Université d'Évry Val d'Essonne 2015-2016

M63 Algèbres Linéaire, Bilinéaire et Géométrie

Feuille 1 — Révisions d'algèbre linéaire

Exercice 1. 1. Dites quelles matrices sont diagonalisables parmi :

$$\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2&-2\\2&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2&-2\\2&-2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

2. Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbf{R}$ la matrice $\left(\begin{smallmatrix}-1&t\\1&3\end{smallmatrix}\right)$ est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? Pour lesquelles est-elle diagonalisable sur $\mathbf{C}$?

Exercice 2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&4&-1\\-2&2&1\end{pmatrix}$.

Pour chacune de ces matrices

1. La diagonaliser (si cela est possible).
2. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique à la base de diagonalisation choisie.
3. Vérifier la relation entre la matrice d'origine, P et la matrice diagonale trouvée.
4. *Application :* Résoudre l'équation différentielle $\frac{d}{dt}X = BX$ pour $t \in \mathbf{R}$ avec la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&8&-2\end{pmatrix}$.

1. Réduire M sur $\mathbf{C}$.
2. Calculer M^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 4. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice $M = \begin{pmatrix}2&-2&1\\3&-3&1\\-1&2&0\end{pmatrix}$.

A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, trouver son inverse, s'il existe.

Exercice 5. On considère $E = \mathbf{R}_3[X]$, muni de l'opération de dérivation $D\colon P \mapsto P'$.

1. Vérifier que D est linéaire, calculer son noyau et son image.
2. Énoncer le théorème du rang et le vérifier sur cet exemple.

3. Écrire la matrice M de D dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ (appelée *base canonique*).
4. On considère $D^2 \colon E \to E,\ P \mapsto P''$; trouver sa matrice dans la même base par deux méthodes différentes.
5. Donner *sans calculs* la valeur de M^4.

Exercice 6. Déterminer la réduite de Jordan de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 6 & 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. On considère l'application $f \colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$.

1. Justifier brièvement que f est linéaire.
2. Montrer que f est surjective et en déduire la dimension de son noyau.
3. Donner une base de $\ker f$.
4. Donner la matrice de f dans les bases canoniques.

Exercice 8. Dans $M_2(\mathbf{C})$, on considère les matrices $E_{11} = 1000$, $E_{12} = 0100$, $E_{21} = 0010$, $E_{22} = 0001$. Par ailleurs, on pose $A = 2513$ et on considère l'application $f \colon M_2(\mathbf{C}) \to M_2(\mathbf{C})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $M_2(\mathbf{C})$.
2. Montrer que f est linéaire et calculer sa matrice dans cette base.
3. Montrer que f est un automorphisme en calculant son inverse.

Exercice 9. À l'aide des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes, déterminer le rang des matrices suivantes et donner leur déterminant ainsi que leur inverse éventuel.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 & 20 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Diagonaliser la matrice suivante après avoir calculé son rang.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$