Travaux Dirigés : Groupes, sous-groupes et morphismes.

Exercice 1. (*Groupe de la parabole*) On munit $\mathbb{R}^2$ de la loi :

$$(x,y)*(x^{'},y^{'})=(x+x^{'},y+y^{'}+2xx^{'}).$$

(1) Montrer que c'est une loi de groupe sur $\mathbb{R}^2$, et que la courbe d'équation $y=x^2$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$, que l'on notera P.
(2) Montrer que $x\to(x,x^2)$ est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{R}$ dans P.

Exercice 2. (*Groupe du cercle*) On munit $\mathbb{R}^2$ de la loi :

$$(x,y)*(x^{'},y^{'})=(xx^{'}-yy^{'},xy^{'}+x^{'}y).$$

(1) Montrer que c'est une loi de groupe sur $\mathbb{R}^2-\{O_2\}$, où $O_2=(0,0)$, et que la courbe d'équation $x^2+y^2=1$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2-\{O_2\}$, que l'on notera C.
(2) Montrer que$f:(x,y)\to x+iy$ est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{R}^2-\{O_2\}$ dans $\mathbb{C}^{\times}$, envoyant bijectivement C sur le sous-groupe des nombres complexes de module 1.
(3) Montrer que $\theta\to(\cos(\theta),\sin(\theta)$ est un morphisme surjectif de groupes de $\mathbb{R}$ dans C. Quel est son noyau ?

Exercice 3. Soit $(G,\star)$ un groupe abélien (on note par e l'élément neutre et par a' le symétrique de a). Soit α un élément de G différent de e. On définit une loi T en posant :

$$\forall a,b\in G,\quad a\mathsf{T}b=a\star b\star\alpha.$$

Montrer que (G,T) est un groupe abélien.

Exercice 4. **a)** Montrer que $\mathbb{R}^2$ est un groupe non abélien pour la loi $*$ définie par :

$$\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2\ ,\ (x,y)*(x',y')\ =\ (x+x',y\mathrm{e}^{x'}+y'\mathrm{e}^{-x})$$

b) Trouver les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dérivables, dont le graphe est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,*)$.

Exercice 5. Soit $(G,*)$ un groupe , H et K deux sous-groupes de G.

a) Montrer que $H\cap K$ est un sous-groupe de G.

b) Montrer que $H\cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si : $H\subset K$ ou $K\subset H$.

Exercice 6. Soit $(G,.)$ un groupe noté multiplicativement, H et K deux sous-groupes de G. On note HK l'ensemble :
$HK=\{hk,h\in H,k\in K\}$.

a) Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK=KH$.

b) On suppose ici G fini. Montrer que : $card(HK)=\dfrac{card(H).card(K)}{card(H\cap K)}$.

Exercice 7. Déterminer les sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

Exercice 8. Soit G un groupe fini. Montrer que pour tous a et b du groupe G on a :

(1) a et a^{-1} ont même ordre ;
(2) a et bab^{-1} ont même ordre ;
(3) ab et ba ont même ordre.

Exercice 9. On note H l'ensemble $\mathbb{Z}^3$ muni de l'opération $(u,v,w)\star(x,y,z) = (u+x, v+y, w-xv+z)$. On note G l'ensemble $\mathbb{Q}^3$ muni de la même opération.

(a) Montrer que $\star$ est une loi de groupe pour G. G est-il commutatif ?
(b) Montrer que H est un sous-groupe de G. Est-il distingué ?
(c) Calculer x^n pour tous $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}$.
(d) Montrer que, pour tout $x \in G$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un seul $y \in G$ tel que $x = y^n$. Est-ce que H vérifie la même propriété ?

Remarque : un groupe G vérifiant la propriété (d) est appelé un groupe divisible. Trouver un exemple de groupe divisible commutatif.

Exercice 10. Trouver des contre-exemples pour prouver que les assertions suivantes sur un groupe G sont fausses :

(1) Si l'ordre de tout élément de G divise n, alors l'ordre de G divise n.
(2) Si G est fini et tout sous-groupe de G est cyclique, alors G est cyclique.
(3) Si G contient un sous-ensemble C vérifiant $C^2 = C$ et $1 \in C$, alors C est un sous-groupe de C.

À quelle condition sur G l'assertion 3 est-elle vraie ?

Exercice 11. (1) Montrer qu'un groupe G dont chaque élément est son propre inverse est abélien. La réciproque est-elle vraie ?
(2) Soit G un groupe. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 (a) G est abélien ;
 (b) l'application de G dans lui-même $x \to x^{-1}$ est un homomorphisme ;
 (c) l'application de G dans lui-même $x \to x^2$ est un homomorphisme.

Exercice 12.

(1) Soit G un ensemble muni d'une loi associative (notée multiplicativement) telle que
$$\forall (a,b) \in G^2, \quad \exists (x,y) \in G^2, \quad b = ax = ya.$$
Montrer que G est un groupe.
(2) Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi $\star$ associative. On suppose que tout élément de G est régulier. Montrer que $(G,\star)$ est un groupe.