Université d'Évry Val d'Essonne 2015-2016

M63 Algèbres Linéaire, Bilinéaire et Géométrie

Feuille 2 — Réduction de Jordan, projecteurs spectraux

Exercice 1. Soit la matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les projecteurs spectraux de M.
2. En déduire M^n pour $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 2. 1. Réduire la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Donner un polynôme annulateur de A de degré 2.
3. En déduire qu'il existe des coefficients a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n$ et les calculer en fonction de n.

Exercice 3. Déterminer la décomposition de Dunford-Jordan de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Réduire à la forme normale de Jordan les matrices
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $N \in_3 (\mathbf{R})$ telle que $M = N^2$.

Exercice 6. Soit ρ l'application de $\mathbf{R}_4[X]$ dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par $(X^2 - 1)$.

1. Montrer que ρ est linéaire.
2. Montrer que $\rho^2 = \rho$. En déduire que ρ est diagonalisable.
3. Déterminer (de préférence sans calcul) une base de vecteurs propres pour ρ.