$  et où  $D_{\mathbf{x}_1}\mathbf{F}_2(t, \mathbf{x})$  est non-dégénérée pour tout  $t$  et  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ . La condition de non-dégénérescence de la sous-diagonale de la matrice jacobienne de la dérive correspond à l'hypothèse d'Hömander faible (les crochets de Lie successifs associés à une version régularisée de (6.1) engendrent  $\mathbb{R}^{2d}$ , cf. [Hör67]) ou appelée condition de rang de Kalman (cf. [Zab08], Chapitre 1). Cette hypothèse assure ainsi l'existence d'une solution de l'EDS (6.1) et de l'EDP associée qui s'écrit :  $\forall T > 0, (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{nd}$ ,

$$\begin{cases} \partial_t u(t, \mathbf{x}) + \langle \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}u(t, \mathbf{x}) \rangle + \frac{1}{2}\text{Tr}(D_{\mathbf{x}_1}^2 u(t, \mathbf{x})a(t, \mathbf{x})) = -f(t, \mathbf{x}), \\ u(T, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}, \end{cases} \tag{6.2}$$

avec la dérive qui s'écrit  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) := (\mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}), \mathbf{F}_2(t, \mathbf{x}))$ . On note l'opérateur différentiel associé

$$Lu(t, \mathbf{x}) := \langle \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}u(t, \mathbf{x}) \rangle + \frac{1}{2}\text{Tr}(D_{\mathbf{x}_1}^2 u(t, \mathbf{x})a(t, \mathbf{x})). \tag{6.3}$$

On suppose également que :

- $(\mathbf{S}_a)$   $a \in L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})$ , bornée,  $\gamma$ -Hölder en  $\mathbf{x}_1$  et  $\frac{\gamma}{3}$ -Hölder en  $\mathbf{x}_2$ ,
- $(\mathbf{S}_{\mathbf{F}_1})$   $\mathbf{F}_1 \in L^\infty(C^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})$ , bornée en temps,  $\gamma$ -Hölder en  $\mathbf{x}_1$  et  $\frac{\gamma}{3}$ -Hölder en  $\mathbf{x}_2$ ,
- $(\mathbf{S}_{\mathbf{F}_2})$   $\mathbf{F}_2 \in L^\infty(C^{1+\gamma, \frac{1+\gamma}{3}})$ , bornée en temps,  $1 + \gamma$ -Hölder en  $\mathbf{x}_1$  et  $\frac{1+\gamma}{3}$ -Hölder en  $\mathbf{x}_2$ ,
- $(\mathbf{S}_f)$   $f \in L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})$ , bornée,  $\gamma$ -Hölder en  $\mathbf{x}_1$  et  $\frac{\gamma}{3}$ -Hölder en  $\mathbf{x}_2$ ,
- $(\mathbf{S}_g)$   $g \in C_b^{2+\gamma, \frac{2+\gamma}{3}}$ , bornée,  $2 + \gamma$ -Hölder en  $\mathbf{x}_1$  et  $\frac{2+\gamma}{3}$ -Hölder en  $\mathbf{x}_2$ ,

On veut montrer que la solution  $u$  du problème de Cauchy (6.2) vérifie :

$$\|u\|_{L^\infty(C_b^{2+\gamma, \frac{2+\gamma}{3}})} \leq C(\|f\|_{L^\infty(C^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})} + \|g\|_{C_b^{2+\gamma, \frac{2+\gamma}{3}}}). \quad (6.4)$$

Le gain de régularité attendu est à mettre en relief avec l'échelle intrinsèque du problème (6.2). En effet, pour l'opérateur différentiel typique associé à (6.2)  $\mathcal{L}'_0 := \partial_t + \frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{x}_1}$ , et l'opérateur de dilatation

$$\delta'_\lambda : (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2d} \mapsto \delta_\lambda(t, \mathbf{x}) = (\lambda^2 t, \lambda \mathbf{x}_1, \lambda^3 \mathbf{x}_2), \quad (6.5)$$

on obtient similairement à (5.9) :

$$\mathcal{L}'_0 v = 0 \implies \mathcal{L}'_0(v \circ \delta'_\lambda) = 0.$$

## 6.2 Choix d'un *proxy*

Pour s'assurer de l'existence et de l'unicité des objets que l'on va manipuler, la première étape consiste à régulariser tout les coefficients de l'équation (6.2). Le but est de montrer que la solution  $u_m$  de la version régularisée de (6.2) vérifie les estimées de Schauder (6.4) uniformément en  $m$ , le coefficient de régularisation. Pour simplifier les notations, j'omettrai l'indice  $m$ .

L'idée, ensuite, consiste à linéariser l'équation autour d'un *proxy* bien connu et de contrôler l'erreur d'approximation. On écrit pour tout opérateur différentiel  $\tilde{L}$  associé à un *proxy*  $\tilde{\mathbf{X}}_t$  qui possède une densité de probabilité  $\tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y})$

$$\begin{cases} \partial_t u(t, \mathbf{x}) + \tilde{L}u(t, \mathbf{x}) = -f(t, \mathbf{x}) - (L - \tilde{L})u(t, \mathbf{x}), & (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{nd}, \\ u(T, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nd}. \end{cases} \quad (6.6)$$

On applique la formule de Duhamel, correspondant à un développement *parametrix* d'ordre 1 :

$$u(t, \mathbf{x}) = \tilde{P}_{T,t}g(\mathbf{x}) + \tilde{G}f(t, \mathbf{x}) + \int_t^T ds \int_{\mathbb{R}^{nd}} \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y})(L - \tilde{L})u(s, \mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad (6.7)$$

où l'on définit respectivement le *semi-groupe* et le *noyau de Green* par :

$$\tilde{P}_{T,t}g(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^{nd}} \tilde{p}(t, T, \mathbf{x}, \mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \tilde{G}f(t, \mathbf{x}) := \int_t^T ds \tilde{P}_{s,t}f(s, \mathbf{x}). \quad (6.8)$$

La dernière contribution dans l'équation (6.7),  $\int_t^T ds \int_{\mathbb{R}^{nd}} \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y})(L - \tilde{L})u(s, \mathbf{y})d\mathbf{y}$  est un terme de reste.

Le choix du *proxy* est crucial. D'un côté, la régularité maximale que l'on peut espérer de la solution est celle du semi-groupe et du noyau de Green associés au *proxy*. D'un autre côté,

il faut réussir à choisir un *proxy* suffisamment «proche» du processus d'origine afin d'avoir une contribution négligeable du terme de reste.

Un choix naturel pour ledit *proxy* est de linéariser le processus (6.1) autour du flot associé à la dérive. Autrement dit, on considère le flot

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_{v,\tau}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{F}(v, \boldsymbol{\theta}_{v,\tau}(\boldsymbol{\xi})), \quad v \in [\tau, T], \quad \boldsymbol{\theta}_{\tau,\tau}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^*, \quad (6.9)$$

où  $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{nd}$  sont des paramètres de gel.

Le choix de ces paramètres dépend de la stratégie adoptée. En effet, si l'on choisit  $\tau = s$ ,  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{y}$  avec les notations de (6.8), alors on a un *proxy* de type *backward*. On part de  $\mathbf{y}$  à l'instant  $s$  pour revenir en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t < s$ . Cette approche introduite par McKean et Singer [MS67] est commode pour des estimées de la densité, comme l'ont fait Delarue et Menozzi [DM10], et dans d'autres articles de Menozzi *et al.* [KMM10], [CdRM17]<sup>†</sup>.

Si cette méthode est pratique pour certains centrages, elle l'est beaucoup moins pour utiliser des techniques de *cancellation*<sup>‡</sup> puisque la densité associée au proxy dépend de  $\mathbf{y}$  qui la variable de l'intégrale courante dans la formule de Duhamel (6.7), i.e.  $\tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{p}^{(s,\mathbf{y})}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Dit autrement, la densité du *proxy* n'est pas une densité de probabilité. Nous avons a priori,  $\int_{\mathbb{R}^{2d}} \tilde{p}^{(s,\mathbf{y})}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \neq 1$ . L'étude des dérivées au-delà du gradient devient dès lors compliquée.

Pour remédier à ce problème, nous avons utilisé une approche dite *forward*. On part de  $\mathbf{x}$  en  $t$  pour aller vers  $\mathbf{y}$  à l'instant  $s$ . Autrement dit, on prend  $\tau = t$ ,  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$ . Cette méthode introduite par Il'in, Kalashnikov et Oleinik [IKO62], a également été utilisée par Chaudru de Raynal [CdR17] pour le cas cinétique (6.1).

### 6.3 Propriétés du *proxy*

Après ce choix de flot  $(\boldsymbol{\theta}_{v,\tau}(\boldsymbol{\xi}))_{v \in [\tau, T]}$ , on linéarise l'EDS autour par développement de Taylor à l'ordre un. Pour tout  $v \in [t, s]$

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathbf{X}}_v^{(\tau,\boldsymbol{\xi})} &= [\mathbf{F}(v, \boldsymbol{\theta}_{v,\tau}(\boldsymbol{\xi})) + D\mathbf{F}(v, \boldsymbol{\theta}_{v,\tau}(\boldsymbol{\xi}))(\tilde{\mathbf{X}}_v^{(\tau,\boldsymbol{\xi})} - \boldsymbol{\theta}_{v,\tau}(\boldsymbol{\xi}))]dv + B\sigma(v, \boldsymbol{\theta}_{v,\tau}(\boldsymbol{\xi}))dW_v, \\ \tilde{\mathbf{X}}_t^{(\tau,\boldsymbol{\xi})} &= \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

avec la matrice  $B = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{d,d} & \mathbf{0}_{d,d} \\ \mathbf{0}_{d,d} & \mathbf{0}_{d,d} \end{pmatrix}$ , et pour tout  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{nd}$  :  $D\mathbf{F}(v, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{d,d} & \mathbf{0}_{d,d} \\ D_{\mathbf{z}_1}\mathbf{F}_2(v, \mathbf{z}) & \mathbf{0}_{d,d} \end{pmatrix}$  (correspondant aux variations de la dérive suivant la variable qui transmet le bruit). Nous supposons que  $D_{\mathbf{z}_1}\mathbf{F}_2(v, \mathbf{z})$  est inversible, i.e. la condition de Hörmander faible est vérifiée.

La dynamique (6.10) étant linéaire, le processus  $\tilde{\mathbf{X}}_s^{(\tau,\boldsymbol{\xi})}$  admet une densité Gaussienne. Sa matrice de covariance notée  $\tilde{\mathbf{K}}_{v,t}^{(\tau,\boldsymbol{\xi})}$  possède la propriété de «bonne échelle»,

$$\tilde{\mathbf{K}}_{v,t}^{(\tau,\boldsymbol{\xi})} = (v-t)^{-1}\mathbb{T}_{v-t}^2 \S. \quad (6.11)$$

\*. La solution de cette EDO est unique pour la version régularisée de  $\mathbf{F}$  par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

†. voir aussi [Men11], [Men18].

‡. La méthode de *cancellation* consiste à écrire pour une fonction  $h$  tel que  $\int h(y)dy = 0$ , et pour une fonction  $f$  régulière  $\int h(x-y)f(y)dy = \int h(x-y)[f(y) - f(x)]dy$ . On bénéficie après de la régularité de  $f$ .

§. i.e.  $\exists C \geq 1$  tel que pour tout  $0 \leq t < v \leq T < 1$  :

$$\forall \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{nd}, \quad C^{-1}(v-t)^{-1}|\mathbb{T}_{v-t}\boldsymbol{\zeta}|^2 \leq \langle \tilde{\mathbf{K}}_{v,t}^{(\tau,\boldsymbol{\xi})}\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta} \rangle \leq C(v-t)^{-1}|\mathbb{T}_{v-t}\boldsymbol{\zeta}|^2,$$

où pour tout  $s > 0$ , on définit la matrice d'échelle intrinsèque  $\mathbb{T}_s : \mathbb{T}_s = \begin{pmatrix} s\mathbf{I}_{d,d} & \mathbf{0}_{d,d} \\ \mathbf{0}_{d,d} & s^2\mathbf{I}_{d,d} \end{pmatrix}$ . Cette matrice d'échelle et l'identité (6.11) sont également à mettre en regard avec l'opérateur de dilatation défini en (6.5).

La densité du *proxy*  $\tilde{p}^{(\tau,\boldsymbol{\xi})}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  possède la propriété suivante, il existe  $C > 0$  tel que pour  $i \in \{1, 2\}$

$$|D_{\mathbf{x}_i} \tilde{p}^{(\tau,\boldsymbol{\xi})}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \frac{C}{(s-t)^{(i-1/2)}} \bar{p}_{C^{-1}}^{(\tau,\boldsymbol{\xi})}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (6.12)$$

où  $\bar{p}_{C^{-1}}^{(\tau,\boldsymbol{\xi})}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  est une densité Gaussienne  $\mathcal{N}(\mathbf{m}_{s,t}^{\tau,\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}), (s-t)^{-1}\mathbb{T}_{s-t}^2)$ ,  $\mathbf{m}_{s,t}^{\tau,\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^d \blacktriangleright$ . Cette densité Gaussienne  $\bar{p}_{C^{-1}}^{(\tau,\boldsymbol{\xi})}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  est en fait le noyau de la chaleur associé à la pseudo-distance

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1| + |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2|^{1/3}. \quad (6.13)$$

Ce qui correspond à l'homogénéité de l'opérateur de dilatation (6.5).

Notons que d'après (6.12), dériver en espace la densité du *proxy* engendre des singularités en temps. L'idée principale de l'analyse consiste dès lors à rendre ces singularités intégrables.

On pourra retenir que le tilde « $\tilde{\phantom{x}}$ » concerne le *proxy* et la bar « $\bar{\phantom{x}}$ » le noyau de la chaleur associée à la pseudo-distance  $\mathbf{d}$ .

Pour la suite, par soucis de simplification, on omettra les indices  $C^{-1}$ ,  $\tau$ ,  $\boldsymbol{\xi}$ . On choisit les paramètres de gel,  $\tau$  et  $\boldsymbol{\xi}$  après avoir potentiellement dérivé l'équation de Duhamel (6.7). Notons au passage que prendre  $(\boldsymbol{\xi}, \tau) = (\mathbf{x}, t)$  implique que la moyenne devient égale au flot, i.e.  $\mathbf{m}_{v,t}^{(\tau,\boldsymbol{\xi})}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}_{v,t}(\mathbf{x})$ . À partir de maintenant,  $\tau = t$ . On prendra aussi  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$  pour le contrôle des normes uniformes. Pour le contrôle des normes Hölder, le choix du *proxy* sera plus délicat.

## 6.4 Contrôle des normes uniformes

Les contrôles des normes uniformes du semi-groupe et du noyau de Green et de leurs dérivées en  $\mathbf{x}_1$  se déduisent par des techniques de type *cancellation*. Pour illustrer ces méthodes, regardons ce qu'il se passe pour le contrôle de la dérivée seconde du terme d'ordre 2 dans le reste dans la formule de Duhamel (6.7).

$$\begin{aligned} & \int_t^T ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{1}{2} \text{Tr}([a(s, \mathbf{y}) - a(s, \boldsymbol{\theta}_{s,\tau}(\boldsymbol{\xi}))] D_{\mathbf{y}_1}^2 u(s, \mathbf{y})) \\ \stackrel{(\mathbf{S}_a)^+(6.12)}{\leq} & \frac{C}{2} \|a\|_{L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})} \|D_{\mathbf{y}_1}^2 u\|_{L^\infty} \int_t^T ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} \frac{\bar{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{s-t} (|\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\theta}_{s,\tau}(\boldsymbol{\xi})_1|^\gamma + |\mathbf{y}_2 - \boldsymbol{\theta}_{s,\tau}(\boldsymbol{\xi})_2|^{\frac{\gamma}{3}}) \\ \leq & C \|a\|_{L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})} \|D_{\mathbf{y}_1}^2 u\|_{L^\infty} \int_t^T ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} \frac{\exp\left(-C^{-1}(s-t)|\mathbb{T}_{s-t}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}_{s,t}(\mathbf{x}))|^2\right)}{(s-t)^{1-\frac{\gamma}{2}+\frac{n^2d}{2}}} \\ \leq & C(T-t)^{\gamma/2} \|a\|_{L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})} \|D_{\mathbf{y}_1}^2 u\|_{L^\infty}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

---

$\blacktriangleright$ . La moyenne  $\mathbf{m}_{s,t}^{\tau,\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$  se définit explicitement en fonction de la résolvante associée à la dérive  $\mathbf{F}$ . Pour plus d'informations voir la Section 3.1 du Chapitre 6 ou la Section 2.1 du Chapitre 7 de mon manuscrit de thèse.



L'avant dernière inégalité, vient de la propriété suivante : pour tout  $\ell > 0$ , il existe  $C_\ell \in (0, 1)$  tel que pour tout  $x > 0$

$$x^\ell e^{-x^2} \leq C_\ell^{-1} e^{-C_\ell x^2}. \quad (6.15)$$

À ce stade, on suppose que le temps final  $T$  est «petit», de sorte qu'un argument circulaire\* permettra de conclure quant aux inégalités associées aux normes sup.

Cependant, nous n'avons pas encore contrôlé la partie dégénérée du terme de reste dans la formule de Duhamel (6.7), qui s'avère assez délicate. En effet, cette contribution fait intervenir les dérivées de la solution  $u$  suivant la direction dégénérée ( $D_{\mathbf{y}_2} u(s, \mathbf{y})$ ). Or la version non-régularisée de  $u$  n'est *a priori* dérivable suivant sa composante dégénérée. Puisque, d'après (6.4), on s'attend à ce qu'en la variable  $\mathbf{x}_2$ ,  $u$  soit seulement  $(2 + \gamma)/3 < 1$  Hölder. Pour éviter ce problème, on écrit pour

$$\Delta_{\mathbf{F}}(\tau, s, \boldsymbol{\theta}_{s,t}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{y}) := \left( \mathbf{F}_2(s, \mathbf{y}) - \mathbf{F}_2(s, \boldsymbol{\theta}_{s,\tau}(\boldsymbol{\xi})) - D_{\mathbf{x}_1} \mathbf{F}_2(s, \boldsymbol{\theta}_{s,\tau}(\boldsymbol{\xi}))(\mathbf{y} - \boldsymbol{\theta}_{s,\tau}(\boldsymbol{\xi}))_1 \right), \quad (6.16)$$

et grâce à une intégration par parties, l'identité suivante :

$$\begin{aligned} & \int_t^T ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \langle \Delta_{\mathbf{F}}(\tau, s, \boldsymbol{\theta}_{s,t}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{y}), D_{\mathbf{y}_i} u(s, \mathbf{y}) \rangle \\ &= - \int_t^T ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} D_{\mathbf{y}_2} \cdot [D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{F}}(\tau, s, \boldsymbol{\theta}_{s,t}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{y})] u(s, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (6.17)$$

La clef pour contrôler ce terme est d'utiliser la dualité Besov. En effet, on identifie l'espace de Hölder classique à un espace de Besov :  $C_b^{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = B_{\infty, \infty}^{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ,  $\tilde{\alpha} \in (0, 1)$ .

Une fonction  $f$  est dans l'espace de Besov  $B_{p,q}^s(\mathbf{R})$ ,  $1 \leq p, q \leq +\infty$ ,  $s \in \mathbb{R}$  si

$$f \in W^{l|s|, p}(\mathbf{R}), \text{ et } \int_0^\infty \left| \frac{\sup_{|h| \leq t} \|f(x-2h) - 2f(x-h) - f(x)\|_{L^p}}{t^\alpha} \right|^q \frac{dt}{t} < \infty,$$

pour d'autres caractérisation des espaces de Besov nous nous référons à [Tri83]<sup>†</sup>.

On sait de plus que les espaces  $B_{\infty, \infty}^{\tilde{\alpha}_i}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  et  $B_{1,1}^{-\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  sont en dualité avec, ici,  $\tilde{\alpha} = \frac{2+\gamma}{3}$ , cf. [LR02].

On montre par des techniques de *cancellation* que

$$\|\mathbf{y}_2 \mapsto D_{\mathbf{y}_2} \cdot (D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta_{\mathbf{F}}(\tau, s, \boldsymbol{\theta}_{s,t}(\boldsymbol{\xi}), \cdot))\|_{B_{1,1}^{-\frac{2+\gamma}{3}(\mathbb{R}^d)}} \leq C(s-t)^{\frac{\gamma}{2}-1} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}_2.$$

Dans le terme de droite la singularité en temps est intégrable. On réintègre suivant  $s$  et  $\mathbf{y}_1$  dans (6.17) et on obtient le même résultat que pour les partie non-dégénérées.

$$\left| \int_t^T ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \langle \Delta_{\mathbf{F}}(\tau, s, \boldsymbol{\theta}_{s,t}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{y}), D_{\mathbf{y}_i} u(s, \mathbf{y}) \rangle \right| \leq C(T-t)^{\gamma/2} \|u\|_{L^\infty(C_b^{2+\gamma, \frac{2+\gamma}{3}})} \quad (6.18)$$

\*. On appelle argument circulaire, un raisonnement du type «si  $x \leq cx + y$  avec  $c < 1$  et  $y > 0$  alors  $x \leq \frac{1}{1-c}y$ ».

†. La représentation des normes Besov privilégiées dans mes travaux est la représentation thermique

## 6.5 Contrôle des modules de Hölder

Pour obtenir le contrôle des normes Hölder, on fait face à de nouvelles difficultés. Cela peut d'ores-et-déjà s'envisager dans les inégalités précédentes. On a en quelque sorte une «marge» de  $\gamma$  en temps. Dans les inégalités (6.14) et (6.18), cela se traduit par le terme multiplicatif  $(T-t)^{\gamma/2}$ , qui est homogène à la distance intrinsèque  $\mathbf{d}^\gamma$ . Cette «marge» correspond à la régularité maximale de la solution, correspondant à la continuité  $\gamma$ -Hölder de  $D_{\mathbf{x}_1}^2 u$ . Ainsi, par homogénéité, pour contrôler la norme Hölder correspondante on ne pourra plus bénéficier de cette «marge» (notamment pour un argument circulaire).

Pour pouvoir exploiter la régularité maximale de la solution  $u$ , il va falloir être plus subtil dans le choix des paramètres de gel. Pour estimer une norme  $\gamma$ -Hölder, on veut montrer que pour tout point  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{2d}$  :

$$\sup_{t \in [0, T]} |D_{\mathbf{x}_1}^2 u(t, \mathbf{x}) - D_{\mathbf{x}_1}^2 u(t, \mathbf{x}')| \leq C \mathbf{d}^\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

On écrit la formule de Duhamel (6.7) pour ces deux points, et on obtient quatre paramètres de gel associés,  $(\tau, \boldsymbol{\xi})$  et  $(\tau', \boldsymbol{\xi}')$ , à calibrer.

Pour le choix de ces paramètres, il faut considérer deux possibilités :  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sont proches l'un de l'autre ou ils ne le sont pas. Cette proximité est regardée par rapport à la différence entre le temps courant  $s$  et le temps initial  $t$ , pour une certaine constante  $c_0 > 0$  :

- le régime *hors-diagonal* :  $c_0 \mathbf{d}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') > (s - t)$ ,
- et le régime *diagonal* :  $c_0 \mathbf{d}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \leq (s - t)$ ,

• Dans le cas *hors-diagonal*, les points étant éloignés, on ne peut espérer bénéficier d'un gain de régularité en choisissant le même point de *proxy* pour  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$ . L'idée est donc de prendre  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') = (\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ .

En guise d'illustration, voici ce que donne le contrôle de la norme Hölder de la dérivée seconde du noyau de Green  $D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{G}^{(\tau, \boldsymbol{\xi})} f$ , défini en (6.8). Par inégalité triangulaire, on a directement :

$$\begin{aligned} & \left| \int_t^{t+c_0 \mathbf{d}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} [D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}', \mathbf{y})] f(s, \mathbf{y}) \right| \\ & \leq \left| \int_t^{t+c_0 \mathbf{d}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) f(s, \mathbf{y}) \right| + \left| \int_t^{t+c_0 \mathbf{d}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}', \mathbf{y}) f(s, \mathbf{y}) \right|. \end{aligned}$$

Puis, on contrôle le premier terme à droite de l'inégalité, l'autre se traite de la même manière.

$$\begin{aligned} & \left| \int_t^{t+c_0 \mathbf{d}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) f(s, \mathbf{y}) \right| \\ \stackrel{\text{(cancellation)}}{=} & \left| \int_t^{t+c_0 \mathbf{d}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) [f(s, \mathbf{y}) - f(s, \boldsymbol{\theta}_{s,t}(\boldsymbol{\xi}))] \right| \\ \stackrel{(\mathbf{S}_f) + (6.12)}{\leq} & \int_t^{t+c_0 \mathbf{d}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} \frac{C}{s-t} \bar{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \|f\|_{L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})} \mathbf{d}^\gamma(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_{s,t}(\boldsymbol{\xi})) \\ = & \int_t^{t+c_0 \mathbf{d}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} \frac{C}{(s-t)^{1-\frac{\gamma}{2}}} \bar{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \|f\|_{L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})} \left( \frac{\mathbf{d}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}_{s,t}(\boldsymbol{\xi}))}{(s-t)^{1/2}} \right)^\gamma \\ \stackrel{(6.15)}{\leq} & C \|f\|_{L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})} \int_t^{t+c_0 \mathbf{d}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} ds (s-t)^{\frac{\gamma}{2}-1} = C c_0^{\frac{\gamma}{2}} \|f\|_{L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})} \mathbf{d}^\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

On obtient bien le contrôle attendu.

• Maintenant, dans le cas *diagonal*, on va chercher à bénéficier de la proximité entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$ . Pour cela, on choisit les mêmes points de gel  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}') = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ . On écrit ensuite par un développement de Taylor à l'ordre un de la densité du *proxy* :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{t+c_0\mathbf{d}^2(\mathbf{x},\mathbf{x}')}^t ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} [D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - D_{\mathbf{x}_1}^2 p^{(\tau, \boldsymbol{\xi}')} (t, s, \mathbf{x}', \mathbf{y})] f(s, \mathbf{y}) \right| \\
& \leq \left| \int_{t+c_0\mathbf{d}^2(\mathbf{x},\mathbf{x}')}^t ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} \int_0^1 d\lambda (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{D}_{\mathbf{x}} D_{\mathbf{x}_1}^2 \tilde{p}(t, s, \mathbf{x}' + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \mathbf{y}) f(s, \mathbf{y}) \right| \\
(6.12) + (\text{cancellation}) & \leq C \|f\|_{L^\infty} \sum_{i=1}^2 \int_{t+c_0\mathbf{d}^2(\mathbf{x},\mathbf{x}')}^t ds \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\mathbf{y} \underbrace{|\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}' \rangle_i|}_{\leq \mathbf{d}^{2i-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \frac{C}{(s-t)^{1+i-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} \bar{p}(t, s, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
& \leq C \|f\|_{L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})} \mathbf{d}^{2i-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \int_{t+c_0\mathbf{d}^2(\mathbf{x},\mathbf{x}')}^t \frac{C ds}{(s-t)^{1+i-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}}} \leq C c_0^{\frac{\gamma+1}{2}-i} \|f\|_{L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})} \mathbf{d}^\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}').
\end{aligned}$$

## 6.6 Conclusion

Le choix de nos points de proxy  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}')$ , en fonction du régime *diagonal* ou *hors-diagonal*, dépend de la variable d'intégration  $s$ . Cette technique de «*cut locus*» engendre un nouveau terme à contrôler dans la formule de Duhamel (6.7), à savoir

$$\left. \tilde{P}_{t_0, t}^{(\tau, \boldsymbol{\xi}')} u(t_0, \mathbf{x}') - \tilde{P}_{t_0, t}^{(\tau, \boldsymbol{\xi}')} u(t_0, \mathbf{x}') \right|_{(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi}') = (\mathbf{x}', \mathbf{x})}, \quad (6.19)$$

avec  $t_0 := t + c_0 \mathbf{d}^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  (le semi-groupe  $\tilde{P}_{\cdot, \cdot}^{(\cdot, \cdot)}$ , défini en (6.8)). Une analyse similaire à celle menée pour contrôler  $\tilde{P}_{T, t} g(\mathbf{x})$  permet de contrôler aussi ce terme de discontinuité.

On obtient ainsi les estimées de Schauder (6.4) si les modules Hölder des coefficients sont suffisamment petit,  $\exists 0 < \Lambda = \Lambda(\|a\|_{L^\infty(C_b^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})}, \|\mathbf{F}_1\|_{L^\infty(C^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})}, \|\mathbf{F}_2\|_{L^\infty(C^{1+\gamma, \frac{1+\gamma}{3}})})$

$$\|u\|_{L^\infty(C_b^{2+\gamma, \frac{2+\gamma}{3}})} \leq C(\|f\|_{L^\infty(C^{\gamma, \frac{\gamma}{3}})} + \|g\|_{C_b^{2+\gamma, \frac{2+\gamma}{3}}} + \|u\|_{L^\infty(C_b^{2+\gamma, \frac{2+\gamma}{3}})} \Lambda[1 + c_0^{\frac{\gamma}{2}} + T^{\frac{\gamma}{2}}]).$$

Si  $\Lambda[1 + c_0^{\frac{\gamma}{2}} + T^{\frac{\gamma}{2}}] < 1$ , on conclut grâce à un argument circulaire. Pour éviter la condition, modules Hölder de  $a$  et de  $\mathbf{F}$  petits, on procède à une méthode de «*scaling*» avec une dilatation du même type que (6.5).

Pour un temps final  $T$  quelconque, on itère le raisonnement suffisamment de fois avec comme condition terminale la solution de l'EDP.

$$\begin{cases} \partial_t u_k(t, \mathbf{x}) + \langle \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}u_k(t, \mathbf{x}) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr}(D_{\mathbf{x}_1}^2 u_k(t, \mathbf{x}) a(t, \mathbf{x})) = -f(t, \mathbf{x}), & t \in [T \frac{N-k}{N}, T \frac{N+1-k}{N}), \\ u_k((1 - \frac{k-1}{N})T, \mathbf{x}) = u(\frac{N+1-k}{N}T, \mathbf{x}), \end{cases} \quad (6.20)$$

pour  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  avec  $N > 0$  suffisamment grand. On profite ainsi de la stabilité dans  $L^\infty(C_{b, \mathbf{d}}^{2+\gamma})$  des estimées de Schauder.

On conclut enfin par argument de compacité\* et par l'unicité de la solution au problème martingale associé, cf. [CdRM17]. On a montré ainsi que la solution *mild* satisfait aux estimées de Schauder. La dualité Besov permet de montrer que la solution *mild* est aussi une solution faible.

La limite de notre approche est que les constantes explosent avec le temps, i.e. le nombre d'itérations de l'analyse du problème de Cauchy (6.20), et avec la dimension  $d^\dagger$ .

## 7 Chaîne dégénérée

### 7.1 Présentation du modèle

Le cas cinétique étudié dans la section précédente est un sous modèle de chaînes dégénérées. Ce dernier est par exemple un modèle typique en sismologie. On considère la propagation d'une secousse aléatoire sur plusieurs structures qui se transmettent l'aléa. Le modèle souvent utilisé pour représenter ce phénomène est un système de ressorts attachés les uns aux autres.

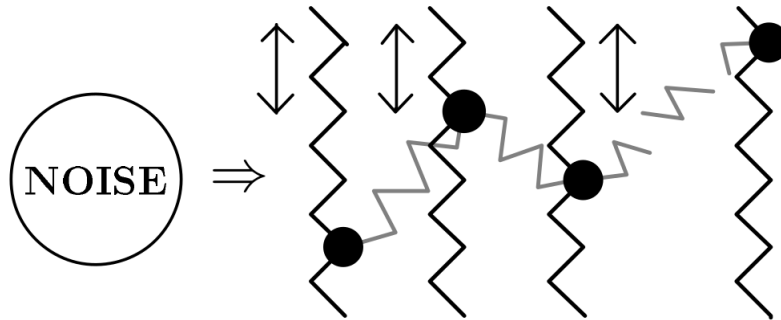


FIGURE 1 – Dessin de Delarue Menozzi [DM10].

Ces systèmes dégénérés sont également issus de modèles microscopiques associés à la diffusion de la chaleur (e.g. Heckmann et Hairer [EH00]).

La représentation de la dynamique stochastique de ce modèle est :

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{X}_t^1 &= \mathbf{F}_1(t, \mathbf{X}_t^1, \dots, \mathbf{X}_t^n)dt + \sigma(t, \mathbf{X}_t^1, \dots, \mathbf{X}_t^n)dW_t, \\
 d\mathbf{X}_t^2 &= \mathbf{F}_2(t, \mathbf{X}_t^1, \dots, \mathbf{X}_t^n)dt, \\
 d\mathbf{X}_t^3 &= \mathbf{F}_3(t, \mathbf{X}_t^2, \dots, \mathbf{X}_t^n)dt, \\
 &\vdots \\
 d\mathbf{X}_t^n &= \mathbf{F}_n(t, \mathbf{X}_t^{n-1}, \mathbf{X}_t^n)dt,
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $\forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{nd}$ ,  $D_{\mathbf{x}_{i-1}} \mathbf{F}_i(t, \mathbf{x}_{i-1}, \dots, \mathbf{x}_n) \in GL_d(\mathbb{R})$ . Autrement dit on considère la condition d'Hörmander faible associée à la chaîne.

\*. Les estimées de Schauder (6.4) étant indépendantes de l'indice de régularisation, nous pouvons utiliser le théorème de d'Ascoli.

†. Des estimées de Schauder associées à une équation parabolique à coefficients constants, et avec des constantes précises ne dépendant pas de la dimension ont été établies par Krylov et Priola [KP17].

## 7.2 Estimées de Schauder

L'EDP associée à la dynamique (7.1) s'écrit  $\forall T > 0, (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{nd}$ ,

$$\begin{cases} \partial_t u(t, \mathbf{x}) + \langle \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}u(t, \mathbf{x}) \rangle + \frac{1}{2} \text{Tr}(D_{\mathbf{x}_1}^2 u(t, \mathbf{x}) a(t, \mathbf{x})) = -f(t, \mathbf{x}), \\ u(T, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{nd}, \end{cases} \quad (7.2)$$

avec la dérive  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) := (\mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}_n(t, \mathbf{x}))$  correspondant à l'EDS (7.1), i.e. :

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \mathbf{F}_i(t, \mathbf{x}) := \mathbf{F}_i(t, \mathbf{x}^{i-1:n}), \mathbf{x}^{i-1:n} := (\mathbf{x}_{i-1}, \dots, \mathbf{x}_n), \quad (7.3)$$

Le cas linéaire a été traité par Lunardi [Lun97],  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$  avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \mathbf{a}_{2,1} & * & \cdots & \cdots & * \\ \mathbf{0}_{d,d} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{d,d} & \cdots & \mathbf{0}_{d,d} & \mathbf{a}_{n,n-1} & * \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

où  $(\mathbf{a}_{i,j})_{ij \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$  s.t.  $(\mathbf{a}_{i,i-1})$  sont non-dégénérés (condition de Hörmander satisfaite).

Si  $\sigma$  est constante alors  $\mathbf{X}_t$  est un processus Gaussien avec une matrice de covariance  $\mathbf{K}_t$  vérifiant la propriété de «bonne échelle»

$$\mathbf{K}_t^{1/2} = t^{-1/2} \mathbb{T}_t := \begin{pmatrix} t^{1/2} \mathbf{I}_{d,d} & \mathbf{0}_{d,d} & \cdots & \mathbf{0}_{d,d} \\ \mathbf{0}_{d,d} & t^{3/2} \mathbf{I}_{d,d} & \mathbf{0}_{d,d} & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{d,d} & \cdots & \mathbf{0}_{d,d} & t^{(2n-1)/2} \mathbf{I}_{d,d} \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Comme dans la version cinétique (6.11), à chaque ligne de la diagonale, la matrice de covariance est homogène à celles des intégrales itérées du mouvement Brownien.

Définissons les normes Hölder adaptées à ce problème :

$$\|u\|_{L^\infty(C_{b,d}^{2+\gamma})} := \|u\|_{L^\infty} + \|D_{\mathbf{x}_1} u\|_{L^\infty} + \|D_{\mathbf{x}_1}^2 u\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^n [D_{\mathbf{x}_1}^2 u_i]_{\mathbf{d}}^\gamma + \sum_{i=2}^n [u_i]_{\mathbf{d}}^{2+\gamma},$$

où  $[u_i]_{\mathbf{d}}^{2+\gamma}$  sont les modules Hölder classiques suivant la bonne échelle associée à la variable  $\mathbf{x}_i$ . C'est-à-dire pour tout  $(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \in [0, T] \times \mathbb{R}^{(n-1)d}$ ,  $[u_i]_{\mathbf{d}}^{2+\gamma}$  est le module  $\frac{2+\gamma}{2i-1}$ -Hölder de  $\mathbf{x}_i \mapsto u(t, \mathbf{x})$ . En particulier, si  $i = 1$  alors clairement  $\frac{2+\gamma}{2i-1} > 2$ , d'où le contrôle des normes  $\|D_{\mathbf{x}_1} u\|_{L^\infty}, \|D_{\mathbf{x}_1}^2 u\|_{L^\infty}, ([D_{\mathbf{x}_1}^2 u_i]_{\mathbf{d}}^\gamma)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ .

On dit que  $u \in L^\infty(C_{b,d}^{2+\gamma})$  si  $\|u\|_{L^\infty(C_{b,d}^{2+\gamma})} < +\infty$ . On adapte ces normes à l'espace de Hölder anisotrope  $L^\infty(C_{b,d}^\gamma)$  où il n'y a pas de dérivée en  $\mathbf{x}_1$  à considérer, et à  $C_{b,d}^{2+\gamma}$  où il n'y a pas la norme uniforme en temps.

Dans ce cadre, Lunardi [Lun97] a démontré le résultat suivant : S'il existe une matrice  $\sigma_\infty$  U.E. telle que  $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \sigma(\mathbf{x}) = \sigma_\infty$ , si  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$  avec  $\mathbf{A}$  définie en (7.4), et si  $(f, g) \in L^\infty(C_{b,d}^\gamma) \times C_{b,d}^{2+\gamma}$

alors il existe une unique solution *mild* et faible  $u \in L^\infty(C_{b,d}^{2+\gamma})$  au problème de Cauchy (7.2) telle que :

$$\|u\|_{L^\infty(C_{b,d}^{2+\gamma})} \leq C(\|f\|_{L^\infty(C_{b,d}^\gamma)} + \|g\|_{C_{b,d}^{2+\gamma}}). \quad (7.6)$$

En 2009, Priola [Pri09] a généralisé ce résultat pour  $\mathbf{F}_1$  non-linéaire et  $\frac{\gamma}{2i-1}$ -Hölder en la variable  $\mathbf{x}_i$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Nous obtenons une généralisation pour une dérive totalement non-linéaire et sans la contrainte de limite sur  $\sigma$ .

**Theorem 1 (Estimées de Schauder pour la chaîne dégénérée)** *Si  $a = \sigma\sigma^*$  est U.E.,  $a \in L^\infty(C_{b,d}^\gamma)$ ,  $\mathbf{F}_1 \in L^\infty(C_{b,d}^\gamma)$ , et pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $\mathbf{F}_i \in L^\infty(C_{b,d}^{2i-3+\gamma})$  en particulier  $\mathbf{F}_i(t, \cdot, \mathbf{x}^{i:n}) \in C^{1+\frac{\gamma}{2(i-1)-1}}$ , et si  $(f, g) \in L^\infty(C_{b,d}^\gamma) \times C_{b,d}^{2+\gamma}$  alors il existe une unique solution *mild* et faible  $u \in L^\infty(C_{b,d}^{2+\gamma})$  au problème de Cauchy (7.2) telle que :*

$$\|u\|_{L^\infty(C_{b,d}^{2+\gamma})} \leq C(\|f\|_{L^\infty(C_{b,d}^\gamma)} + \|g\|_{C_{b,d}^{2+\gamma}}).$$

La démonstration dans ce cas général, reprend trait pour trait la méthode perturbative présentée dans la section précédente. La principale différence dans ce cas est qu'il faut procéder à des équilibres très fins entre les différents indices.

Comme dit précédemment, ces seuils de régularité sont également les seuils optimaux de l'unicité faible, cf. [CdRM17]. On retrouve également ces seuils en reprenant l'analyse heuristique autour de l'exemple de Peano. En effet, on considère la ligne numéro  $i$  de l'EDS (7.1) et l'on s'intéresse à la variable  $j > i$  de la dérive  $\mathbf{F}_i$ . Supposons que  $\mathbf{F}_i$  est  $\beta_i^j$ -Hölder en cette variable. On doit donc comparer au temps critique  $t_\Sigma$  l'apport du bruit à travers  $\mathbf{x}_{i-1}$ , la variable qui transmet le bruit, avec la valeur de la solution maximale associée à l'ODE (5.1) pour la variable  $\mathbf{x}_j$  en prenant en compte aussi la transmission du bruit à la variable  $j$ . Par exemple pour  $i = j$ , on a :

$$t_\Sigma^{\frac{1}{1-\beta_i^i}} < t_\Sigma^{\frac{2i-1}{2}} \Leftrightarrow 1 - \beta_i^i < \frac{2}{2i-1} \Leftrightarrow \frac{2i-3}{2i-1} < \beta_i^{i*}. \quad (7.7)$$

## 8 Unicité forte

Notre approche perturbative nous permet également de traiter le cas de l'unicité forte de l'EDS (7.1), généralisant ainsi le cas cinétique (6.1) considéré par Chaudru de Raynal [CdR17].

Rappelons que l'unicité faible correspond à l'unicité en loi, alors que l'unicité forte correspond à l'unicité de la trajectoire d'un processus adapté à la filtration du bruit considéré. En particulier l'unicité forte implique l'unicité faible.

Montrer que des équations stochastiques sont fortement bien posées est important dans plusieurs domaines de biologie et de physique :

- en neuroscience, avec les réseaux de neurones, cf. [FL16],
- en mécanique des fluides, cf. [Fla11] aussi pour une introduction générale à la régularisation par le bruit.

Pour montrer l'unicité forte dans le cas hölderien, nous avons utilisé la transformée de Zvonkin Veretennikov, cf. [Zvo74] et [Ver83], qui repose fortement sur l'étude de l'équation de Kolmogorov.

---

\*. Pour plus de détails voir [CdRM17].

En effet, si tous les coefficients  $\sigma$  et  $\mathbf{F}$  sont Lipschitz, alors l'unicité forte est évidente. Prenons deux solutions  $\mathbf{X}_t, \mathbf{X}'_t$  de l'EDS (7.1), on écrit directement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\mathbf{X}_t - \mathbf{X}'_t|^2 &= \mathbb{E}\left|\int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{X}_s) - \mathbf{F}(\mathbf{X}'_s)ds + \int_0^t \sigma(\mathbf{X}_s) - \sigma(\mathbf{X}'_s)dW_s\right|^2 \\
&\leq 2[\mathbf{F}]_1\mathbb{E}\int_0^t |\mathbf{X}_s - \mathbf{X}'_s|^2 ds + 2[\sigma]_1\int_0^t \mathbb{E}|\mathbf{X}_s - \mathbf{X}'_s|^2 ds \\
&\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} 2([\mathbf{F}]_1 t + [\sigma])\int_0^t \mathbb{E}|\mathbf{X}_s - \mathbf{X}'_s|^2 ds.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Par l'inégalité de Grönwall on a directement que  $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 0} = (\mathbf{X}'_t)_{t \geq 0}$  presque sûrement. L'unicité trajectorielle est ainsi montrée, et le théorème de Yamada Watanabe [YW71] nous permet de conclure grâce à l'existence faible, cf. [CdRM17].

Le cadre hölderien est nettement plus difficile à traiter.

**Theorem 2 (Unicité forte pour la chaîne dégénérée et dérive Hölder)** *Si pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $[(\mathbf{F}_i)_j]_{\beta_j}^\dagger < \infty$  avec  $\beta_j \in (\frac{2j-2}{2j-1}, 1]$  et pour  $i \geq 2$ ,  $[(D_{\mathbf{x}_{i-1}}\mathbf{F}_i)]_\eta < \infty$ ,  $\eta > 0$  «petit», et  $\sigma$  Lipschitz alors il existe une unique solution forte à l'EDS (7.1).*

Notons que les seuils de régularité de la dérive sont plus forts par rapport au Théorème 1 et à l'unicité faible. Ils sont optimaux pour notre méthode, mais nous ne savons pas *a priori* s'il existe de contre-exemple : s'il existe une EDS avec une dérive  $\mathbf{F}$  plus régulière que dans le Théorème 1 mais moins que dans le Théorème 2 et où l'unicité forte de la solution n'est pas vérifiée.

Une chose qui nous conforte dans l'idée que ces seuils sont optimaux est que Catelier et Gubinelli [CG16] retrouvent les mêmes seuils, dans le cas d'un bruit d'un indice d'auto-similarité correspondant aux intégrales itérées du Brownien fractionnaire.

### Idée de la preuve

Comme dans le cas Lipschitz, on montre l'unicité trajectorielle et on utilise le théorème de Yamada Watanabe et l'existence faible pour montrer l'unicité forte.

Premièrement, comme l'analyse pour les estimées de Schauder, on régularise tous les coefficients de l'EDS (7.1) afin de s'assurer de l'existence et de l'unicité de chaque objet que l'on manipule. On omettra encore une fois l'indice de régularisation. Puis, on considère le problème de Cauchy associé à (7.1) :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, \mathbf{x}) + \langle \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \mathbf{D}u(t, \mathbf{x}) \rangle + \frac{1}{2}\text{Tr}(D_{\mathbf{x}_1}^2 u(t, \mathbf{x})a(t, \mathbf{x})) = -\mathbf{F}(t, \mathbf{x}), & t \in [0, T], \\ u(T, \mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in \mathbb{R}^{nd}. \end{cases} \tag{8.2}$$

Grâce à la formule d'Itô et à (8.2), on écrit :

$$\int_0^t \mathbf{F}(s, \mathbf{X}_s)ds = -u(0, \mathbf{x}) + u(t, \mathbf{X}_t) - \int_0^t \mathbf{D}u(s, \mathbf{X}_s)B\sigma(s, \mathbf{X}_s)dW_s. \tag{8.3}$$

L'idée de la transformée de Zvonkin Veretennikov est de bénéficier du «bootstrap parabolique» pour la solution  $u$  de l'équation de Kolmogorov (8.2) afin de montrer qu'en quelque sorte le terme de

---

†. Cela correspond au module d'Hölder de  $\mathbf{F}_i$  en la variable  $\mathbf{x}_j$ .

droite de (8.3) est plus régulier que la dérive dans le terme de gauche. Ce phénomène est aussi lié à la moyennisation de processus Brownien, cf. [Dav07], [CG16].

L'idée dans (8.3) est de permettre d'écrire la dynamique de  $\mathbf{X}_t$  sans la dérive. En effet, on écrit d'abord :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s \leq t} |\mathbf{X}_s - \mathbf{X}'_s|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{s \leq t} |\{\mathbf{X}_s - u(s, \mathbf{X}_s)\} + u(\mathbf{X}_s) - s(\mathbf{X}'_s)\} + u(\mathbf{X}'_s) - \mathbf{X}'_s|^2\right]. \quad (8.4)$$

Le premier et le dernier terme de droite se traitent grâce à (8.3), c'est-à-dire

$$\mathbf{X}_s - u(s, \mathbf{X}_s) = \int_0^s \sigma(v, \mathbf{X}_v) dW_v - u(0, \mathbf{x}) - \int_0^s D_{\mathbf{x}_1} u(v, \mathbf{X}_v) \sigma(v, \mathbf{X}_v) dW_v. \quad (8.5)$$

La deuxième contribution de droite dans (8.4) se traite grâce à la régularité de la fonction  $u$ . Le cœur de l'analyse consiste à montrer qu'il existe une constante  $C_T > 0$  telle que  $\lim_{T \rightarrow 0} C_T \rightarrow 0$  et

$$\|\mathbf{D}u\|_\infty + \|\mathbf{D}(D_{\mathbf{x}_1} u)\|_\infty \leq C_T, \quad (8.6)$$

où  $\mathbf{D}$  est le gradient complet. On a besoin du contrôle de la dérivée croisée  $\mathbf{D}(D_1 u)$  à cause du dernier terme qui apparaît dans (8.5). Pour montrer ce contrôle de dérivées, on adapte la méthode perturbative (cf Section 6) à ce cadre, sauf que maintenant, il nous faut contrôler sur le gradient complet et les dérivées croisées de  $u$ . Comme la source dans l'équation de Kolmogorov est la dérive  $\mathbf{F}$ , de nouvelles contraintes sur la régularité de  $\mathbf{F}$  sont nécessaires.

Une fois l'identité (8.6) en main, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |\mathbf{X}_s - \mathbf{X}'_s|^2\right] \leq C_T \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |\mathbf{X}_s - \mathbf{X}'_s|^2\right].$$

On conclut quant à l'unicité forte dans l'intervalle  $[0, T]$ , pour  $T$  suffisamment «petit», par un argument circulaire. On itère le raisonnement pour pouvoir considérer un temps final  $T$  fini quelconque.  $\square$

Pour conclure ce résumé de la seconde partie de ma thèse, je pense que ce phénomène profond de régularisation par le bruit reste un sujet très riche. Il reste encore beaucoup de choses à comprendre sur l'interprétation des seuils notamment pour l'unicité forte. Mais aussi pour le cas faible, même non-dégénéré, l'exemple de Peano, nous dit que la régularité minimale de  $\mathbf{F}_1$  devrait être  $C^{-1} = B_{\infty, \infty}^{-1}$ . Il semblerait qu'avec une approche de type chemins rugueux, nous soyons contraints à une dérive  $\mathbf{F}_1 \in B_{\infty, \infty}^{-1+\gamma}$  avec  $\gamma > 1/3$ , cf. [DD16] et [CC18]. Concernant, l'unicité forte, Bass et Chen [BC01] (voir aussi [Bar82]) ont déjà trouvé un contre-exemple pour  $\gamma < 1/2$ . Ces questions de régularité minimal dans des espaces Besov et Triebel–Lizorkin sont des sujets sur lesquels je compte continuer à travailler.

## Références

- [Azu67] K. Azuma. Weighted sums of certain dependent random variables. *Tohoku Math. J. (2)*, 19(3) :357–367, 1967.
- [Bar82] M. T. Barlow. One-dimensional stochastic differential equations with no strong solution. *J. London Math. Soc. (2)*, 26(2) :335–347, 1982.



- [BC01] R. F. Bass and Z.-Q. Chen. Stochastic differential equations for Dirichlet processes. *Probab. Theory Related Fields*, 121(3) :422–446, 2001.
- [Bha82] R. N. Bhattacharya. On the functional central limit theorem and the law of the iterated logarithm for Markov processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 60(2) :185–201, 1982.
- [BHW97] G.K. Basak, I. Hu, and C.-Z. Wei. Weak convergence of recursions. *Stochastic Processes and their Applications*, 68(1) :65 – 82, 1997.
- [CC18] G. Cannizzaro and K. Chouk. Multidimensional SDEs with singular drift and universal construction of the polymer measure with white noise potential. *Ann. Probab.*, 46(3) :1710–1763, 2018.
- [CdR17] P.-E. Chaudru de Raynal. Strong existence and uniqueness for degenerate SDE with Hölder drift. *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 53(1) :259–286, February 2017.
- [CDRHM18a] P.-E. Chaudru De Raynal, I. Honoré, and S. Menozzi. Sharp Schauder Estimates for some Degenerate Kolmogorov Equations. working paper or preprint, October 2018.
- [CDRHM18b] P.-E. Chaudru De Raynal, I. Honoré, and S. Menozzi. Strong regularization by Brownian noise propagating through a weak Hörmander structure. working paper or preprint, October 2018.
- [CdRM17] P-E. Chaudru de Raynal and S. Menozzi. Regularization effects of a noise propagating through a chain of differential equations : an almost sharp result. October 2017. to appear in trans. american math. society.
- [CdRMP19] P.-É. Chaudru de Raynal, S. Menozzi, and E. Priola. Schauder estimates for drifted fractional operators in the supercritical case. working paper or preprint, February 2019.
- [CG16] R. Catellier and M. Gubinelli. Averaging along irregular curves and regularisation of ODEs. *Stoch. Proc and Appl.*, 126–8 :2323–2366, 2016.
- [Dav07] A. M. Davie. Uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (24) :Art. ID rnm124, 26, 2007.
- [DD16] F. Delarue and R. Diel. Rough paths and 1d SDE with a time dependent distributional drift : application to polymers. *Probab. Theory Related Fields*, 165(1-2) :1–63, 2016.
- [DF14] F. Delarue and F. Flandoli. The transition point in the zero noise limit for a 1d Peano example. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 34(10) :4071–4083, April 2014.
- [DM10] F. Delarue and S. Menozzi. Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations. *Journal of Functional Analysis*, 259–6 :1577–1630, 2010.
- [EH00] J.-P. Eckmann and M. Hairer. Non-equilibrium statistical mechanics of strongly anharmonic chains of oscillators. *Communications in Mathematical Physics*, 212(1) :105–164, Jun 2000.
- [FL16] N. Fournier and E. Löcherbach. On a toy model of interacting neurons. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 52(4) :1844–1876, 2016.
- [Fla11] F. Flandoli. *Random perturbation of PDEs and fluid dynamic models*, volume 2015 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011. Lectures from the 40th Probability Summer School held in Saint-Flour, 2010.
- [FM14] O. Faugeras and J. Maclaurin. Asymptotic description of stochastic neural networks. i. existence of a large deviation principle. *Comptes Rendus Mathématique*, 352(10) :841 – 846, 2014.
- [Fri64] A. Friedman. *Partial differential equations of parabolic type*. Prentice-Hall, 1964.

- [GHL18] A. Gloter, I. Honoré, and D. Loukianova. Non-asymptotic concentration inequality for an approximation of the invariant distribution of a diffusion driven by compound poisson process. working paper or preprint, October 2018.
- [HM06] M. Hairer and J. C. Mattingly. Ergodicity of the 2D Navier-Stokes equations with degenerate stochastic forcing. *Ann. of Math. (2)*, 164(3) :993–1032, 2006.
- [HMP19] I. Honoré, S. Menozzi, and G. Pagès. Non-Asymptotic Gaussian Estimates for the Recursive Approximation of the Invariant Measure of a Diffusion. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 2019. To appear.
- [Hon19] I. Honoré. Sharp non-asymptotic Concentration Inequalities for the Approximation of the Invariant Measure of a Diffusion. *Stochastic Processes and their Applications*, 2019. Accepted for publication.
- [Hör67] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential operators. *Acta. Math.*, 119 :147–171, 1967.
- [IKO62] A. M. Il'in, A. S. Kalashnikov, and O. A. Oleinik. Second-order linear equations of parabolic type. *Uspehi Mat. Nauk*, 17–3(105) :3–146, 1962.
- [KMM10] V. Konakov, S. Menozzi, and S. Molchanov. Explicit parametrix and local limit theorems for some degenerate diffusion processes. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Série B*, 46–4 :908–923, 2010.
- [KP10] N. V. Krylov and E. Priola. Elliptic and parabolic second-order PDEs with growing coefficients. *Comm. Partial Differential Equations*, 35(1) :1–22, 2010.
- [KP17] N. V. Krylov and E. Priola. Poisson stochastic process and basic Schauder and Sobolev estimates in the theory of parabolic equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 225(3) :1089–1126, 2017.
- [Kun97] H. Kunita. *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1997.
- [LP02] D. Lamberton and G. Pagès. Recursive computation of the invariant distribution of a diffusion. *Bernoulli*, 8–3 :367–405, 2002.
- [LR02] P.-G. Lemarie-Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*. CRC Press, 2002.
- [LRS10] T. Lelièvre, M. Rousset, and G Stoltz. *Free Energy Computations : A Mathematical Perspective*. 01 2010.
- [Lun97] A. Lunardi. Schauder estimates for a class of degenerate elliptic and parabolic operators with unbounded coefficients in  $\mathbb{R}^n$ . *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 24(1) :133–164, 1997.
- [Men11] S. Menozzi. Parametrix techniques and martingale problems for some degenerate Kolmogorov equations. *Electronic Communications in Probability*, 17 :234–250, 2011.
- [Men18] S. Menozzi. Martingale problems for some degenerate Kolmogorov equations. *Stoc. Proc. Appl.*, 128-3 :756–802, 2018.
- [MS67] H. P. McKean and I. M. Singer. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *J. Differential Geometry*, 1 :43–69, 1967.
- [Pan08a] F. Panloup. Computation of the invariant measure of a levy driven SDE : Rate of convergence. *Stochastic processes and Applications*, 118–8 :1351–1384, 2008.
- [Pan08b] F. Panloup. Recursive computation of the invariant measure of a stochastic differential equation driven by a lévy process. *Ann. Appl. Probab.*, 18(2) :379–426, 04 2008.

- [Pri09] E. Priola. Global Schauder estimates for a class of degenerate Kolmogorov equations. *Studia Math.*, 194(2) :117–153, 2009.
- [PS94] M. Piccioni and S. Scarlatti. An iterative monte carlo scheme for generating lie group-valued random variables. *Advances in Applied Probability*, 26, 09 1994.
- [Roy07] G. Royer. *An initiation to logarithmic Sobolev inequalities*, volume 14 of *SMF/AMS Texts and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 2007. Translated from the 1999 French original by Donald Babbitt.
- [Tri83] H. Triebel. *Theory of function spaces, II*. Birkhauser, 1983.
- [TT90] D. Talay and L. Tubaro. Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations. *Stoch. Anal. and App.*, 8-4 :94–120, 1990.
- [Ver83] A. Y. Veretennikov. Stochastic equations with diffusion that degenerates with respect to part of the variables. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 47(1) :189–196, 1983.
- [YW71] T. Yamada and S. Watanabe. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *J. Math. Kyoto Univ.*, 11(1) :155–167, 1971.
- [Zab08] J. Zabczyk. *Mathematical control theory*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. An introduction, Reprint of the 1995 edition.
- [Zvo74] A K Zvonkin. A transformation of the phase space of a diffusion process that removes the drift. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 22(1) :129, 1974.