Université d'Évry Val d'Essonne 2015-2016

M54 algèbre et arithmétique 2

Feuille 2 — Sous-anneaux, sous-corps, anneaux engendrés

Exercice 1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbf{C}$, lesquels sont des sous-anneaux, voire des sous-corps ?

— L'ensemble des nombres de la forme $a \cdot 10^{-n}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$.

— L'ensemble des nombres de la forme $a + ib$ avec a et b dans $\mathbf{Z}$.

— L'ensemble des nombres de la forme $a + ib$ avec a et b dans $\mathbf{Q}$.

Exercice 2. Montrer que $\{0, 1\}$ est un sous-anneau de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, et que c'est un corps. Remarque : on voit ici qu'un anneau non intègre peut contenir un corps.

Exercice 3. Monter que $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}$ sont des sous-anneaux de $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ mais que leur union n'en est pas un.

Exercice 4. Déterminer le sous-anneau de $\mathbf{Q}$ engendré par $1/5$.

Exercice 5. On note $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ le sous-anneau de $\mathbf{C}$ engendré par $\sqrt{2}$.

1. Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \operatorname{im} \varphi$ où φ est le morphisme d'anneaux
$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbf{Z}[X] &\to \mathbf{C} \\ X &\mapsto \sqrt{2}\ , \end{aligned}$$
ce qui justifie la notation.
2. Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ \text{où } (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$. On admet que cette écriture est unique.
3. Montrer que l'application φ définie par $\varphi(a + b\sqrt{2}) = \varphi(a - b\sqrt{2})$ est un automorphisme de $Z[\sqrt{2}]$.
4. Montrer que les seuls endomorphismes de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ sont l'indentité et l'application φ ci-dessus.
5. Montrer qu'il n'y a pas de morphisme de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ vers $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$.

Exercice 6. Montrer que le seul sous-corps de $\mathbf{Q}$ est $\mathbf{Q}$. Remarque : on dit que $\mathbf{Q}$ est un corps primitif.