

Université d'Évry Val d'Essonne 2015-2016

M54 algèbre et arithmétique 2

Feuille 6 — Corps finis

Exercice 1. Donner la liste des entiers $n \leq 50$ tels qu'il existe un corps de cardinal n .

Exercice 2. Dire si les anneaux suivants sont des corps et donner leur caractéristique ainsi que leur cardinal :

1. $\mathbf{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$;
2. $\mathbf{F}_3[X]/(X^2 + X + 1)$;
3. $\mathbf{Q}[X]/(X^4 + 1)$;
4. $\mathbf{F}_3[X]/(X^4 + 1)$.

Exercice 3. 1. Donner la liste des polynômes irréductibles de degré 3 sur \mathbf{F}_2 .

2. On regarde \mathbf{F}_8 comme $\mathbf{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ et on note α la classe de X dans ce quotient. Dresser la table de multiplication de \mathbf{F}_8 .
3. Donner la liste des polynômes irréductibles de degré 2 sur \mathbf{F}_3 .
4. On regarde \mathbf{F}_9 comme $\mathbf{F}_3[X]/(X^2 + 1)$ et on note i la classe de X dans ce quotient. Dresser la table de multiplication de \mathbf{F}_9 .

Exercice 4. On considère $K = \mathbf{F}_3[X]/(X^3 - X - 1)$ et on note α l'image de X dans K .

1. Montrer que K est un corps et donner sa caractéristique, ainsi que son cardinal.
2. Quel est l'inverse de $1 + \alpha^2$ dans K^\times ?
3. Montrer que $\alpha^{12} = (1 + \alpha)^4$ et exprimer cet élément dans la base $(1, \alpha, \alpha^2)$.
4. En déduire que α est d'ordre 13 dans K^\times .
5. En déduire un générateur de K^\times .

Exercice 5. On considère $K = \mathbf{F}_5[X]/(X^2 + 2)$ et on note α la classe de X dans K .

1. Montrer que K est un corps. Donner sa caractéristique ainsi que son cardinal.
2. Quel est l'inverse de $2 + 3\alpha$ dans K^\times ?
3. Quels sont les ordres respectifs de α et $2 + \alpha$ dans K^\times ?
4. En déduire un générateur de K^\times .