Université d'Évry Val d'Essonne 2015-2016

M63 Algèbres Linéaire, Bilinéaire et Géométrie

Feuille 5 — Formes quadratiques

Exercice 1. On considère pour $E = \mathbf{R}^3$ l'application $f\colon E \times E \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x,y) = x_1y_1 + 3x_1y_3 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 + 5x_3y_2 + 5x_3y_3.$$

1. Montrer que l'application f est bilinéaire. Donnez sa matrice dans la base canonique de E. La forme bilinéaire f est-elle symétrique ?
2. Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique b sur E telle que $a = f - b$ soit alternée. Déterminer la matrice de b dans la base canonique.
3. Déterminer le noyau de b ainsi que son rang. Est-elle dégénérée ?
4. Déterminer une base de l'orthogonal pour b des espaces
$$F = \mathrm{Vect}((1,0,0),(1,0,1)) \text{ et } G = \mathrm{Vect}((0,1,0),(1,0,1))$$
5. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de b est diagonale ? Si oui, la déterminer.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{K}^3$ où $\mathbb{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On considère la forme sur E donnée par $B(x,y) = x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$.

1. Montrer que B est bilinéaire symétrique.
2. Donnez la matrice de la forme bilinéaire B dans la base canonique.
3. Déterminer son rang, son noyau. Existe-t-il des vecteurs isotropes pour B ?
4. Déterminer une base orthogonale $\mathcal{B}$ pour B.
5. Peut-on choisir $\mathcal{B}$ orthonormale si $\mathbb{K} = \mathbf{C}$? si $\mathbb{K} = \mathbf{R}$? Quelle est alors sa signature ?

Exercice 3. Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$, et soit f l'application de $E \times E \to \mathbf{R}$ donnée par

$$f(P,Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. Donnez sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E.
3. Déterminez son rang ; est-elle dégénérée ?
4. Déterminez le noyau de f. Quels sont les éléments isotropes de f ?

Exercice 4. On considère l'application $\varphi\colon {}_n(\mathbf{R}) \times_n (\mathbf{R}) \to \mathbf{R}, (A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique sur ${}_n(\mathbf{R})$.
2. Soit $S_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices symétriques. Montrer que la restriction de φ à $S_n(\mathbf{R})$ est définie positive.
3. Déterminer l'orthogonal de $S_n(\mathbf{R})$ pour φ.
4. Déterminer la signature de φ.