TD d'Algèbre: : Localisation

Soit A un anneau différent de (0), commutatif, unitaire.

1°) Une partie S de A est multiplicative si :

i. $1 \in S$;

ii. $a \in S, b \in S \implies ab \in S$.

a) Montrer que $A^{\times}$, le groupe des inversibles de A, est une partie multiplicative de A.

b) On appelle R l'ensemble des éléments de A, réguliers pour la multiplication. Montrer que R est une partie multiplicative de A. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur l'anneau A, pour que $A\backslash\{0\}$ soit une partie multiplicative.

c) Soit P un idéal premier de A. Montrer que $A\backslash P$ est une partie multiplicative de A.

2°) S étant une partie multiplicative de A, on définit dans $A \times S$ la relation suivante :

$$(a, s) \equiv (b, t) \iff \exists r \in S, r(ta - bs) = 0.$$

a) Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $A \times S$. On note $S^{-1}A$ l'ensemble quotient et la classe de l'élément (a, s) est notée $\frac{a}{s}$.

b) Soit $+$ et $\times$ définies ainsi sur $S^{-1}A$:

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}.$$

Montrer que ces applications sont bien définies.

c) Montrer que $(S^{-1}A, +, \times)$ est un anneau commutatif, unitaire.

d) Montrer que si $S = A\backslash\{0\}$, alos $S^{-1}A$ est un corps. On le note K_A et on l'appelle corps des fractions de A. Que vaut $K_{\mathbb{Z}}$?

e) Soit $a \in A\backslash\{0\}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et $S = \{1, a, a^2, \cdots, a^n, \cdots\}$, l'ensemble des puissances a. Montrer que S est multiplicative. Qu'est-ce que $S^{-1}A$?
Application : on prend $A = \mathbb{Z}$ et $a = 10$. Déterminer $S^{-1}A$.

f) Montrer que si $0 \in S$, $S^{-1}A$ est l'anneau nul.

Désormais, on considérera uniquement les parties multiplicatives de A ne contenant pas 0.

3°) Soit S une partie multiplicative de A ne contenant pas 0.

a) Soit $i_S : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$. Montrer que i_S est un morphisme d'anneaux.

b) Montrer que, pour tout s de S: $i_S(s)$ est inversible dans $S^{-1}A$.

c) Montrer que si $S = A^{\times}$, i_S est un isomorphisme de A sur $S^{-1}A$.

d) Montrer que si $S = R$ (ensemble des éléments réguliers pour la multiplication), i_S est injective.
En particulier, si A est intègre et si K_A est son corps des fractions, déduire que A s'injecte dans K_A.

4°) Soit S une partie multiplicative de A ne contenant pas 0. Soit B un anneau, f un morphisme d'anneau de A dans B tel que, pour tout $s \in S$, $f(s)$ est un inversible de B.
Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneau g de $S^{-1}A$ dans B tel que : $g \circ i_S = f$.

5°) Soit K un corps commutatif, A un sous-anneau de K non réduit à 0, P un idéal premier de A et $S = A\backslash P$.

a) Montrer que K_A est un sous-corps de K.

b) On pose $B = \{x \in K, \exists a \in A, \exists s \in S, x = \frac{a}{s}\}$. Montrer que B est un sous-anneau de K_A contenant A.

c) Soit I un idéal de A ; on pose $S^{-1}I = \{\frac{x}{s},\ x \in I, s \in S\}$. Montrer que $S^{-1}I$ est un idéal de B.

d) Soit J un idéal de B ; montrer que $I = J \cap A$ est un idéal de A et que l'on a $J = S^{-1}I$.

e) Montrer que $B^{\times} = B\backslash S^{-1}P$.
En déduire que $S^{-1}P$ est un idéal maximal de P et que c'est le seul idéal maximal de B.

f) Application : Soit p un nombre premier et S l'ensemble des entiers de la forme :

$$s = 1 + pu,\ u \in \mathbb{Z}.$$

i. Vérifier que S est une partie multiplicative de $\mathbb{Z}$.

ii. Soit $B = \{\frac{a}{s} \in \mathbb{Q},\ a \in \mathbb{Z},\ s \in S\}$. Justifier que B est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$, distinct de $\mathbb{Q}$. Montrer que

$$B = \left\{\frac{b}{t},\ b \in \mathbb{Z},\ t \notin p\mathbb{Z}\right\}.$$