Université d'Évry Val d'Essonne 2015-2016

M63 Algèbres Linéaire, Bilinéaire et Géométrie

Feuille 3 Supplémentaire — Dual, Bidual, Transposée, Orthogonalité,

Exercice 1. Soit n entier naturel ≥ 2, $\mathcal{B} = (E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{B}^* = (E^*_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base duale de $\mathcal{B}$. Soit $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ donnée par : $\psi(A)(M) = \mathrm{tr}(AM),\ \forall A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer AE_{ij}, $E_{ij}A$ et $\psi(A)(E_{kl})$.
2. Montrer que ψ est un isomorphisme.
3. Donner la forme des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en fonction de la forme trace.
4. Montrer que pour tout hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle tel que :
$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) :\ \mathrm{tr}(AM) = 0\}.$$
5. Pour $n = 3$, soit
$$H = \left\{M = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) :\ x_{1,2} - 5x_{2,3} + \frac{1}{2}x_{3,2} - 7x_{3,3} = 0\right\}.$$
Trouver $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ tel que :
$$H = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) :\ \mathrm{tr}(AM) = 0\}.$$

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{K}[X]$, $\mathcal{B} = (X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ la base canonique de E, et $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ famille des formes linéaires sur E tel que :
$$\varphi_j(X^i) = \delta_{ij},\ \forall i, j \in \mathbb{N}.$$
On considère la forme linéaire f sur E tel que pour $P = \sum_{k=0}^{N} X^k$ on a :
$$f(P) = \sum_{k=0}^{N} a_k.$$
Supposons que $f \in \mathrm{Vect}(\varphi_n :\ n \in \mathbf{N})$, avec $f = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varphi_k$.

1. Calculer $f(X^{n+1})$.
2. En déduire que $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas une famille génératrice de E^*.
3. Soit $\theta : E \to E^{**}$ définie par :
$$\theta(P)(\varphi) = \varphi(P).$$
Montrer que $\theta \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^{**})$ et qu'elle est injective, mais non surjective.

Exercice 3. Soit $E = \mathbf{R}^4$, et soit $e_1 = (1,1,1,0)$ et $e_2 = (1,0,1,0)$, $e_3 = (1,1,0,0)$. On considère $\varphi_1 = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, \varphi_2 = -e_1^* + 2e_3^*$. Déterminer $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)^\perp$ et $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)^\perp$.

Exercice 4. Soient E, F deux K-espaces vectoriels.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f alors $F^\perp$ est stable par ${}^t f$.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors :

$$\ker({}^t f) = (\mathrm{Im} f)^\perp, \ \mathrm{Im}({}^t f) = (\ker f)^\perp, .$$

Exercice 5. Soient l'endomorphisme$f$ de $\mathbf{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et sa transposée.
2. Déterminer les sous-espaces de $\mathbf{R}^3$ stables par f.
3. Même questions pour la matrice B,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$