TD d'Arithmétique

1 Divisibilité

Exercice 1.
Faire la liste de tous les diviseurs positifs de 12.

Exercice 2. Déterminer les entiers naturels n tels que $n \mid n+8$.

Exercice 3. Montrer par récurrence que si a est un entier impair, alors 2^{n+1} divise $a^{2^n} - 1$.

Exercice 4. Montrer que pour tout entier naturel n, $3^{3n+3} - 26n - 27$ est divisible par 169.

2 Division euclidienne

Exercice 5. Déterminer tous les entiers naturels qui, dans la division euclidienne par 3, donnent un quotient égal au double du reste.

Exercice 6. On fait la division euclidienn d'un entier n par 137 et 143. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 131 et 5. Quel est cet entier n ?

Exercice 7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2) \text{ est divisible par 3.}$$

Exercice 8. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par 24,}$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par 120.}$$

Exercice 9. Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 10. Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 11.
Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Exercice 12.

1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie $x^2 = 0 \pmod 8$ ou $x^2 = 4 \pmod 8$.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $2(ab + bc + ca)$.
4. En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que $ab + bc + ca$ non plus.

3 pgcd, ppcm, Algorithme Euclide

Exercice 13. Calculer le pgcd de 195 et 143.

Exercice 14. Montrer que deux entiers non nuls consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Exercice 15.
Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 126, 230.
2. 390, 720, 450.
3. 180, 606, 750.

Exercice 16. Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Exercice 17.
Calculer par l'algorithme d'Euclide : $\mathrm{pgcd}(18480, 9828)$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Exercice 18.
Notons $a = 1\ 111\ 111\ 111$ et $b = 123\ 456\ 789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \mathrm{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Exercice 19.
Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $1665x + 1035y = 45$.

Exercice 20. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que $m + n = 101$ et $\mathrm{pgcd}(m, n) = 3$.

Exercice 21. Soit k un entier. Montrer que $2k + 1$ et $9k + 4$ sont premiers entre eux. Quel est le pgcd de $2k - 1$ et $9k + 4$?

Exercice 22 Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer que $\mathrm{pgcd}(a + b, ab) = 1$,

Exercice 23. Décomposer 455 et 175 en produit de nombres premiers. En déduire $\mathrm{pgcd}(455, 175)$ et $\mathrm{ppcm}(455, 175)$.

Exercice 24. Deux cyclistes effectuent des tours de piste. Le premier met 3 min 18 s, le second 3 min 45 s pour chaque tour. Ils partent ensemble sur la ligne de départ. Au bout de combien de temps se retrouveront-ils à nouveau tous les deux ensemble sur cette ligne de départ ?

4 Bézout

Exercice 25. Déterminer tous les entiers x, y vérifiant :
a) $56x + 35y = 7$.
b) $56x + 35y = 10$.

Exercice 26. Virée au centre commercial avec les copains. On a dépensé en tout 188 euros, en achetant des CD à 25 euros et des jeans à 21 euros. Combien de CD a-t-on acheté ?

Exercice 27. Déterminer tous les points (x, y) du plan dont les deux coordonnées sont des entiers, qui sont sur la droite affine d'équation $y = -\frac{8}{15}x + \frac{1}{15}$.

Exercice 28. Pierre et Paul fêtent ensemble leur anniversaire. Ils invitent des copains au cinéma puis au restaurant. Tous les copains sont allés au cinéma mais certains n'ont pas pu rester pour le restaurant. Pierre a payé le cinéma (place à 7 euros) et Paul le restaurant (repas à 9 euros). Pour partager équitablement la dépense, Pierre a reversé 3 euros à Paul. Ils ont chacun dépensé moins de 100 euros. Combien y avait-il de copains au cinéma ? au restaurant ?

Exercice 29. Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces (un poussin compte pour une volaille). Combien en a-t-il acheté de chaque sorte ?

Exercice 30. Dans un pays nommé ASU, dont l'unité monétaire est le rallod, la banque nationale émet seulement des billets de 95 rallods et des pièces de 14 rallods.
a) Montrer qu'il est possible de payer n'importe quelle somme entière, à condition que les deux parties disposent chacune d'assez de pièces et de billets.
b) On suppose que vous devez payer une somme S, que vous avez une quantité illimitée de pièces et de billets, mais que votre créancier ne puisse pas rendre la monnaie. Ainsi, il est possible de payer si $S = 14$, mais pas si $S = 13$ ou si $S = 15$. Montrer qu'il est toujours possible de payer si S est assez grande. Quelle est la plus grande valeur de S telle qu'il soit impossible de payer S ?

5 Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers

Exercice 31. Soit $n \geq 2$ un entier et $N = n!$.
a) Montrer que les entiers $N + 2, N + 3, \ldots, N + n$ ne sont pas premiers.
b) Donner un exemple de 10 entiers consécutifs non premiers.

Exercice 32. Un entier naturel $n \leq 150$ n'est divisible par aucun des 6 premiers nombres premiers. Est-ce un nombre premier ?

Exercice 33. Décomposer 2008 en produit de nombres premiers.

Exercice 34.
a) Faire la liste de tous les diviseurs positifs de 256.
b) Quel est le nombre de diviseurs positifs de $2^4 \times 3^3$?

Exercice 35. Quel est le plus grand entier naturel dont le cube divise $a = 2^4 \times 3^6 \times 7$?

Exercice 36.
a) Décomposer $a = 15876$ en produit de facteurs premiers.
b) Quel est le plus petit entier naturel b tel que ab soit un cube ?

Exercice 37.
a) Déterminer les diviseurs de 25.
b) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 25$.

Exercice 38. L'effectif d'une école est compris entre 100 et 200 élèves. Si l'on range les élèves par 3, par 5 ou par 7, il reste toujours 2 élèves. Combien y a-t-il d'élèves dans cette école ?

Exercice 39. Les nombres a et b étant des éléments non nuls de $\mathbb{Z}$, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.
a) Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
b) Si 6 divise ab, alors 6 divise a ou 6 divise b.
c) Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
d) Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
e) Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.
f) Si a divise b et si b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.

Exercice 40. Par combien de zéros se termine les nombres 2006!, 2007!, 2008! ?

6 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Exercice 41.
Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a + b$ et ab.

Exercice 42.
Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a - 1) | (2^{ab} - 1)$;
2. $2^p - 1$ premier $\Rightarrow$ p premier ;
3. $\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1$.

Exercice 43.
Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^n + 1$ soit premier, montrer que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$. Que penser de la conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est premier ?

Exercice 44.
Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$ on a :

$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$

2. Montrer par récurence que :

$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

Exercice 45.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant 1$ on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 46. Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2 \ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.