Université d'Évry Val d'Essonne 2015-2016

M63 Algèbres Linéaire, Bilinéaire et Géométrie

Feuille 3 — Applications linéaires, bilinéaires, et dualité

Exercice 1. On considère

$$D\colon \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_2[X],\ P \mapsto P' \text{ et } i\colon \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_3[X],\ P \mapsto \int_0^X P(t)\,dt.$$

On pose par ailleurs

$$\mathcal{B}_2 = (1, 1-X, 1-2X+X^2) \text{ et } \mathcal{B}_3 = (1, 1-X, 1-2X+X^2, 1-3X+3X^2-X^3).$$

1. Justifier brièvement que D et i sont linéaires.
2. Les applications D et i sont-elles injectives, surjectives ? Calculer $D \circ i$ et $i \circ D$; nommer les rapports entre ces deux applications.
3. Justifier brièvement que $\mathcal{B}_2$ (resp. $\mathcal{B}_3$) est une base de $\mathbf{R}_2[X]$ (resp. $\mathbf{R}_3[X]$) et écrire les matrices de D et de i dans ces bases.
4. Calculer les matrices de passages de ces bases aux bases canoniques, en déduire par les formules de changement de base les matrices de D et i dans les bases canoniques. Vérifier ce dernier résultat.

Exercice 2. Soit l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbf{R}^3$. Soit B la forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E}$ est A.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ formée par $\varepsilon_1 = (1, 0, -1)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 1)$ et $\varepsilon_3 = (1, 0, 1)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Donnez la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$.
3. Donnez la matrice de la forme bilinéaire B dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbf{R}^2$, et soit f l'application de $E \times E \to \mathbf{R}$ donnée par

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 + y_1 x_2.$$

1. Montrer que f est bilinéaire.
2. Donnez sa matrice dans la base canonique de E, puis dans la base $\mathcal{B}$ donnée par $e'_1 = (1, 1)$ et $e'_2 = (1, -1)$.

Exercice 4. Pour $P, Q \in \mathbf{R}_2[X]$, soit $\phi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$

1. Montrer que ϕ est une forme bilinéaire sur $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Donnez sa matrice dans la base $(1, X, X^2)$, puis dans $(1, X, X^2 - X - \frac{1}{6})$.

Exercice 5. Soit $E = \mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ où

$$b_1 = (-3, -2, 7),\ b_2 = (3, -1, -5),\ b_3 = (1, -3, 0)$$

Déterminer la base $\mathcal{B}^*$ duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 6. Déterminer la forme linéaire f définie sur $\mathbf{R}^3$ telle que

$$f(1,1,1) = 0 \quad f(2,0,1) = 1 \quad f(1,2,3) = 4\ .$$

Donner une base de $\ker(f)$.

Exercice 7. On note $e_1 = (1,2)$ et $e_2 = (3,4)$. Montrer que (e_1, e_2) forme une base de $\mathbf{R}^2$ et déterminer sa base duale (f_1, f_2). Sans calcul, déterminer $\ker f_1$ et $\ker f_2$.

Exercice 8. Soient f_1 et f_2 les deux formes linéaires sur $\mathbf{R}^2$ définies par

$$f_1(x,y) = x + y \quad \text{et} \quad f_2(x,y) = x - 2y$$

1. Montrer que (f_1, f_2) forme une base de $(\mathbf{R}^2)^*$ et déterminer sa base préduale.
2. On définit des formes g et h par

   $$g(x,y) = x - y \quad \text{et} \quad h(x,y) = 2x - 6y$$

   Exprimer ces formes linéaires dans la base (f_1, f_2).

Exercice 9. Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$. On définit l'application de E dans $\mathbf{R}$ donnée par $\varphi \colon P \mapsto \int_{-1}^1 P(t)dt$.

1. Montrer que $\varphi \in E^*$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'application $\mathrm{ev}_x \colon P \mapsto P(x)$ est une forme linéaire sur E.
3. Montrer que si $\mathrm{ev}_{-1}(P) = 0$, $\mathrm{ev}_0(P) = 0$ et $\mathrm{ev}_1(P) = 0$ alors $P = 0$.
4. En déduire que $(\mathrm{ev}_{-1}, \mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)$ forme une base de E^*.
5. Exprimer φ dans cette base.