TD4. Groupes, sous-groupes, morphismes et groupe symétrique

Exercice 1. *(groupe de la parabole).* On munit $\mathbb{R}^2$ de la loi $*$ donnée par

$$(x, y) * (x', y') = (x + x', y + y' + 2xx')$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe.

2. Montrer que $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, *)$.

3. Montrer que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & P \\ x & \mapsto & (x, x^2) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(P, *)$.

Exercice 2. Soit $(G, \times)$ un groupe, soient H et K des sous-groupes de G.

1. (vu en cours) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

2. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 3. Soit $(G, \cdot)$ un groupe, soient H, K des sous-groupes de G.
On note HK l'ensemble $\{hk \,/\, h \in H \text{ et } k \in K\}$.
Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 4. Pour chacune des permutations suivantes,

a. indiquer quel est son support,

b. donner l'orbite de 2,

c. décomposer la permutation en produit de cycles à supports disjoints.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 3 & 7 & 4 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 1 & 8 & 6 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Montrer qu'une puissance de cycle n'est pas toujours un cycle.

Exercice 6.

1. Donner la liste de tous les éléments de S_3.

2. Quel est le cardinal du groupe S_3 ?

3. Déterminer tous les sous-groupes de S_3.

Exercice 7. Le but de l'exercice est de déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$. Le plus petit sous-groupe possible est $\{0\}$. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que H contient au moins un entier strictement positif.

2. Soit n le plus petit entier strictement positif contenu dans H. Montrer que $n\mathbb{Z} \subset H$.

3. Soit $x \in H$. Montrer que le reste de la division euclidienne de x par n est nul. En déduire que $H \subset n\mathbb{Z}$.

4. Conclure.

Exercice 8. On considère les groupes multiplicatifs $(\mathbb{R}^*, \times), (\mathbb{R}_+^*, \times), (\mathbb{C}^*, \times)$. Les applications suivantes sont-elles des morphismes de groupes ? Le cas échéant, déterminer leur noyau. Sont-elles injectives ? Surjectives ?

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ z & \mapsto & |z| \end{array} \right.$$

Exercice 9.

1. Déterminer les ordres respectifs de $\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

2. Parmi $\bar{2}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{9}$, quel sont ceux qui sont inversibles dans l'anneau $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$? Déterminer leurs ordres dans $((\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^*, \times)$

Exercice 10. Déterminer l'ordre de chacun des éléments de S_3.

Exercice 11. Déterminer les ordres des permutations de l'exercice **4**.

Exercice 12. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes et soit $a \in G$ un élément d'ordre fini.

1. Montrer que $f(a)$ est d'ordre fini et que son ordre divise l'ordre de a.

2. Montrer que si f est isomorphisme, alors $f(a)$ a le même ordre que a.

3. Montrer que $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ ne sont pas des groupes isomorphes.

Exercice 13. Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. On rappelle que $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1. Montrer que

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{U} \times \mathbb{R}_+^* \\ z & \mapsto & \left(\dfrac{z}{|z|}, |z| \right) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de groupes.

2. Quel est l'isomorphisme réciproque ?

Exercice 14. Soit G un groupe fini. Montrer que pour tous $a, b \in G$,

1. a et a^{-1} ont le même ordre,

2. a et bab^{-1} ont le même ordre.

Exercice 15. Soit G un groupe. Soient $a, b \in G$ des éléments d'ordres finis. Notons leurs ordres respectifs p et q. Montrer que si a et b commutent et si p et q sont premiers entre eux, alors ab est d'ordre pq.

Exercice 16. Calculer la signature de chacune des permutations de l'exercice **4**.