Travaux Dirigés 2: Groupes

1. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 1 (Entiers modulo n)**.** Soit n un entier naturel. On note $\sim$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par $p \sim q$ si $p - q \in n\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que les classes d'équivalences de $\mathbb{Z}$ pour la relation $\sim$ sont de la forme $\overline{p} = \{p + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble des classes modulo n est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. Écrire la liste des éléments distincts de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
4. Montrer que si $x \in \overline{p}$ et $y \in \overline{q}$, alors $x + y \in \overline{p+q}$ et $xy \in \overline{pq}$.
5. Dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, calculer $\overline{8} + \overline{25}$, $\overline{7} + \overline{-3}$, $\overline{-14} + \overline{13}$ et $\overline{9} \cdot \overline{2}$.
6. Déduire de 4. qu'en posant $\overline{p} + \overline{q} = \overline{p+q}$ et $\overline{p} \cdot \overline{q} = \overline{pq}$, on définit deux lois de composition interne, addition et multiplication, sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
7. Écrire les tables d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
8. Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe. Quel est son ordre ? Montrer que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $n \cdot \overline{p} = 0$.
9. Utiliser la table de multiplication de $((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\star, \times)$ pour montrer que $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\star, \times)$ n'est en général pas un groupe.
10. Montrer que $n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe distingué de $(\mathbb{Z}, +)$.
11. Rappeler la définition d'un groupe quotient et justifier la notation $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour l'ensemble des classes d'entiers modulo n. Retrouver le fait que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe.

Exercice 2. 1. Écrire les tables des groupes $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. En déduire que ces deux groupes ne sont pas isomorphes.

2. Les groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 3 (Sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)**.** Soit le groupe $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Déterminer l'ordre des éléments $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$, $\overline{9}$.
2. Déterminer le sous-groupe H de G engendré par $\overline{6}$ et $\overline{8}$. Quel est son ordre ?
3. Quels sont les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ contenant $12\mathbb{Z}$?
4. En déduire l'ensemble des sous-groupes de G.
5. Caractériser les générateurs de G.
6. Généraliser les résultats des questions 3, 4, 5 à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec n un entier quelconque.

2. Groupes symétriques et alternés

Exercice 4. Soit S_3 le groupe des permutations de 3 éléments.

(1) Donner la liste des éléments de S_3.
(2) Etablir la table de composition pour (S_3, o).
(3) Donner les ordres des éléments de S_3.
(4) La liste des sous-groupes de (S_3, o).

(5) Centre de (S_3, o)?
(6) Mêmes questions pour (S_4, o), (S_5, o).

Exercice 5. Détreminer les centres de $(S_n, o)\,, n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 6. Soit $G = S_{60}$. Soit c un cycle de longueur 60. Montrer que les cycles de $s = c^{75}$ sont au plus de longueur 4.

Exercice 7. Soit S_7 le groupe des permutations de 7 éléments.
(1) Calculer (1 2)(1 3 5 7 2)(1 2).
(2) Quel est l'ordre maximal des éléments de S_7 ?

Exercice 8. Dans S_5, décomposer la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer son ordre et sa signature.

Exercice 9. Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles disjoints. Préciser leur ordre et leur signature

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

et

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Déterminer a^{2005}, b^{2005} et c^{2005}.

Exercice 10. On considère la permutation de S_{12} :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 1 & 10 & 9 & 11 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) Décomposer σ en produits de cycles à supports disjoints.
(2) Décomposer σ en produits de transpositions.
(3) Déterminer la parité et l'ordre de σ puis déterminer σ^{2005}.

Exercice 11. On veut montrer que $\mathfrak{A}_5$ est engendré par $\sigma_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ et $\sigma_2 = (1\ 2\ 3)$.
(1) Quels sont les ordres de σ_1 et σ_2 ?
(2) Quel est l'ordre de $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$?
(3) Conclure.