Université d'Évry Val d'Essonne 2015-2016

M63 Algèbres Linéaire, Bilinéaire et Géométrie

Feuille 5 — Formes quadratiques

Exercice 1. Soit $q\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz.$$

1. Décomposez q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.
2. Montrez que si $u \neq 0$, alors $q(u) > 0$.
3. Soit A la matrice de q dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Montrez qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $A =^t PP$.

Exercice 2. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbf{R}^3$ par

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \text{ pour tout } (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

1. Donner la matrice de q dans la base canonique.
2. Montrer que q est une forme quadratique dégénérée et trouver une base du noyau de q. Quel est son cône isotrope ?
3. Trouver une base orthogonale pour q. Quelle est sa matrice dans cette base ?

Exercice 3. Soit $a \in \mathbf{R}$, et soit q_a la forme quadratique définie sur $\mathbf{R}^3$ par

$$q_a(x) = x^2 + (1 + a)y^2 + (1 + a + a^2)z^2 + 2xy - 2ayz.$$

1. Donner la matrice A de q_a dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
2. Calculer le déterminant de A. Pour quelles valeurs de a, la forme q est-elle non-dégénérée ?
3. Réduire q et donner son rang et sa signature en fonction de a.
4. En déduire une matrice inversible P telle que $D = {}^tPAP$ soit diagonale.

Exercice 4. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbf{R}^3$ par

$$q(x) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2xz - yz.$$

1. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbf{R}^3$ tels que $q_{|F}$ soit définie positive, $q_{|G}$ soit définie négative, et $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.
2. Trouver une base d'un tel F et d'un tel G.
3. Soit b la forme bilinéaire associée à q, et soit ℓ la forme linéaire sur $\mathbf{R}^3$ définie par $\ell(x, y, z) = x + y + z$. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathbf{R}^3$ tel que $\ell(u) = b(u, v)$ pour tout $u \in \mathbf{R}^3$. Déterminer v.

Exercice 5. Soit $E = \mathbf{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{C}$ et du produit scalaire euclidien $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

1. Soit f l'endomorphisme de matrice dans $\mathcal{C}$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f, et donner la matrice H' de f dans $\mathcal{B}$.

2. Soit $\Sigma \subset E$ la surface d'équation

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3\alpha^2 \text{ dans le repère } R = (O; \mathcal{C}).$$

   Trouver une équation de Σ dans le repère $R' = (O; \mathcal{B})$.

3. En déduire la nature de l'intersection C de Σ et du plan d'équation $x_1+x_2+x_3 = 0$.