EDP et méthodes hilbertiennes

Julia MATOS

M1 MINT
Année 2019/2020

Table des matières

1 Introduction

Ce cours d'"EDP et méthodes hilbertiennes" présente l'étude de certaines équations aux dérivées partielles, dites elliptiques.

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation qui concerne une fonction inconnue à plusieurs variables et certaines de ces dérivées partielles.

Il n'existe pas de théorie générale qui permet de résoudre toutes les équations aux dérivées partielles. Ceci est dû à la grande variété de phénomènes physiques, géométriques et probabilistiques qui peuvent être modélisés par des EDP. La recherche se focalise sur certaines EDP particulières qui sont importantes dans des applications mathématiques ou outre.

Dans ce premier chapitre, nous présentons un premier problème physique simple modélisé en thermes mathématiques. Nous introduisons aussi la notion de formulation variationnelle d'un problème aux limites.

1.1 Le problème de la chaleur stationnaire

Nous considérons le phénomène physique de propagation de la chaleur dans un corps connu : par exemple de l'eau en train de chauffer dans une casserole, le réacteur d'une centrale nucléaire, le revêtement extérieur d'une navette spaciale lors de sa redescente dans l'atmosphère.

L'objectif est de construire un modèle mathématique de ce phénomène, qui nous permettrait de connaître la température de chaque point de ce corps, et si possible en tout instant.

Le principe physique sur lequel est appuyée notre constuction est celui de la conservation de l'énergie : la variation de l'énergie thermique à l'intérieur d'un corps est égale à la somme de deux termes à savoir, d'une part, la chaleur crée par des sources thermiques à l'intérieur du corps, et, d'autre part, le flux de chaleur provenant de l'extérieur.

Il faut tout d'abord donner un cadre mathématique à ces considérations. L'espace physique est modélisé par l'espace affine $\mathbb{R}^3$ et l'axe des temps par la droite réelle $\mathbb{R}$. Si nous supposons notre corps chauffant/chauffé indéformable, nous pouvons l'assimiler à une partie Ω de $\mathbb{R}^3$. La température de chaque point x du corps Ω à un instant t donné sera notée par exemple $u(t,x)$, ce qui définit une fonction u sur l'ensemble $\mathbb{R} \times \Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Traduisons en termes mathématiques le principe de conservation de l'énergie. On considère Ω' une partie arbitraire de Ω. Représentons $e(t,x)$ l'énergie par unité de volume au point $x \in \Omega$ et à l'instant t. Nous avons :

$$e(t,x) = c\rho u(t,x),$$

où c et ρ représentent la capacité thermique et la masse volumique de notre corps, que nous supposons constantes (corps homogène). Rappelons que l'on définit la *capacité thermique* c d'un corps homogène comme l'énergie thermique produite par l'élévation d'une unité de température d'une unité de masse de ce corps. Ainsi, l'énergie $E(t,\Omega')$ de Ω' à l'instant t est :

$$E(t,\Omega') = \int_{\Omega'} e(t,x)\,dx = \int_{\Omega'} c\rho u(t,x)\,dx.$$

Le bilan énergétique de notre corps Ω', entre les instants t et $t+dt$ est :

$$E(t+dt,\Omega') - E(t,\Omega') = (S(t) + F(t))\,dt, \tag{1}$$

où $S(t)\,dt$ est la chaleur produite à l'intérieur du corps Ω' entre deux instants, et $F(t)\,dt$ la quantité de chaleur entrant dans Ω' pendant cet intervalle de temps. En d'autres termes,

$$\frac{d}{dt}E(t,\Omega') = S(t) + F(t).$$

Le premier terme $S(t)$, appelé *terme source*, peut s'écrire

$$S(t) = \int_{\Omega'} f(t,x)\,dx,$$

où $f(t,x)$ représente la quantité de chaleur produite par unité de volume et de temps au point x et à l'instant t.

Le deuxième terme $F(t)$, est le *flux de chaleur* entrant dans le corps Ω' par unité de temps. Pour l'estimer, nous modélisons la propagation de la chaleur à l'instant t en tout point x de Ω' par un vecteur $\vec{q}(t,x)$, de sorte que la quantité de chaleur traversant un élément de surface ds du bord $\partial\Omega'$ entre les instant t et $t+dt$ est égale à $-\vec{q}\cdot\vec{n}\,ds\,dt$, où $\vec{n}$ est la normale extérieure à $\partial\Omega'$. Ainsi,

$$F(t) = -\int_{\partial\Omega'} \vec{q}(s)\cdot\vec{n}(s)\,ds.$$

Finalement, le bilan énergétique (1) se traduit par l'égalité :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega'} c\rho u\,dx = \int_{\Omega'} f\,dx - \int_{\partial\Omega'} \vec{q}\cdot\vec{n}\,ds. \tag{2}$$

Nous utilisons maintenant la Formule de Green-Ostrogradski (voir aussi Appendice A.2.2).

Théorème 1.1 (Formule de Green-Ostrogradski) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\vec{F} = (F_1,\ldots,F_d)$ une fonction de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors,*

$$\int_{\Omega} div\,\vec{F}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F}(s)\cdot\vec{n}(s)\,ds.$$

où la divergence de $\vec{F}$ est définie par

$$div\,\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

et $\vec{n}(s)$ représente le vecteur unitaire normal au point $s\in\partial\Omega$ orienté vers l'extérieur (vecteur unitaire normal sortant ou normale extérieure).

Appliquant cette formule à l'intégrale de surface ci-dessus, on obtient

$$\int_{\partial\Omega'} \vec{q}\cdot\vec{n}\,ds = \int_{\Omega'} \vec{\nabla}\cdot\vec{q}\,dx.$$

En supposant que l'on a le droit d'intervertir la dérivation en temps et l'intégration sur le domaine Ω', l'équation (2) devient :

$$\int_{\Omega'} \left(\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) + \vec{\nabla}\cdot\vec{q} - f\right)\,dx = 0. \tag{3}$$

Cette intégrale doit être nulle, quelle que soit la partie Ω' de Ω considérée. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que la fonction à intégrer soit nulle sur le domaine Ω tout entier. Nous obtenons donc l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - f = 0. \tag{4}$$

La masse volumique ρ et le coefficient c sont supposés connus et indépendants du temps (corps homogène). Nous voyons que notre équation (4) fait intervenir deux inconnues : u et $\vec{q}$. Pour être en mesure de résoudre notre problème, il nous faut donc une seconde équation qui relierait ces deux inconnues, la température et le flux de chaleur à l'intérieur du corps Ω. La *loi de Fourier* énonce que le flux de chaleur est proportionnel au gradient de la température :

$$\vec{q} = -K\vec{\nabla}u. \tag{5}$$

La constante K s'appelle le *coefficient de conductivité thermique* de notre matériau. Si nous supposons le matériau homogène, K est une constante.

Nous avons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = -K\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}u = -K\Delta u.$$

Alors, l'équation (4) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u = \frac{f}{c\rho}, \tag{6}$$

où $\alpha = \frac{K}{c\rho}$. Cette équation aux dérivées partielles est *l'équation de la chaleur*.

Pour la résoudre, il faut des informations supplémentaires. D'une part, il faut connaître la température en tout point de Ω à l'instant t_0 :

$$(CI) \qquad u(t_0, x) = u_0(x), \quad \forall\, x \in \Omega,$$

la fonction u_0 étant connue. Cette condition s'appelle la *condition initiale*. Il faut d'autre part savoir ce qui se passe sur le bord du domaine Ω en tout instant $t > t_0$. Ce sont les *conditions aux limites*. Plusieur situations peuvent se présenter : on peut supposer que la température est connue sur le bord de Ω :

$$u(t, x) = g_1(t, x), \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \quad \forall\, t > t_0.$$

On parle dans ce cas d'une condition aux limites de *Dirichlet*. Il est plus réaliste d'imposer le flux de chaleur sur le bord de Ω :

$$\vec{q}(t, x) \cdot \vec{n}(x) = h(t, x), \quad \forall\, x \in \partial\Omega, \quad \forall\, t > t_0.$$

D'après la loi de Fourier, cette condition s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g_2 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$

où l'on a noté $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ la dérivée normale à la surface $\partial\Omega$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla}u \cdot \vec{n}$$

et où $g_2 = -\frac{h}{K}$. Ce dernier type de condition aux limites est dit de *Neumann*. De façon générale, on peut partager le bord $\partial\Omega$ en deux parties disjointes $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$, fixer la température sur $\partial\Omega_1$ et le flux de chaleur sur $\partial\Omega_2$. Dans ce cas, on l'appelle une condition aux limites *mixte*.

Problème de la chaleur général : déterminer la ou les fonctions u, de $[t_0, +\infty[\times\Omega$ dans $\mathbb{R}$, satisfaisant le problème aux limites :

$$
\begin{aligned}
(EDP) \qquad & \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\Delta u = \frac{f}{c\rho}, \quad \forall\, x \in \Omega, \quad \forall\, t > t_0, && (7)\\
(CI) \qquad & u(t_0, x) = u_0(x), \quad \forall\, x \in \Omega, && (8)\\
(CL1) \qquad & u(t, x) = g_1(t, x), \quad \forall\, x \in \partial\Omega_1, \quad \forall\, t > t_0, && (9)\\
(CL1) \qquad & \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t, x) = g_2(t, x), \quad \forall\, x \in \partial\Omega_2, \quad \forall\, t > t_0. && (10)
\end{aligned}
$$

Dans la suite, nous considérons un cas particulier plus simple de ce problème : *le problème stationnaire*, c'est-à-dire le problème dans lequel le terme source et les conditions aux limites ne dépendent pas du temps. Dans ce cas, il est raisonnable de penser qu'en chaque point x de Ω, la température $u(t, x)$ va, au cours du temps, évoluer vers une valeur indépendante du temps, $v(x)$. La fonction v ainsi définie sera alors une *solution stationnaire* du problème de la chaleur.

Problème de la chaleur stationnaire : déterminer la ou les fonctions v, de Ω dans $\mathbb{R}$, satisfaisant le problème aux limites :

$$
\begin{aligned}
(EDP') \qquad & -\alpha\Delta v = \frac{f}{c\rho}, \quad \forall\, x \in \Omega, && (11)\\
(CL1) \qquad & v(x) = g_1(x), \quad \forall\, x \in \partial\Omega_1, && (12)\\
(CL1) \qquad & \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x) = g_2(x), \quad \forall\, x \in \partial\Omega_2. && (13)
\end{aligned}
$$

L'équation (EDP') est l'*équation de Poisson*.

Finalement, si l'on suppose que le terme source est nul, l'équation obtenue :

$$\Delta v = 0,$$

s'appelle l'*équation de Laplace*.

Une fois modélisé notre problème physique en termes mathématiques, plus précisément sous la forme d'un problème aux dérivées partielles, il faut le résoudre. Dans notre cours, nous considérons que des problèmes stationnaires, c'est-à-dire des problèmes où la fonction u cherchée ne dépend pas du temps. Nous cherchons donc une fonction u, définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (plus généralement, $\mathbb{R}^d$), qui satisfait une équation aux dérivées partielles (EDP) et des conditions aux limites (CL). Un tel problème s'appelle un *problème aux limites*.

Si l'équation (EDP) fait intervenir les dérivées partielles d'ordre n de u, il faut donc à priori que la fonction u soit au moins de classe C^n sur Ω. Or il se trouve que la plupart du temps, aucune fonction u de classe C^n n'est solution du problème $(EDP) + (CL)$. Ceci est dû, soit à ce que le bord de Ω n'est en général pas régulier, soit à ce que le terme de droite de l'équation (le terme source) n'est pas une fonction régulière. On est donc amené à rechercher des solutions moins régulières, et en particulier à dériver des fonctions qui ne sont pas dérivables. C'est ici que les outils d'analyse fonctionnelle entreront en jeu.

Chercher la solution de notre problème ne consiste pas seulement à démontrer son existence et son unicité. Il faut être capable de la calculer. Or, la plupart du temps, la solution u de notre problème n'admettra pas d'expression simple. Il faudra donc se contenter de déterminer des valeurs approchées de u, si possible avec un degré de précision arbitrairement grand.

La résolution d'un problème physique s'effectuera selon le plan suivant :

1. Présenter un cadre mathématique rigoureux dans lequel notre problème aux limites est bien défini et admet une solution unique.
2. Calculer les valeurs approchées de cette solution.

1.2 Formulation variationnelle d'un problème aux limites

Considérons le problème de Dirichlet homogène, consistant à déterminer la ou les fonctions u définies sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^d$ (avec $d = 2$ ou 3) telles que

$$-\Delta u = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{14}$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \tag{15}$$

Nous supposons f continue sur Ω. Pour que ce problème ait un sens, il est a priori nécessaire que la fonction u soit de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$.

Supposons $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Multiplions l'ǫquation (14) par $v \in C^1_0(\overline{\Omega})$. et intégrons sur Ω. Nous obtenons :

$$-\int_\Omega \Delta uv\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$$

Rappelons que $C^1_0(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions v de classe C^1 sur $\partial\Omega$ qui s'annulent sur le bord de Ω, c'est-à-dire $v_{|\partial\Omega} = 0$.

Nous utilisons maintenant la Formule de Green qui est un corollaire simple du théorème de Green-Ostrogradski.

Théorème 1.2 (Formule de Green) *Soient $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Alors,*

$$\int_\Omega \Delta u\, v\,dx = -\int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v\,ds,$$

avec

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}.$$

Preuve. D'après la formule de Green-Ostrogradski :

$$\int_\Omega \vec{\nabla} \cdot (v\vec{\nabla} u)\,dx = \int_{\partial\Omega} (v\vec{\nabla} u) \cdot \vec{n}\,ds.$$

Ensuite, il suffit de remarquer que

$$\vec{\nabla} \cdot (v\vec{\nabla} u) = \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u + v\Delta u$$

et

$$(v\vec{\nabla}u)\cdot\vec{n} = v(\vec{\nabla}u\cdot\vec{n}) = v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}.$$

$\square$

Puisque, par hypothèse $v = 0$ sur $\partial\Omega$, le terme de bord de la formule de Green est ici nul. Nous avons alors la propriété suivante :

Si la fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ est solution du problème de Cauchy (14-15), alors elle satisfait la propriété suivante :

$$u_{|\partial\Omega} = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, v \in C_0^1(\overline{\Omega}), \quad \int_\Omega \vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v\,dx = \int_\Omega fv\,dx. \tag{16}$$

Réciproquement, supposons que $u \in C_0^2(\Omega)$ satisfait la condition (16). Alors, par la formule de Green, on a

$$\int_\Omega (\Delta u + f)v\,dx = 0$$

pour tout $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$. L'espace $C_0^1(\overline{\Omega})$ est dense dans $L^1(\Omega)$, donc cette propriété se généralise à toute fonction $v \in L^1(\Omega)$ et en particulier à $v = \Delta u + f$. Par conséquent,

$$\int_\Omega (\Delta u + f)^2\,dx = 0$$

et

$$\Delta u + f = 0.$$

Donc, u est solution (14)-(15).

En conclusion : $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *est solution de (14)-(15) si et seulement si* u *satisfait (16).*

La condition (16) est appelée la *formulation variationnelle* du problème aux limites (14)-(15). Cette condition ne fait pas référence aux dérivées d'ordre 2 de la fonction u, contrairement au problème initial.

Nous allons étudier de problèmes aux dérivées partielles par le biais de leur formulation variationnelle.

2 Espaces de Sobolev

Ce chapitre est consacré aux espaces de Sobolev, espaces fonctionnels où appartiendront les solutions des problèmes variationnels de certains problèmes aux limites.

2.1 Espace des fonctions test

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Rappelons la définition de support d'une fonction.

Définition 2.1 *Soit φ une fonction, définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Le support de φ est l'ensemble*

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Les fonctions de classe C^∞ à support compact jouent, en Analyse, plusieurs rôles distincts, également importants :

1. elles servent à localiser les fonctions, sans en dégrader les hypothèses de régularité,
2. elles servent à approcher des fonctions localement intégrables par des fonctions de classe C^∞,
3. et c'est à partir des fonctions de classe C^∞ à support compact et par un procédé de dualité que l'on étend le calcul différentiel des fonctions aux distributions, qui sont des objets plus généraux que les fonctions.

Définition 2.2 *On appelle l'espace des fonctions test et on note $\mathcal{D}(\Omega)$ (ou $C_c^\infty(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.*

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $C_c^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^k à support compact dans Ω.

Remarque 2.1 *Une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ est nulle dans un voisinage du bord de Ω. Plus précisément, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe K borné et fermé de $\mathbb{R}^d$, tel que $\varphi(x) = 0$, pour tout $x \in \Omega \setminus K$.*

Exemple 1. On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \end{cases}$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne, c'est-à-dire

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2}.$$

La fonction ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ comme composée de la fonction ρ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

et la fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto 1 - |x|^2$, toutes les deux de classe C^∞. On montre par récurrrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\rho^{(n)}$ est de la forme

$$\rho^{(n)}(x) = \begin{cases} H_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 \quad \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

où H_n est une fonction polynômiale. De plus,

$$\text{supp}(\psi) = \bar{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}.$$

Donc, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 2. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ et on suppose que $B(a,r)$ est contenue dans Ω. Alors, la fonction $\psi(x) = \rho(r^2 - d(x,a)^2)$, où $d(x,a)$ est la distance euclidienne de x à a :

$$d(x,a) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_d - a_d)^2},$$

vérifie $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Définition 2.3 (Suites régularisantes) *On appelle suite régularisante (ou approximation de l'unité) une famille $(\phi_n)_{n \geq 0}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $n \geq 1$,*

$$\phi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \text{supp}(\phi_n) \subset B(0, \frac{M}{n}), \quad \phi_n \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x)\, dx = 1,$$

où $M > 0$.

Exemple. On considère la fonction ψ de l'exemple précédent. On a $\psi \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$, $\psi > 0$ sur $B(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx > 0$. On définit une fonction ψ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\phi(x) = \frac{\psi(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\, dx}.$$

Il est clair que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp}(\phi) = \overline{B}(0,1)$, $\phi \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, dx = 1$. On pose, pour chaque $n \geq 0$,

$$\phi_n(x) = n^d \phi\,(nx)\,.$$

On vérifie facilement que $(\phi_n)_{\epsilon > 0}$ est une suite régularisante qui vérifie : $\text{supp}(\phi_n) \subset \bar{B}(0, \frac{1}{n})$, pour tout $n \geq 1$.

Rappelons que l'espace $L^2(\Omega)$ est muni de la norme définie par le produit scalaire :

$$\langle f|g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x)\, dx.$$

Par la définition du support d'une fonction, $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est dit à support compact s'il existe un compact K de $\mathbb{R}^d$ tel que $u = 0$ presque-partout hors de K.

Proposition 2.1 *Soient $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\phi \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\,dx = 1$. Le produit de convolution $\phi * u$ est défini par*

$$(\phi * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-y)u(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)u(x-y)\,dy.$$

La fonction $\phi * u$ satisfait les propriétés suivantes :

1. *$\phi * u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. En particulier, pour $1 \leq i \leq d$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:*

$$\frac{\partial(\phi * u)}{\partial x_i}(x) = (\frac{\partial \phi}{\partial x_i} * u)(x).$$

2. *$\phi * u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|\phi * u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

3. *si u est à support compact, alors $\phi * u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On a :*

$$\operatorname{supp}(\phi * u) \subset \operatorname{supp}(\phi) + \operatorname{supp}(u).$$

Preuve.

1. Soit $1 \leq i \leq d$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ fixé et $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| \leq 1$. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} |\phi(x-y+te_i) - \phi(x-y) - t\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x-y)| &= \left|\int_0^1 t\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x-y+st) - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x-y)\right)ds\right| \\ &\leq |t|\varepsilon(|t|) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(|t|) \to 0$ quand $|t| \to 0$ (puisque $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$), où $(e_1, \ldots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit K un compact assez grand tel que $x + B(0,1) - \operatorname{supp}(\phi) \subset K$. On a

$$\forall\, y \notin K, \quad \forall\, |t| \leq 1, \quad \phi(x-y+te_i) - \phi(x-y) - t\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x-y) = 0$$

et donc

$$|\phi(x-y+te_i) - \phi(x-y) - t\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x-y)| \leq |t|\varepsilon(|t|)\mathbf{1}_K(y).$$

Par conséquent,

$$\left|\phi * u(x+te_i) - \phi * u(x) - t(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} * u)(x)\right| \leq |t|\varepsilon(|t|)\int_K u(y)\,dy \leq |t|\mathrm{vol}\,(K)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

D'où : $\frac{\partial(\phi * u)}{\partial x_i}(x) = (\frac{\partial \phi}{\partial x_i} * u)(x)$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-y)u(y)\,dy\right|^2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-y)\,dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-y)u^2(y)\,dy\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-y)u^2(y)\,dy, \end{aligned}$$

puisque $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)\,dy = 1$. On en déduit, par intégration selon la variable x, que

$$\|\phi * u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-y)u^2(y)\,dy\,dx = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x \notin \text{supp}(\phi) + \text{supp}(u)$. Alors, pour tout $y \in \text{supp}(u)$, $x - y \notin \text{supp}(\phi)$ (cas contraire, on aurait $x = (x-y) + y \in \text{supp}(\phi) + \text{supp}(u)$) et donc $\phi(x-y) = 0$. On en déduit que $\phi(x-y)u(y) = 0$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$ et donc $\phi * u(x) = 0$. □

Théorème 2.1 *L'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\phi \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\, dx = 1$. On pose, pour chaque $n \geq 0$, $\phi_n(x) = n^d \phi(nx)$.

1. Cas particulier : $u \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Par la proposition 2.1, $\phi_n * u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. La fonction ϕ est à support compact alors, il existe $M > 0$ tel que $\text{supp}(\phi) \subset B(0, M)$. Pour chaque $n \geq 1$, $\text{supp}(\phi_n) \subset B(0, \frac{M}{n})$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$(\phi_n * u - u)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x-y)(u(y) - u(x))\, dy = \int_{|x-y| \leq M/n} \phi(x-y)(u(y) - u(x))\, dy.$$

La fonction u est continue à support compact, alors elle est uniformément continue. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$\forall\, (y, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad |y - z| \leq \frac{M}{N} \Longrightarrow |u(y) - u(z)| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \geq N$,

$$|(\phi_n * u - u)(x)| \leq \varepsilon \int_{|x-y| \leq M/n} \phi(x-y)\, dy \leq \varepsilon.$$

De plus, si l'on note K le support (compact) de u et $K' = K + \bar{B}(0, M)$, pour tout $n \geq N$,

$$\|\phi_n * u - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \int_{K \cup K'} |(\phi_n * u - u)(x)|^2\, dx \leq \varepsilon^2 \text{vol}(K \cup K').$$

D'où,

$$\|\phi_n * u - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

2. Cas général : $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. L'espace $C_c(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact dans $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $v_n \in C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|u - v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}$. D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$\lim_{k \to +\infty} \|\phi_k * v_n - v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

et alors, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\phi_{k_n} * v_n - v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2n}.$$

Donc,

$$\|\phi_{k_n} * v_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\phi_{k_n} * v_n - v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|v_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{n}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $u_n = \phi_{k_n} * v_n$, est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et converge vers u dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. □

Remarque 2.2 Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On peut montrer que $\phi_n * u$ converge vers u dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, où $\phi_n(x) = n^d \phi(nx)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par la densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe $v \in C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Donc,

$$\begin{aligned} \|\phi_n * u - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\phi_n * (u-v)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\phi_n * v - v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|v - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2\|u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\phi_n * v - v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Par le point 1 de la preuve précédente, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|\phi_n * v - v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$\|\phi_n * u - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.$$

Théorème 2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Alors, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Preuve. Soient $u \in L^2(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. L'ensemble $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. Alors, il existe $v \in C_c(\Omega)$ tel que $\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon/2$. Notons $\tilde{v}$ le prolongement par 0 de v sur $\mathbb{R} \setminus \Omega$. Alors $\tilde{v} \in L^2(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} \|u - (\phi_n * \tilde{v})_{|\Omega}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u - v\|_{L^2(\Omega)} + \|v - (\phi_n * \tilde{v})_{|\Omega}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\tilde{v} - (\phi_n * \tilde{v})\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Puisque $\phi_n * \tilde{v}$ tend vers $\tilde{v}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\|\tilde{v} - (\phi_n * \tilde{v})\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour tout $n \geq N$,

$$\|u - (\phi_n * \tilde{v})_{|\Omega}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon.$$

Il reste à vérifier que $(\phi_n * \tilde{v})_{|\Omega} \in \mathcal{D}(\Omega)$ pour n suffisamment grand.

Puisque $v \in C_c(\Omega)$, $K = \text{supp}(v)$ est un compact contenu dans Ω. Soit $\alpha = d(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) > 0$ et $M > 0$ tel que $\text{supp}(\phi) \subset B(0, M)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq \frac{M}{\alpha}$ ($\iff$ $\frac{M}{n} \leq \alpha$) on a

$$\text{supp}(\phi_n * \tilde{v}) \subset K + B(0, \frac{M}{n}) \subset K + B(0, \alpha) \subset \Omega.$$

Comme $\phi_n * \tilde{v} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (par la proposition 2.1), on en déduit que $(\phi_n * \tilde{v})_{|\Omega} \in \mathcal{D}(\Omega)$. □

2.2 Dérivées généralisées. Espaces de Sobolev

Nous aurons besoin d'un corollaire du théorème de Green-Ostrogradski.

Proposition 2.2 *Soient $\vec{F}$ de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et g de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$. Alors,*

$$\int_\Omega g(x) div\, \vec{F}(x)\, dx = -\int_\Omega \vec{F}(x) \cdot \vec{\nabla} g(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} g(s) \vec{F}(s) \cdot \vec{n}(s)\, ds.$$

En particulier, si f de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) g(x)\, dx = -\int_\Omega f(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} f(s) g(s) n_j(s)\, ds,$$

où $n_j(s)$ est la j-ième coordonnée de $\vec{n}(s)$.

Preuve. D'après la Formule de Green-Ostrogradski, on a

$$\int_\Omega div\,(g(x)\vec{F}(x))\,dx = \int_{\partial\Omega} g(s)\vec{F}(s)\cdot\vec{n}(s)\,ds.$$

Ensuite, il suffit de remarquer que

$$div\,(g(x)\vec{F}(x)) = g(x)div\,\vec{F}(x) + \vec{\nabla}g(x)\cdot\vec{F}(x).$$

□

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si g est une fonction de classe C^1 à support compact dans Ω à valeur réelles et si $1 \leq j \leq d$, alors

$$\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} g(s)n_j(s)\,ds = 0.$$

En particulier, si f est de classe C^1 sur Ω et si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\,dx.$$

Cela nous amène à définir la dérivée généralisée d'une fonction mesurable de la manière suivante.

Définition 2.4 *Une fonction $f \in L^2(\Omega)$ admet une dérivée partielle généralisée (ou dérivée faible), par rapport à x_j, dans $L^2(\Omega)$ s'il existe une fonction $g_j \in L^2(\Omega)$ telle que*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int_\Omega g_j(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\,dx$$

On note alors $g_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ la dérivée partielle généralisée de f par rapport à x_j.

Remarque 2.3 *Si elle existe, une telle fonction g_j est unique. Supposons qu'il existe $g_j, h_j \in L^2(\Omega)$ telles que*

$$\int_\Omega g_j(x)\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\,dx = \int_\Omega h_j(x)\varphi(x)\,dx.$$

Alors,

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \qquad \int_\Omega (g_j(x) - h_j(x))\varphi(x)\,dx = 0,$$

et donc, par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$. En particulier, pour $\varphi = g_j - h_j$ et donc $g_j - h_j = 0$.

Exemples.

1. Soit $\Omega =]-1,1[$ et $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $x \in \Omega$. Alors, f admet une dérivée généralisée dans $L^2(\Omega)$ et $f' = H$ fonction de Heaviside définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}.$$

2. **Formule de Leibniz :** Si $f \in L^2(\Omega)$ admet une dérivée partielle généralisée (par rapport à x_j) et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $f\varphi$ admet aussi une dérivée partielle généralisée (par rapport à x_j) et

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi + f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

Définition 2.5 *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ qui admettent des dérivées généralisées d'ordre 1 dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire*

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \forall\, 1 \leq j \leq d\}.$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle f|g\rangle_{L^2} + \sum_{j=1}^{d} \langle \frac{\partial f}{\partial x_j} | \frac{\partial g}{\partial x_j}\rangle_{L^2} = \int_\Omega fg\,dx + \sum_{j=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}\,dx$$

et de la norme associée

$$\|f\|^2_{H^1(\Omega)} = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f^2\,dx + \sum_{j=1}^{d}\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 dx.$$

On peut noter également :

$$\langle f|g\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega fg\,dx + \int_\Omega \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g\,dx$$

et

$$\|f\|^2_{H^1(\Omega)} = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\vec{\nabla} f\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f^2\,dx + \int_\Omega |\vec{\nabla} f|^2\,dx.$$

Si $x = (x_1, \ldots, x_d)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, nous notons $|x|$ sa norme euclidienne canonique :

$$|x|^2 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2.$$

Remarque 2.4 Il est clair que si $f \in C^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ et si $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$, pour tout $1 \leq j \leq d$ (ici $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)$ désigne la dérivée partielle de f au sens usuel), alors $f \in H^1(\Omega)$; de plus les dérivées partielles au sens usuel coïncident avec les dérivées partielles généralisées. En particulier si Ω est borné, alors $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

Exemple. On considère $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$ et $f(x, y) = \left(\ln \frac{2}{x^2+y^2}\right)^{1/4}$. Puisque $f \in C^\infty(\Omega)$, pour montrer que $f \in H^1(\Omega)$, il suffit de vérifier que

$$\int\int_\Omega (|f(x, y)|^2 + |\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)|^2 + |\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)|^2)\,dx\,dy < +\infty.$$

Pour cela, il sera utile d'utiliser les coordonnées polaires :

$$\Omega = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ et } 0 < r < \cos\theta\}.$$

Proposition 2.3 *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\frac{\partial f_n}{\partial x_j})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, pour tout $1 \leq j \leq d$. L'espace $L^2(\Omega)$ est complet alors, $f_n \to f$ et $\frac{\partial f_n}{\partial x_j} \to g_j$ dans $L^2(\Omega)$, pour tout $1 \leq j \leq d$. Par la définition de la dérivée partielle généralisée, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega f_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \varphi \, dx.$$

En passsant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega g_j \varphi \, dx.$$

Donc, pour tout $1 \leq j \leq d$, $\frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j$, $f \in H^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{H^1} \to 0$.

Remarque 2.5

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $H^1(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$ et $(\vec{\nabla} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite dans $(L^2(\Omega))^d$, alors $f \in H^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{H^1} \to 0$.
2. Étant donnée une fonction f définie sur Ω, on désigne $\tilde{f}$ son prolongement par 0 en dehors de Ω, c'est-à-dire

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega. \end{cases}$$

   Soient $f \in H^1(\Omega)$ et $\alpha \in C_c^1(\Omega)$. Alors,

$$\widetilde{\alpha f} \in H^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(\widetilde{\alpha f}) = \widetilde{\alpha}\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x_j}} + \widetilde{\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}}\widetilde{f}.$$

Lemme 2.1 *Soient $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Alors,*

$$\phi * f \in H^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(\phi * f) = \phi * \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq d.$$

Théorème 2.3 *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. On utilise la **convolution** (qui rend les fonctions C^∞) et la **troncature** (qui rend les fonctions à support compact).

Soit $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

(a) On choisit une suite régularisante $(\phi_n)_{n\geq 0}$. Alors, $\phi_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\phi_n * f \to f$ dans $L^2(\Omega)$.

(b) Soit $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq \rho(x) \leq 2.$$

On définit la suite de fonctions troncature

$$\rho_n(x) = \rho\left(\frac{x}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad n \geq 1.$$

On vérifie facilement, grâce au théorème de la convergence dominée, que si $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors $\rho_n g \to g$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

(c) Pour chaque $n \geq 1$, soit

$$f_n = \rho_n(\phi_n * f).$$

On a $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2 &= \|\rho_n(\phi_n * f - f) + \rho_n f - f\|_2 \\ &\leq \|\phi_n * f - f\|_2 + \|\rho_n f - f\|_2 \end{aligned}$$

et donc $\|f_n - f\|_2 \to 0$.

Par le Lemme 2.1, pour tout $1 \leq j \leq d$,

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho_n}{\partial x_j}(\phi_n * f) + \rho_n(\phi_n * \frac{\partial f}{\partial x_j}).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial f_n}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_2 &\leq \left\|\frac{\partial \rho_n}{\partial x_j}(\phi_n * f)\right\|_2 + \left\|\rho_n(\phi_n * \frac{\partial f}{\partial x_j}) - \frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{n}\left\|\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right\|_\infty \|f\|_2 + \left\|\phi_n * \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_2 + \left\|\rho_n \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_2, \end{aligned}$$

et donc $\left\|\frac{\partial f_n}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_2 \to 0$. □

Dans le cas d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, en général $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$. Nous avons le résultat de densité suivant.

Théorème 2.4 (Friedrichs) *Soit $f \in H^1(\Omega)$. Alors, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que*

1. *$f_{n|\Omega} \to f$ dans $L^2(\Omega)$,*
2. *$\vec{\nabla} f_{n|U} \to \vec{\nabla} f_{|U}$ dans $(L^2(\Omega))^d$, pour tout U ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $\overline{U} \subset \Omega$ et $\overline{U}$ est compact.*

Le résultat suivant donne une caractérisation simple des fonctions de $H^1(\Omega)$.

Proposition 2.4 *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$f \in H^1(\Omega)$.*
2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $1 \leq j \leq d$,*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left|\int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\, dx\right| \leq C\|\varphi\|_2.$$

3. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout ouvert U tel que $\overline{U} \subset \Omega$ et $\overline{U}$ est compact et tout $h \in \mathbb{R}^d$ avec $|h| < \operatorname{dist}(U, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$, on a*

$$\|\tau_h f - f\|_2 \leq C|h|,$$

où $\tau_h f(x) = f(x+h)$.

De plus, on peut prendre $C = \|\vec{\nabla} f\|_2$ dans 2. et 3.

Preuve. 1. $\Longrightarrow$ 2. est évidente.

2. $\Longrightarrow$ 1. Appliquer le théorème de Hahn-Banach et le théorème de représentation de Riesz.

1. $\Longrightarrow$ 3. On suppose que $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit $h \in \mathbb{R}^d$ et on pose

$$g(t) = f(x+th), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors, $g'(t) = h \cdot \vec{\nabla} f(x+th)$ et donc

$$f(x+h) - f(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\,dt = \int_0^1 h \cdot \vec{\nabla} f(x+th)\,dt.$$

Donc,

$$|\tau_h f(x) - f(x)|^2 \leq |h|^2 \int_0^1 |\vec{\nabla} f(x+th)|^2\,dt,$$

et

$$\begin{aligned}
\int_U |\tau_h f(x) - f(x)|^2\,dx &\leq |h|^2 \int_U \int_0^1 |\vec{\nabla} f(x+th)|^2\,dt\,dx \\
&= |h|^2 \int_0^1 \int_U |\vec{\nabla} f(x+th)|^2\,dx\,dt \\
&= |h|^2 \int_0^1 \int_{U+th} |\vec{\nabla} f(y)|^2\,dy\,dt.
\end{aligned}$$

Fixant $|h| < \operatorname{dist}(U, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$, il existe U' ouvert tel que $\overline{U'} \subset \Omega$, $\overline{U'}$ est compact et tel que $U + th \subset U'$ pour tout $t \in [0,1]$ et donc

$$\|\tau_h f - f\|_2^2 \leq |h|^2 \int_{U'} |\vec{\nabla} f(y)|^2\,dy \leq |h|^2 \|\vec{\nabla} f\|_2^2. \tag{17}$$

Si $f \in H^1(\Omega)$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$ et $\vec{\nabla} f_n \to \vec{\nabla} f$ dans $L^2(U)$, pour tout U ouvert tel que $\overline{U} \subset \Omega$ et $\overline{U}$ est compact. On applique l'inégalité (17) à f_n et, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient 3.

3. $\Longrightarrow$ 2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On considère un ouvert U tel que $\overline{U} \subset \Omega$, $\overline{U}$ est compact et $\operatorname{supp}\varphi \subset U$. Soit $h \in \mathbb{R}^d$ avec $|h| < \operatorname{dist}(U, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$. D'après 3, on a

$$\left| \int_\Omega (\tau_h f - f)\varphi\,dx \right| \leq C|h| \|\varphi\|_2.$$

D'autre part, comme

$$\int_\Omega (f(x+h) - f(x))\varphi(x))\,dx = \int_\Omega f(y)(\varphi(y-h) - \varphi(y))\,dy,$$

on obtient

$$\left|\int_\Omega f(y)\frac{\varphi(y-h)-\varphi(y)}{|h|}\,dy\right| \le C\|\varphi\|_2.$$

Choisissant $h = te_j$, $t \in \mathbb{R}$, et en passant à la limite quand $t \to 0$, on obtient 2. $\square$

On peut généraliser la définition de l'espace $H^1(\Omega)$ en considérant des dérivées partielles généralisées d'ordre $k \ge 2$.

Définition 2.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $k \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ qui admettent des dérivées partielles généralisées d'ordre inférieur ou égal à k dans $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire*

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ tel que } |\alpha| \le k,\ \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \in L^2(\Omega)\}.$$

On rappelle que pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d, \quad \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

L'espace $H^k(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle_{H^1} = \langle f|g\rangle_{L^2} + \sum_{1\le|\alpha|\le k} \langle \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} | \frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha}\rangle_{L^2},$$

et de la norme associée

$$\|f\|_{H^k} = \left(\|f\|_2^2 + \sum_{1\le|\alpha|\le k} \left\|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 2.5 *L'espace $H^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Exemple. La fonction $f(x) = \frac{x+|x|}{2}$, $x \in]-1,1[$, vérifie

$$f \in H^1(]-1,1[\quad \text{mais} \quad f \notin H^2(]-1,1[).$$

Théorème 2.6 *Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^k(\mathbb{R}^d)$.*

2.3 Opérateurs de prolongement. Fonction trace

Il est souvent commode d'établir les propriétés des fonctions $H^1(\Omega)$ en commençant par le cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$. Il est donc utile de savoir prolonger une fonction $f \in H^1(\Omega)$ en une fonction $\overline{f} \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Ceci n'est pas toujours possible. Toutefois, si l'ouvert Ω est **régulier**, on peut construire un tel prolongement.

Notations : Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On écrit,

$$x = (x', x_d) \quad \text{avec} \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad x' = (x_1, \ldots, x_{d-1}),$$

et on pose

$$|x'| = \sqrt{\sum_{k=1}^{d-1} x_k^2}.$$

On note le demi-espace $\mathbb{R}^d_+ = \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$ et

$$Q = \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| < 1, |x_d| < 1\},$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}^d_+,$$

$$Q_0 = \{(x', x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| < 1, x_d = 0\}.$$

Lemme 2.2 *Soit $f \in H^1(Q_+)$. On définit sur Q la fonction f^* prolongée de f par réflexion, c'est-à-dire*

$$f^*(x', x_d) = \begin{cases} f(x', x_d) & si \quad x_d > 0 \\ f(x', -x_d) & si \quad x_d < 0 \end{cases}$$

Alors, $f^* \in H^1(Q)$ et

$$\|f^*\|_{L^2(Q)} \leq 2\|f\|_{L^2(Q_+)}, \quad \|f^*\|_{H^1(Q)} \leq 2\|f\|_{H^1(Q_+)}.$$

Idée de la preuve. On montre que, pour tout $1 \leq j \leq d-1$,

$$\frac{\partial f^*}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^*$$

où $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^*$ désigne le prolongement par réflexion de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ et

$$\frac{\partial f^*}{\partial x_d} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\sim$$

où

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^\sim (x', x_d) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x', x_d) & \text{si} \quad x_d > 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x_j}(x', -x_d) & \text{si} \quad x_d < 0 \end{cases}$$

□

Ce résultat reste inchangé si l'on remplace Q_+ par $\mathbb{R}^d_+$.

Définition 2.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit que Ω est à bord de classe C^1 si, pour tout $x \in \Gamma = \partial\Omega$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^d$ et une application $\Phi : Q \to U$ bijective telle que*

$$\Phi \in C^1(\overline{Q}), \quad \Phi^{-1} \in C^1(\overline{U}), \quad \Phi(Q_+) = U \cap \Omega \quad et \quad \Phi(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

Théorème 2.7 *Soit Ω un ouvert borné à bord de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ ou $\Omega = \mathbb{R}^d_+$. Alors, il existe un opérateur de prolongement $P : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^d)$ linéaire tel que, pour tout $f \in H^1(\Omega)$,*

1. $Pf_{|\Omega} = f$,
2. $\|Pf\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$,
3. $\|Pf\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{H^1(\Omega)}$.

où $C > 0$ dépend uniquement de Ω.

Preuve. On rectifie Γ par cartes locales et on utilise des partitions de l'unité. $\square$

Définition 2.8 (Partitions de l'unité) *Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $U_1, \ldots, U_k$ des ouverts tels que $K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_k$. Alors, il existe des fonctions $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que*

1. *Pour tout $1 \leq j \leq k$, $0 \leq \theta_j \leq 1$ et $\operatorname{supp} \theta_j \subset U_j$,*
2. *Pour tout $x \in K$, $\sum_{j=0}^{k} \theta_j(x) = 1$.*

On note $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions $C^\infty(\overline{\Omega})$ et à support compact sur $\overline{\Omega}$.

Théorème 2.8 (Densité) *Soit Ω un ouvert borné à bord de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$. Alors, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire, pour tout $f \in H^1(\Omega)$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ telle que $f_n \to f$ dans $H^1(\Omega)$.*

Soit $f \in H^1(\Omega)$. En général, il est délicat de donner un sens précis à $f_{|\Omega}$ puisque $f \in H^1(\Omega)$ est seulement définie presque partout (or $\partial\Omega$ est négligeable) et f n'a pas de répresentant continu.

Théorème 2.9 (Trace) *Soit Ω un ouvert borné à bord de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$. Alors, l'application $j_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\partial\Omega)$ définie par $j_0(f) = f_{|\partial\Omega}$ se prolonge en une application continue $j : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$. En particulier, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in H^1(\Omega)$,*

$$\|j(f)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

De plus, l'image de $H^1(\Omega)$ par j est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. La fonction j est appelée la fonction trace.

Donc, si Ω est un ouvert borné à bord de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$, on définit

$$f_{|\partial\Omega} = j(f) \in L^2(\partial\Omega).$$

2.4 Formule de Green dans $H^1(\Omega)$

Le théorème de trace permet de généraliser la Formule de la divergence à des fonctions de $H^1(\Omega)$:

Proposition 2.5 *Soit Ω un ouvert borné à bord de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$. Si $\vec{F} \in (H^1(\Omega))^d$ et $g \in H^1(\Omega)$, alors*

$$\int_\Omega g(x) div\, \vec{F}(x)\, dx = -\int_\Omega \vec{F}(x) \cdot \vec{\nabla} g(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} g(s)\vec{F}(s) \cdot \vec{n}(s)\, ds.$$

où $\vec{n}(s)$ représente le vecteur unitaire normal sortant au point $s \in \partial\Omega$.

Remarque 2.6 Dans les intégrales de surface sur $\partial\Omega$, il faudrait écrire $j(g)$ et $j(\vec{F}) =_{\text{def}} (j(F_1), \ldots, j(F_d))$ à la place de g et $\vec{F}$. Cet abus de notation sera souvent employé.

Preuve. D'après le théorème 2.8, il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et $(\vec{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans $(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))^d$ telles que $g_n \to g$ dans $H^1(\Omega)$ et $\vec{F}_n \to \vec{F}$ dans $(H^1(\Omega))^d$. On obtient le résultat en passant à la limite dans la formule de la divergence

$$\int_\Omega g_n(x) div\,\vec{F}_n(x)\,dx = -\int_\Omega \vec{F}_n(x)\cdot\vec{\nabla}g_n(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g_n(s)\vec{F}_n(s)\cdot\vec{n}(s)\,ds.$$

La continuité de l'application trace (théorème 2.9) assure la validité du passage à la limite dans l'intégrale de surface. □

Rappelons que $H^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre 1 appartiennent à $H^1(\Omega)$. En particulier, ces dérivées partielles premières admettent une trace sur $\partial\Omega$ (si Ω est assez régulier).

Proposition 2.6 *Soit Ω un ouvert borné à bord de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$. Soient $f \in H^2(\Omega)$ et $g \in H^1(\Omega)$. Alors,*

$$\int_\Omega \Delta f(x)g(x)\,dx = -\int_\Omega \vec{\nabla}f(x)\cdot\vec{\nabla}g(x)\,dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}(s)g(s)\,ds,$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}(s) = \vec{\nabla}f(s)\cdot\vec{n}(s).$$

Preuve. Si $f \in H^2(\Omega)$ alors $\vec{\nabla}f \in (H^1(\Omega))^d$ et il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $\vec{F} = \vec{\nabla}f$. □

2.5 L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Définition 2.9 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.*

Proposition 2.7 *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.*

Remarque 2.7 Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^d)$, on a

$$H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d).$$

Par contre, si $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, alors en général $H_0^1(\Omega) \neq H^1(\Omega)$. Néanmoins, si $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $d \geq 2$, on peut montrer que $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Si Ω est assez régulier, les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont les fonctions de $H^1(\Omega)$ qui "s'annulent" sur $\partial\Omega$.

Théorème 2.10 *Soient Ω un ouvert de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ et $f \in H^1(\Omega)$. Alors, $f \in H_0^1(\Omega)$ si et seulement si $f = 0$ sur $\partial\Omega$.*

Soit Ω un ouvert de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(\Omega)$. Alors, $f \in H_0^1(\Omega)$ si et seulement si la fonction $\widetilde{f} \in H^1(\mathbb{R}^d)$, avec

$$\widetilde{f}(x) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ si } x \in \Omega \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega, \end{array} \right.$$

et dans ce cas $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} = \widetilde{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}$.

2.6 Inégalité de Poincaré

Théorème 2.11 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Alors, il existe une constante $C > 0$ (dépendant de Ω) telle que, pour tout $f \in H_0^1(\Omega)$, on a*

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_\Omega |\vec{\nabla} f(x)|^2 \, dx.$$

En particulier, $\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\vec{\nabla} f\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|f\|_{H^1(\Omega)}$.

Preuve. L'ensemble Ω est borné, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, tels que

$$\Omega \subset \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a < x_1 < b\}.$$

Si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, on peut la prolonger par 0 en dehors de Ω et considérer que $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors, on a

$$f(x) = \int_a^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_1, \ldots, x_d) \, dt$$

et donc

$$|f(x)| \leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_1, \ldots, x_d) \right|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x)|^2 \, dx &\leq (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right|^2 \, dx \\ &\leq (b-a)^2 \int_\Omega |\vec{\nabla} f(x)|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Dans le cas général de $f \in H_0^1(\Omega)$, on raisonne par densité. □

Remarque 2.8 L'inégalité de Poincaré reste valable si Ω est borné dans une seule direction, c'est-à-dire, s'il existe $1 \leq j \leq d$ et $a < b$ réels tels que

$$\Omega \subset \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a < x_j < b\}.$$

Dans ce cas, on peut prendre $C = (b-a)^2$.

Plus généralement, $C = (d(\Omega))^2$ où $d(\Omega)$ désigne le diamètre de Ω.

Si Ω est borné (ou borné dans une direction), on peut définir sur $H_0^1(\Omega)$ le produit scalaire

$$\langle f | g \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \vec{\nabla} f(x) \cdot \vec{\nabla} g(x) \, dx,$$

qui induit la norme $\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\vec{\nabla} f\|_{L^2(\Omega)}$ (norme équivalente à la norme $\|f\|_{H^1(\Omega)}$).

Remarque 2.9 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. La fonction f définie par $f(x) = 1$, pour tout $x \in \Omega$ appartient à l'espace $H^1(\Omega)$. Par un raisonnement par l'absurde, on déduit de l'inégalité de Poincaré que $f \notin H_0^1(\Omega)$. Ceci prouve que, lorsque Ω est borné, $H_0^1(\Omega)$ est strictement contenu dans $H^1(\Omega)$ (et $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$).

2.7 Théorème de Rellich

Théorème 2.12 (Théorème de Rellich) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Alors :*

1. *de toute suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H_0^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction $f \in H_0^1(\Omega)$,*
2. *si Ω est à bord de classe C^1, de toute suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers une fonction $f \in H^1(\Omega)$*

La démonstration de ce théorème fait appel au théorème de Banach-Alaoglu dans un espace de Hilbert (démonstré en général dans le cours d'analyse fonctionnelle).

Théorème 2.13 (Théorème de Banach-Alaoglu) *Soit H un espace de Hilbert. Toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H admet une sous-suite faiblement convergente.*

Autrement dit, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et un élément $x \in H$ tels que :

$$\forall\, y \in H, \quad \lim_{n\to+\infty} \langle x_{\phi(n)}|y\rangle = \langle x|y\rangle.$$

Remarque 2.10 Soit Ω est un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $H^1(\Omega)$. Alors, par le théorème de Rellich, il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f \in H^1(\Omega)$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_{\phi(n)} - f\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

De plus, on peut choisir $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie aussi :

1. $f_{\phi(n)} \to f$ presque partout sur Ω,
2. pour tout $g \in H^1(\Omega)$,

$$\langle f_{\phi(n)}|g\rangle_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0$$

et

$$\int_\Omega |\vec{\nabla} f(x)|^2\, dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\vec{\nabla} f_{\phi(n)}(x)|^2\, dx.$$

Exemples d'application :

1. Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. La fonctionnelle $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(f) = \int_\Omega \left(|\vec{\nabla} f(x)|^2 + f^4(x) - f(x) \right) dx$$

atteint son minimum sur $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire,

$$\exists\, f_0 \in H_0^1(\Omega) \ : \ J(f_0) = \inf_{f\in H_0^1(\Omega)} J(f).$$

2. Soit Ω un ouvert borné connexe à bord de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$. Soit N la semi-norme sur $H^1(\Omega)$ définie par

$$N(f) = \|f\|_{L^2(\partial\Omega)} = \sqrt{\int_{\partial\Omega} |f(s)|^2\, ds}.$$

L'application $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|f\| = \sqrt{\|\vec{\nabla} f\|^2_{L^2(\Omega)} + N^2(f)}, \quad f \in H^1(\Omega),$$

est une norme sur $H^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.
Par la continuité de la fonction trace, il existe $K>0$ tel que, pour tout $f \in H^1(\Omega)$, $N(f) \leq K\|f\|_{H^1(\Omega)}$ alors

$$\|f\| \leq (1+K)\|f\|_{H^1(\Omega)}.$$

Il suffit alors de montrer qu'il existe $C>0$ tel que

$$\forall\, f \in H^1(\Omega), \quad \|f\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|.$$

Supposons par l'absurde que le résultat n'est pas vérifié. Alors, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $H^1(\Omega)$ telle que

$$\|f_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega |\vec{\nabla} f_n(x)|^2\,dx + \int_{\partial\Omega} |f_n(s)|^2\,ds\right) = 0.$$

Par le théorème de Rellich, il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers une limite $f \in H^1(\Omega)$. On a, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{\phi(n)} - f_{\phi(m)}\|^2_{H^1(\Omega)} = \|f_{\phi(n)} - f_{\phi(m)}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\vec{\nabla} f_{\phi(n)}(x) - \vec{\nabla} f_{\phi(m)}(x)|^2\,dx.$$

Alors, $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ et donc $f_{\phi(n)}$ converge vers f dans $H^1(\Omega)$. Par la continuité de N sur $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega |\vec{\nabla} f(x)|^2\,dx + \int_{\partial\Omega} |f(s)|^2\,ds = 0.$$

Donc, f est une constante et comme $\|f\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0$, on conclut que $f=0$. Mais,

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \lim_{n\to+\infty} \|f_{\phi(n)}\|_{H^1(\Omega)} = 1,$$

d'où la contradiction. □

3 Problèmes aux limites elliptiques

3.1 Problème de Dirichlet homogène

On considère l'équation aux dérivées partielles (en abréviation EDP) du second ordre :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{18}$$

où Ω est un ouvert borné et de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ et f est une fonction donnée sur Ω.

La condition aux limites

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

s'appelle la **condition de Dirichlet** (homogène).

Une **solution classique** de (18) est une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant (18). Une **solution faible** de (18) est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx. \tag{19}$$

On dit que (19) est la **formulation faible** ou **variationnelle** de l'EDP (18).

Toute solution classique est une solution faible.

Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ qui vérifie (18). Alors, $u \in H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et donc, par le théorème 2.10, $u \in H_0^1(\Omega)$. En multipliant l'équation par $v \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta uv \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx.$$

Par la Formule de Green (corollaire A.2), généralisée au cas $f \in H^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ et Ω ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, et le fait que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient (19).

Toute solution faible assez régulière est une solution forte.

Supposons $f \in L^2(\Omega)$. Soit $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ solution de (19). Alors, par la Formule de Green,

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega), \qquad \int_\Omega (-\Delta u + u - f)\, v \, dx = 0.$$

On a $-\Delta u + u - f \in L^2(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. On conclut alors que

$$-\Delta u + u - f = 0 \quad \text{presque partout sur} \quad \Omega.$$

Par le théorème 2.10, on sait que $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Pour démontrer **l'existence et unicité** de la solution faible d'un problème aux limites elliptique, nous aurons besoin du théorème de Lax-Milgram.

3.2 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 3.1 (Théorème de Lax-Milgram) *Soit H un espace de Hilbert réel et a une forme bilinéaire sur H. Si a vérifie les hypothèses suivantes :*

1. *a est continue, c'est-à-dire il existe $C > 0$ telle que*
$$\forall\, u, v \in H, \quad a(u,v) \leq C\|u\|\|v\|.$$
2. *a est coercive, c'est-à-dire il existe $\alpha > 0$ tel que*
$$\forall\, u \in H, \quad a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2.$$

Alors, il existe $T : H \to H$ linéaire continue telle que
$$\forall\, u, v \in H, \quad a(u,v) = \langle T(u)|v\rangle.$$
De plus, T est un isomorphisme de H, c'est-à-dire T est une bijection et T^{-1} est continu.

En particulier, si $L : H \to \mathbb{R}$ est une application linéaire continue, il existe un et un seul $u \in H$ tel que
$$\forall\, v \in H, \quad a(u,v) = L(v). \tag{20}$$

Preuve. Pour tout $u \in H$ fixé, l'application $v \mapsto a(u,v)$ est une forme linéaire continue sur H, alors par le théorème de représentation de Riesz, il existe un élément de H, noté $T(u)$, tel que $a(u,v) = \langle T(u)|v\rangle$, pour tout $v \in H$. Il est clair que $T : H \to H$ est une application linéeaire et pour tout $u \in H$,
$$|\langle T(u)|v\rangle| = |a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$$
et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\|T(u)\|\|u\| \geq \langle T(u)|u\rangle = a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2.$$
Donc, pour tout $u \in H$,
$$\alpha\|u\| \leq \|T(u)\| \leq C\|u\|.$$
Ces deux inégalités entrainent que T est un isomorphisme de H sur $T(H)$ et que $T(H)$ est sous-espace complet et donc fermé de H. Il suffit de vérifier que $T(H)^\perp = \{0\}$. Si $v \in T(H)^\perp$, alors pour tout $u \in H$, $\langle T(u)|v\rangle = 0$. En particulier, pour $u = v$, on a
$$0 = \langle T(v)|v\rangle \geq \alpha\|v\|^2$$
et donc $v = 0$.

Si $L : H \to \mathbb{R}$ est une application linéaire continue, par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $w \in H$ tel que, pour tout $v \in H$,
$$L(v) = \langle w|v\rangle.$$
alors $u = T^{-1}(w)$ est l'unique élément de H tel que, pour tout $v \in H$, $a(u,v) = L(v)$.

Remarque 3.1 De plus, si a est symétrique (pour tout $u, v \in H$, $a(u,v) = a(v,u)$), alors $u \in H$ vérifiant (20) est caractérisé par la propriété :
$$u \in H, \quad \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) = \min_{v \in H}\left(\frac{1}{2}a(v,v) - L(v)\right).$$

Exemple. On applique le théorème de Lax-Milgram, avec la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx + \int_\Omega uv \, dx$$

et la forme linéaire

$$L(v) = \int_\Omega fv \, dx,$$

pour montrer l'existence et unicité de la solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème variationnel (19).

3.3 Problème de Neumann homogène

Soit Ω un ouvert borné connexe de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ et f est une fonction donnée sur Ω. On considère le problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{21}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n}$ désigne la dérivée normale extérieure de u et $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$. La condition aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

s'appelle la **condition de Neumann** (homogène).

Une **solution classique** de (21) est une fonction $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant (21). Une **solution faible** de (21) est une fonction $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant

$$\forall\, v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx. \tag{22}$$

On dit que (22) est la **formulation faible** ou **variationnelle** de l'EDP (21).

Toute solution classique est une solution faible.

Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ qui vérifie (21). Alors, $u \in H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. En multipliant l'équation par $v \in H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient

$$-\int_\Omega \Delta u v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx.$$

Par la Formule de Green et le fait que $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient (22).

Toute solution faible assez régulière est une solution forte.

Supposons $f \in L^2(\Omega)$. Soit $u \in H^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ solution de (22). Alors, par la Formule de Green,

$$\forall\, v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega (-\Delta u + u)\, v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v \, ds = \int_\Omega fv \, dx. \tag{23}$$

En particulier,

$$\forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega (-\Delta u + u - f)\, v \, dx = 0.$$

Donc,

$$-\Delta u + u - f = 0 \quad \text{presque partout sur} \quad \Omega.$$

Alors, d'après (23), on a

$$\forall\, v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} v\, ds = 0.$$

Par le Théorème 2.9, l'image de $H^1(\Omega)$ par la fonction trace j est dense dans $L^2(\partial\Omega)$ et par conséquent $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ sur $\partial\Omega$.

On applique le théorème de Lax-Milgram, avec la forme bilinéaire

$$a(u,v) = \int_\Omega \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v\, dx + \int_\Omega uv\, dx, \quad u, v \in H^1(\Omega),$$

et la forme linéaire

$$L(v) = \int_\Omega f v\, dx, \quad v \in H^1(\Omega)$$

pour conclure l'existence d'une et une seule solution $u \in H^1(\Omega)$ du problème variationnel (22).

3.4 Un problème mêlé de Dirichlet-Neumann

Dans le cas d'un problème aux limites général, nous adoptons la même démarche que dans les exemples précédents. Nous commençons par déterminer la formulation variationnelle du problème aux limites en précisant bien dans quel espace fonctionnnel on se place (par exemple : $H_0^1(\Omega)$ pour le problème de Dirichlet, $H^1(\Omega)$ pour le problème de Neumann), puis nous démonstrons l'existence et l'unicité de solution du problème variationnel grâce au théorème de Lax-Milgram. La formulation variationnelle devra toujours être écrite sous la forme :

$$\forall\, x \in H, \quad a(u,v) = L(v),$$

où H est un espace de Hilbert, L est une forme linéaire continue sur H et a est une forme bilinéaire continue et coercive sur H.

En général, le choix de a et de L sont très naturels, ils proviennent de l'application de la Formule de Green au problème aux limites initial. Le point délicat est, en général, de démontrer que a est coercive.

Soit Ω un ouvert borné connexe et de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$. On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \quad \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \end{cases} \tag{24}$$

où l'on a décomposé le bord de Ω en deux parties disjointes Γ_1 et Γ_2, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_2)$.

Soit

$$H = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

H est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(\Omega)$ et donc, H est un espace de Hilbert.

Pour $u \in H^2(\Omega)$, le problème aux limites (24) est équivalent au problème variationnel

$$\begin{cases} u \in E \\ \forall\, v \in E, \quad a(u,v) = L(v) \end{cases} \tag{25}$$

avec

$$a(u,v)=\int_\Omega \left(\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}v+uv\right)\,dx,\quad L(v)=\int_\Omega fv\,dx+\int_{\Gamma_2} gv\,ds.$$

L'opérateur de trace sur Γ_2 est continu de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\Gamma_2)$, donc L est une forme linéaire continue sur E. La continuité et la coercivité sur E de la forme bilinéaire a sont immédiates. Le théorème de Lax-Milgram s'applique et assure l'existence et unicité de la solution du problème variationnel (25).

3.5 Problème elliptique du second ordre

Soit Ω un ouvert borné connexe et de classe C^1 de $\mathbb{R}^d$. On considère des fonctions $a_{i,j}\in C^1(\bar\Omega)$, avec $1\le i,j\le d$, $b_i\in C(\bar\Omega)$, avec $1\le i\le d$ et $c_0\in C(\bar\Omega)$. On considère l'opérateur différentiel :

$$\mathcal{L}u=\sum_{1\le i,j\le d}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+\sum_{1\le i\le d} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+c_0u. \tag{26}$$

et le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u=f \quad \text{dans} \quad \Omega\\ u=0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\end{cases} \tag{27}$$

où $f\in L^2(\Omega)$.

On appelle *partie principale* de l'opérateur $\mathcal{L}$ l'opérateur différentiel

$$\mathcal{A}u=\sum_{1\le i,j\le d}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Une solution classique de (27) est une fonction $u\in C^2(\bar\Omega)$ vérifiant (27). Une solution faible de (27) est une fonction $u\in H^1_0(\Omega)$ vérifiant

$$\forall\, v\in H^1_0(\Omega),\quad a(u,v)=\int_\Omega fv\,dx. \tag{28}$$

où a est la forme bilinéaire définie par

$$a(u,v)=\sum_{1\le i,j,\le d}\int_\Omega a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,dx-\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)+c_0(x)u(x)\right)v(x)\,dx. \tag{29}$$

Sous les hypothèses sur $a_{i,j}$, b_i et c_0, a est continue sur $H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)$. En général, cette forme bilinéaire n'est pas symétrique et dans certains cas, elle est coercive . On prouve alors l'existence et l'unicité d'une solution faible de (27) par le théorème de Lax-Milgram.

Définition 3.1 *On dit que la partie principale de l'opérateur $\mathcal{L}$ défini par* (26) *est elliptique s'il existe $\alpha>0$ tel que*

$$\forall\, z=(z_1,\ldots,z_d)\in\mathbb{R}^d,\quad \forall\, x\in\bar\Omega,\qquad \left|\sum_{1\le i,j\le d} a_{i,j}(x)z_iz_j\right|\ge\alpha\sum_{i=1}^d|z_i|^2.$$

Si la partie principale de $\mathcal{L}$ est elliptique, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \sum_{1 \le i,j, \le d} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\, dx + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c_0(x) u(x) \right) u(x)\, dx \\ &\ge \alpha \int_\Omega |\vec{\nabla} u|^2\, dx - \sum_{i=1}^d \|b_i\|_\infty \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2 \|u\|_2 - \|c_0\|_\infty \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Poincaré, on conclut qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$a(u,u) \ge C_1 \|\vec{\nabla} u\|_2^2 - C_2 \|u\|_2^2.$$

S'il existe $C_0 > 0$ pour laquelle, on a

$$\forall\, u \in H_0^1(\Omega), \quad a(u,u) \ge C_0 \|\vec{\nabla} u\|_2^2$$

alors le problème de Dirichlet (27) admet une et une seule solution faible u.

Exemple. Si $b_i = 0$, pour tout $1 \le i \le d$ et $c_0 \ge 0$ sur Ω, B est coercive. Cas particulier, $a_{i,j} = 0$ si $i \ne j$, $a_{i,i} = 1$ et $b_i = 0$ pour tout $1 \le i \le d$ et $c_0 = 1$, alors $\mathcal{L}u = \Delta u + u$.

3.6 Système de Stokes stationnaire

Un exemple de problème elliptique fondamental quant à ses applications à la mécanique des fluides est le *système de Stokes*. Soit Ω un ouvert borné connexe et de classe C^1, $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) \in (L^2(\Omega))^3$ et $\mu > 0$. Le problème de Stokes stationnaire consiste à rechercher des fonctions $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et $p : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaisant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} -\mu \Delta u_i + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = f_i \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad 1 \le i \le 3 \\ \vec{\nabla} \cdot u = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{30}$$

Rappelons que

$$\operatorname{div} \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Nous allons chercher à résoudre ce problème dans l'espace :

$$H = \{\vec{u} \in (H_0^1(\Omega))^3 : \vec{\nabla} \cdot u = 0\}.$$

Cet espace est une partie fermée de $(H_0^1(\Omega))^3$ et donc, c'est un espace de Hilbert pour la norme induite par celle de $(H_0^1(\Omega))^3$. En appliquant la formule de Green, nous pouvons montrer le résultat suivant.

Proposition 3.1 *Soient $\vec{u} \in H \cap (H^2(\Omega))^3$ et $p \in L^2(\Omega)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $-\mu \Delta u_i + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = f_i$, $1 \le i \le 3$,

2. $\forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^3,\ \mu \int_\Omega \sum_{i=1}^3 \vec{\nabla} u_i \cdot \vec{\nabla} v_i \, dx - \int_\Omega p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \, dx = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx.$

La condition 2. n'est pas une formulation variationnelle et on ne peut pas appliquer le théorème de Lax-Milgram pour démontrer directement l'existence et l'unicité du couple $(\vec{u}, p) \in H \times L^2(\Omega)$. Nous allons raisonner en deux étapes. Tout d'abord, on élimine l'inconnue p : on construit un problème variationnel dont la seule inconnue est la fonction $\vec{u}$. Puis, une fois $\vec{u}$ trouvée, on cherche p.

Supposons que $(\vec{u}, p)$ vérifie la condition 2. de la proposition. Alors, pour tout $\vec{v} \in H$, on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ et donc

$$\forall \vec{v} \in H, \quad a(\vec{u}, \vec{v}) = L(\vec{v}), \tag{31}$$

avec

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \mu \int_\Omega \sum_{i=1}^3 \vec{\nabla} u_i \cdot \vec{\nabla} v_i \, dx, \quad L(\vec{v}) = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx.$$

L'inégalité de Poincaré permet de vérifier que la forme bilinéaire a est coercive dans H et donc, par le théorème de Lax-Milgram que le problème variationnel (31) admet une unique solution dans H. Supposons réciproquement que $\vec{u}$ est la solution de (31). Alors, la forme linéaire F définie sur $(H_0^1(\Omega))^3$ par

$$F(\vec{v}) = a(\vec{u}, \vec{v}) - L(\vec{v})$$

est continue et s'annule sur H (c'est-à-dire, pour toutes les fonctions $v \in (H_0^1(\Omega))^3$ de divergence nulle). Donc, $H \subset \ker F$. On peut alors démontrer qu'il existe $p \in L^2(\Omega)$, unique à une constante additive près, telle que

$$\forall v \in (H_0^1(\Omega))^3, \quad F(\vec{v}) = \int_\Omega p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \, dx.$$

Le couple $(\vec{u}, p)$ ainsi trouvé est donc solution du problème de Stokes.

Théorème 3.2 *Il existe $\vec{u} \in H$ unique et $p \in L^2(\Omega)$, unique à une constante additive près, telles que le couple $(\vec{u}, p)$ est solution du problème de Stokes* (30).

De plus, $\vec{u}$ est l'unique solution dans H du problème variationnel (31).

3.7 Régularité des solutions faibles

Définition 3.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit que Ω est de classe C^m, m entier ≥ 1, si pour tout $x \in \Gamma = \partial\Omega$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^d$ et une application $\Phi : Q \to U$ bijective telle que*

$$\Phi \in C^m(\overline{Q}), \quad \Phi^{-1} \in C^m(\overline{U}), \quad \Phi(Q_+) = U \cap \Omega \quad \text{et} \quad \Phi(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

On dit que Ω est de classe C^∞ si Ω est de classe C^m pour tout $m \geq 1$.

Les principaux résultats de régularité sont les suivants :

Théorème 3.3 (Régularité pour le problème de Dirichlet) *Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$ de classe C^2. Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel défini par* (26) *où*

1. *les coefficients $a_{i,j}$ de la partie principale sont de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ et les coefficent b_i et c_0 sont continus sur $\overline{\Omega}$,*
2. *la partie principale de $\mathcal{L}$ est elliptique.*

Si $f \in L^2(\Omega)$ et u est solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx \end{cases} \tag{32}$$

où a est la forme bilinéaire définie par (29), alors $u \in H^2(\Omega)$. Plus précisément, il existe une constante C (qui dépend de $\mathcal{A}$ et de Ω) telle que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).$$

Preuve. Par hypothèse, la partie principale de $\mathcal{L}$, notée $\mathcal{A}$, est elliptique. Alors, par l'inégalité de Poincaré et le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $z \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad A(z,v) = \sum_{1 \leq i,j, \leq d} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial z}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx.$$

De plus, il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\|z\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si u est solution de (32), alors

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad A(u,v) = \int_\Omega g(x) v(x) \, dx,$$

où

$$g(x) = -\sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - c_0(x) u(x) + f(x), \quad x \in \Omega.$$

Alors, $g \in L^2(\Omega)$ et

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).$$

Pour démontrer le résultat, on peut donc se restreindre au cas où $\mathcal{L} = \mathcal{A}$.

Supposons donc à partir de maintenant que u est solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad A(u,v) = \int_\Omega f v \, dx \end{cases}$$

L'étape suivante consiste à localiser le problème à l'aide de partitions de l'unité. L'ensemble $\overline{\Omega}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$, alors il existe des ouverts $U_0, \ldots, U_p$ tels que

- $\overline{\Omega} \subset U_0 \cup \ldots \cup U_p$,
- $\overline{U}_0 \subset \Omega$.

Alors, par la proposition 2.8, il existe des fonctions $\varphi_0, \ldots, \varphi_p \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telles que

- Pour tout $0 \leq k \leq p$, $0 \leq \varphi_k \leq 1$ et $\operatorname{supp} \varphi_k \subset U_k$,
- Pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $\sum_{k=0}^p \varphi_k(x) = 1$.

On écrit $u = \sum_{k=0}^{p} \varphi_k u$. Alors, pour $0 \le k \le p$,

$$\begin{aligned}
A(\varphi_k u, v) &= \sum_{1\le i,j\le d} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial(\varphi_k u)}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,dx \\
&= \sum_{1\le i,j\le d} \int_\Omega a_{i,j}(x)\varphi_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,dx + \sum_{1\le i,j\le d} \int_\Omega a_{i,j}(x)u(x) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,dx \\
&= \sum_{1\le i,j\le d} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial(\varphi_k v)}{\partial x_j}(x)\,dx \\
&\quad - \sum_{1\le i,j\le d} \int_\Omega a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(x) v(x)\,dx + \sum_{1\le i,j\le d} \int_\Omega a_{i,j}(x)u(x) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Donc, par la formule de Green,

$$A(\varphi_k u, v) = \int_\Omega g_k v\,dx$$

avec

$$g_k = f\varphi_k - \sum_{1\le i,j\le d} a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} - \sum_{1\le i,j\le d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{i,j} u \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right).$$

On a $g_k \in L^2(\Omega)$, $\varphi_k u \in H^1_0(\Omega)$ et de plus leur support est un compact de U_k. Dans les parties suivantes, on va vérifier que les fonctions $\varphi_k u$ appartiennent à $H^2(\Omega)$ en distinguant les cas $k = 0$ (régularité à l'intérieur) et $k \ge 1$ (régularité au bord).

Régularité à l'intérieur

Il s'agit de montrer que $\varphi_0 u \in H^2(\Omega)$. On prend $\psi_0 \in \mathcal{D}(U_0)$ qui vaut 1 au voisinage du support de φ_0 et telle que $0 \le \psi_0(x) \le 1$ sur U_0. On considère, pour $\lambda > 0$ et $l \in \{1, \ldots, d\}$, la fonction

$$w_{\lambda,l}(x) = \psi_0(x) \frac{\varphi_0(x + \lambda e_l)u(x + \lambda e_l) - \varphi_0(x)u(x)}{\lambda},$$

où e_l désigne le l-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On a $w_{\lambda,l} \in H^1_0(\Omega)$ et, pour λ assez petit,

$$\forall\, v \in H^1_0(\Omega), \quad A(w_{\lambda,l}, v) = T_{\lambda,l}(v) - S_{\lambda,l}(v)$$

avec

$$T_{\lambda,l}(v) = \int_\Omega \frac{v(x - \lambda e_l) - v(x)}{\lambda} \psi_0(x) g_0(x)\,dx$$

et

$$S_{\lambda,l}(v) = \sum_{1\le i,j\le d} \int_\Omega \frac{a_{i,j}(x - \lambda e_l)\psi_0(x - \lambda e_l) - a_{i,j}(x)\psi_0(x)}{\lambda} \frac{\partial(\varphi_0 u)}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x - \lambda e_l)\,dx.$$

Les opérateurs $T_{\lambda,l}$ et $S_{\lambda,l}$ sont des formes linéaires continues sur $H^1_0(\Omega)$. De plus, pour tout $v \in H^1_0(\Omega)$,

$$|T_{\lambda,l}(v)| \le \|g_0\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{v(x - \lambda e_l) - v(x)}{\lambda} \right\|_{L^2(\Omega)} \le \|g_0\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_l} \right\|_{L^2(\Omega)} \le \|g_0\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

et

$$|S_{\lambda,l}(v)| \leq \sum_{1\leq i,j\leq d} \left\| \frac{\partial(a_{i,j}\psi_0)}{\partial x_l} \right\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial(\varphi_0 u)}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Les estimations sont indépendants de λ, alors par le théorème de Lax-Milgram, il existe une constante $C > 0$ (qui dépend de $\|g_0\|_{L^2(\Omega)}$, $\|u\|_{H^1(\Omega)}$) telle que

$$\|w_{\lambda,l}\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

Alors, par la proposition 2.4, $\varphi_0 u \in H^2(\Omega)$.

Régularité au bord

On va montrer que $\varphi_k u \in H^2(\Omega)$, pour $k \geq 1$. Pour simplifier, on peut supposer que

$$U_k \cap \Omega = \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d : \|x'\| < r_k \ \text{ et } \ \theta_k(x') < x_d < b_k\}$$

et

$$U_k \cap \overline{\Omega} = \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d : \|x'\| < r_k \ \text{ et } \ \theta_k(x') \leq x_d < b_k\},$$

où θ_k est une application de classe C^2 au voisinage de $\{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : \|x'\| < r_k\}$ à valeurs dans $]a_k, b_k[$ intervalle de $\mathbb{R}$.

On considère le diféomorphisme F sur des ouverts de $\mathbb{R}^d$ défini par

$$F(x) = F(x', x_d) = (x', x_d - \theta_k(x')),$$

de difféomorphisme inverse

$$G(y) = G(y', y_d) = (y', y_d + \theta_k(y')).$$

La fonction $\tilde{u} = \varphi_k(G(y))u(G(y))$ appartient à $H^1(F(\Omega))$ et est à support dans $F(U_k)$, avec

$$F(U_k) \cap F(\Omega) = \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : \|y'\| < r_k \ \text{ et } \ 0 < y_d < b_k - \theta_k(y')\}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que le support de $\varphi_k \circ G$ est contenu dans $O_k = \{y = (y', y_d) \in \mathbb{R}^d : \|y'\| < r_k \ \text{ et } \ 0 < y_d < \epsilon_k\}$ où $\epsilon_k < b_k - \sup_{\|y'\|<r_k} \theta_k(y')$ (la zone que l'on néglige se traite par les propriétés de régularité intérieure : cela revient à modifier φ_k et φ_0).

On a que $\tilde{u} \in H_0^1(F(\Omega))$ et à support dans O_k, est solution du problème variationnel :

$$\forall\, v \in H_0^1(F(\Omega)), \quad A(\tilde{u}, v) = \int_{F(\Omega)} \tilde{g} v \, dy,$$

où $\tilde{g} = g_k \circ G$ et

$$A(\tilde{u}, v) = \int_{F(\Omega)} \sum_{1\leq p,l\leq d} \left(\sum_{1\leq i,j\leq d} \frac{\partial F_p}{\partial x_i}(G(y)) \frac{\partial F_l}{\partial x_j}(G(y)) \right) \frac{\partial U}{\partial y_p}(y) \frac{\partial v}{\partial y_l}(y) \, dy.$$

On note, pour $1 \leq p, l \leq d$,

$$\alpha_{p,l}(y) = \sum_{1\leq i,j\leq d} a_{i,j}(G(y)) \frac{\partial F_p}{\partial x_i}(G(y)) \frac{\partial F_l}{\partial x_j}(G(y)).$$

On prend $\psi_k \in \mathcal{D}(U_k)$ qui vaut 1 au voisinage de φ_k et telle que $0 \leq \psi_k(x) \leq 1$ sur U_k. On considère alors, pour $\lambda > 0$ et $m \in \{1, \ldots, d-1\}$, la fonction

$$w_{\lambda,m}(y) = \psi_k(G(y)) \frac{\tilde{u}(y + \lambda e_m) - \tilde{u}(y)}{\lambda}.$$

On a $w_{\lambda,m} \in H_0^1(F(\Omega))$ et, pour λ assez petit,

$$\forall\, v \in H_0^1(F(\Omega)), \quad A(w_{\lambda,m}, v) = T_{\lambda,m}(v) - S_{\lambda,m}(v)$$

avec

$$T_{\lambda,m}(v) = \int_{F(\Omega)} \frac{v(y - \lambda e_m) - v(y)}{\lambda} \psi_k(G(y)) g_k(G(y))\, dy$$

et

$$S_{\lambda,m}(v) = \sum_{1 \leq p,l \leq d} \int_{F(\Omega)} \frac{\alpha_{p,l}(y - \lambda e_m)\psi_k(G(y - \lambda e_m)) - \alpha_{p,l}(y)\psi_k(G(y))}{\lambda} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_p}(y) \frac{\partial v}{\partial y_l}(y - \lambda e_m)\, dy.$$

On peut estimer facilement les normes des opérateurs linéaires $T_{\lambda,m}$ et $S_{\lambda,m}$: pour tout $v \in H_0^1(F(\Omega))$,

$$|T_{\lambda,m}(v)| \leq \|g_k\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial y_m} \right\|_{L^2(F(\Omega))}$$

et

$$|S_{\lambda,m}(v)| \leq \sum_{1 \leq p,l \leq d} \left\| \frac{\partial(\alpha_{p,l}\psi_k \circ G)}{\partial y_m} \right\|_{L^\infty(F(\Omega))} \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_p} \right\|_{L^2(F(\Omega))} \left\| \frac{\partial v}{\partial y_l} \right\|_{L^2(F(\Omega))}.$$

Les estimations sont indépendants de λ, alors par le théorème de Lax-Milgram, la norme de $w_{\lambda,m}$ reste bonée dans H^1 et donc $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_p \partial y_m}$ appartient à $L^2(F(\Omega))$ pour $1 \leq p \leq d$ et $1 \leq m \leq d-1$.

Pour conclure, il reste à étudier la dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_d^2}$. On a

$$\int_{F(\Omega)} \alpha_{d,d}(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_d}(y) \frac{\partial v}{\partial y_d}(y)\, dy = \int_{F(\Omega)} Q(y) v(y)\, dy$$

avec

$$Q(y) = \tilde{g}(y) + \sum_{(p,l) \neq (d,d)} \frac{\partial}{\partial y_p} \left(\alpha_{p,l}(y) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_l} \right).$$

Comme $Q \in L^2(F(\Omega))$, on obtient que $\alpha_{d,d} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_d}(y)$ admet une dérivée partielle par rapport à y_d dans $L^2(F(\Omega))$. Par l'ellipticité de $\mathcal{A}$, on a

$$\alpha_{d,d}(y) = \sum_{1 \leq i,j \leq d} a_{i,j}(G(y)) \frac{\partial F_d}{\partial x_i}(G(y)) \frac{\partial F_d}{\partial x_j}(G(y)) \geq \beta \sum_{i=1}^{d} \left| \frac{\partial F_d}{\partial x_i} \right|^2 (G(y)) > 0,$$

pour tout $y \in F(\Omega)$. Finalement, on conclut que $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_d}$ admet une dérivée partielle par rapport à y_d dans $L^2(F(\Omega))$.

On a donc obtenu que $\tilde{u} \in H^2(F(\Omega))$, c'est-à-dire $\varphi_k u \in H^2(\Omega)$. Le théorème de regularité est démontré. $\square$

Remarque 3.2 Sous les hypothèses du théorème précédent, si $f \in H^k(\Omega)$, $a_{i,j} \in C^{k+1}(\overline{\Omega})$ et $b_i, c_0 \in C^k(\overline{\Omega})$, pour tous $1 \leq i, j \leq d$ (avec $k \geq 0$), alors $u \in H^{k+2}(\Omega)$.

Théorème 3.4 (Régularité pour le problème de Neumann) *Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$ de classe C^2. Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel défini par* (26) *où*

1. *les coefficients $a_{i,j}$ de la partie principale sont de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ et les coefficent b_i et c_0 sont continus sur $\overline{\Omega}$,*
2. *la partie principale de $\mathcal{L}$ vérifie : il existe $C_0 > 0$ telle que, pour tout $v \in H^1(\Omega)$,*

$$|A(v,v)| = \left| \int_\Omega \sum_{1 \leq i,j \leq d} a_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_y} \, dx \right| \geq C_0 \|\vec{\nabla} v\|_{L^2(\Omega)}$$

Si $f \in L^2(\Omega)$ et u est solution du problème de Neumann

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \forall\, v \in H^1(\Omega), \quad a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx \end{cases} \tag{33}$$

où a est la forme bilinéaire définie par (29)*, alors $u \in H^2(\Omega)$. Plus précisément, il existe une constante C (qui dépend de $\mathcal{A}$ et de Ω) telle que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).$$

Preuve. Analogue à la démonstration du Théorème 3.3.

A Rappels d'analyse : calcul intégral et différentiel, analyse hilbertienne

A.1 Rappels de calcul intégral

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Théorème A.1 (Convergence monotone) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables au sens de Lebesgue sur Ω à valeurs dans $[0,+\infty[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$. Alors, en notant $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (qui est défini pour presque tout $x \in \Omega$ et à valeurs dans $[0,+\infty[$),*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

Proposition A.1 (Séries de fonctions positives) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables au sens de Lebesgue sur Ω à valeurs dans $[0,+\infty[$. Alors,*

(i) l'application $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est mesurable au sens de Lebesgue de Ω dans $[0,+\infty[$,

(ii) on a l'égalité $\displaystyle\int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)\,dx.$

En particulier, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)\,dx < +\infty$, alors, pour presque tout x, on a $\sum_{n=1}^\infty f_n(x) < +\infty$.

Théorème A.2 (Lemme de Fatou) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables au sens de Lebesgue sur Ω à valeurs dans $[0,+\infty[$ qui converge ponctuellement, pour presque tout x, vers une fonction f. Alors,*

$$\int_\Omega f(x)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx.$$

Théorème A.3 (Convergence dominée) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables au sens de Lebesgue sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que*

(i) $f_n \to f$ p.p. sur Ω,

(ii) il existe une fonction Lebesgue-intégrable positive g telle que, pour tout n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω.

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

Proposition A.2 (Séries normalement convergente)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |f_n(x)|\,dx < +\infty$$

Alors,

(i) Pour presque tout $x \in \Omega$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est absolument convergente,

(*ii*) *l'application* $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *est intégrable au sens de Lebesgue de* Ω *dans* $\mathbb{C}$,

(*iii*) *on a l'égalité* $\displaystyle\int_\Omega \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)\,dx.$

Théorème A.4 (Intégrale à paramètres) *Soit* E *un espace métrique,* $f : \Omega \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $y_0 \in E$. *On suppose que*

1. *pour tout* $y \in E$, $x \in \Omega \longmapsto f(x,y)$ *est Lebesgue-intégrable,*
2. *pour presque tout* x, *la fonction* $y \in E \longmapsto f(x,y)$ *est continue au point* y_0,
3. *il existe un vosinage* V *de* y_0 *et une fonction Lebesgue-intégrable positive* g *tels que*

$$\forall\, y \in V, \quad |f(x,y)| \le g(x) \quad p.p.\ sur \quad \Omega.$$

Alors la fonction $F : y \in E \longmapsto \int_\Omega f(x,y)\,dx$ *est continue en* y_0.

Théorème A.5 (Dérivation sous le signe somme) *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *et* $f : \Omega \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application telle que*

1. *pour tout* $y \in U$, $x \in \Omega \longmapsto f(x,y)$ *est Lebesgue-intégrable,*
2. *pour presque tout* x, *la fonction* $y \in U \longmapsto f(x,y)$ *est de classe* C^1 *sur* U *(de dérivées partielles notées* $\frac{\partial f}{dy_j}(x,y)$*),*
3. *il existe une fonction Lebesgue-intégrable* g *telle que*

$$\forall\, y \in I, \quad \forall\, 1 \le j \le n, \quad \left|\frac{\partial f}{dy_j}(x,y)\right| \le g(x) \ \ p.p.\ sur \quad \Omega.$$

Alors la fonction $F : y \in U \longrightarrow \int_\Omega f(x,y)\,dx$ *est de classe* C^1 *sur* U, *de dérivées partielles*

$$\frac{\partial F}{dy_j}(y) = \int_\Omega \frac{\partial f}{dy_j}(x,y)\,dx.$$

Théorème A.6 (Théorème de Tonelli - fonctions positives) *Soient* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ *et* $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ *deux ouverts et* $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,+\infty]$ *une fonction mesurable au sens de Lebesgue. Alors*

1. *pour presque tout* $x \in \Omega_1$, *l'application* $y \mapsto f(x,y)$ *est mesurable au sens de Lebesgue de* Ω_2 *dans* $[0,+\infty]$,
2. *pour presque tout* $y \in \Omega_2$, *l'application* $x \mapsto f(x,y)$ *est mesurable au sens de Lebesgue de* Ω_1 *dans* $[0,+\infty]$,
3. *l'application* $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy$ *est mesurable au sens de Lebesgue de* Ω_1 *dans* $[0,+\infty]$,
4. *l'application* $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx$ *est mesurable au sens de Lebesgue de* Ω_2 *dans* $[0,+\infty]$,
5. *on a l'égalité* $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy\right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\right) dy.$

Théorème A.7 (Théorème de Fubini - fonctions intégrables)

Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ deux ouverts et $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue. Alors

1. *pour presque tout $x \in \Omega_1$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable au sens de Lebesgue de Ω_2 dans $\mathbb{C}$,*
2. *pour presque tout $y \in \Omega_2$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable au sens de Lebesgue de Ω_1 dans $\mathbb{C}$,*
3. *l'application $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy$ est intégrable au sens de Lebesgue de Ω_1 dans $\mathbb{C}$,*
4. *l'application $y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx$ est intégrable au sens de Lebesgue de Ω_2 dans $\mathbb{C}$,*
5. *on a l'égalité $\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\right)dy$.*

Théorème A.8 (Formule de changement de variables)

Soient Φ un difféomorphisme de classe C^1 d'un ouvert U vers un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et f une fonction positive mesurable définie sur Ω. Alors, on a

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_U f(\Phi(y))|J_\Phi(y)|\,dy$$

où J_Φ est le jacobien de Φ. De même, si f est une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur Ω, alors $f \circ \Phi|J_\Phi|$ est intégrable sur U et les deux intégrales ont la même valeur.

Exemples.

1. *Coordonnées polaires* : On considère $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ et f une fonction positive mesurable définie sur Ω.
   Soit $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, avec $r \in]0,1[$ et $\theta \in]0,2\pi[$. Alors, $|J_\Phi(r,\theta)| = r$ et
   $$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta.$$
2. *Coordonnées sphériques* : On considère $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\}$ et f une fonction positive mesurable définie sur Ω.
   Soit $\Phi(r,\theta,\varphi) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$, avec $r \in]0,1[$, $\theta \in]0,2\pi[$ et $\varphi \in]0,\pi[$. Alors, $|J_\Phi(r,\theta,\varphi)| = r\sin\varphi$ et
   $$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)r\,dr\,d\theta\,d\varphi.$$

A.2 Rappels de calcul différentiel

A.2.1 Intégrales de surface

a) Si Γ est une courbe orientée paramétrée de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire

$$\Gamma = \{\gamma(t) : a \le t \le b\}$$

où γ est une application C^1 de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on note ds l'élément de longueur

$$ds = \|\gamma'(t)\|\,dt$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^d$, de sorte que la longuer de Γ est $L = \int_a^b ds$.

Pour une fonction f continue définie au voisinage de Γ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on définit l'*intégrale curviligne* $\int_\Gamma f(s)\, ds$ par

$$\int_\Gamma f(s)\, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

Exemple. Soit $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. On considère $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in]0, 2\pi[$. Alors, $\|\gamma'(t)\| = 1$, pour tout $t \in]0, 2\pi[$, et

$$\int_\Gamma f(s)\, ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\, dt.$$

b) Si Γ est une surface paramétrée de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire

$$\Gamma = \{M(u,v) : (u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\}$$

où M est une application C^1 de $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, on note ds l'élément de surface

$$ds = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| du\, dv,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^3$, de sorte que la surface de Γ est $S = \int_\Gamma ds$. (On rapelle que $\wedge$ répresente le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ et, que $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$ est la surface d'un losange de côtés $\vec{a}$ et $\vec{b}$).

Pour une fonction f continue définie au voisinage de Γ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on définit l'*intégrale de surface* $\int_\Gamma f(s)\, ds$ par

$$\int_\Gamma f(s)\, ds = \iint_{(u,v)\in\Omega} f(M(u,v)) \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| du\, dv$$

L'intégrale de surface $\int_\Gamma f(s)\, ds$ ne dépend pas du paramétrage : si ϕ est un difféomorphisme de U sur Ω et si $N = M \circ \phi$, alors on vérifie facilement que

$$\iint_{(u,v)\in\Omega} f(M(u,v)) \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| du\, dv = \iint_{(x,y)\in U} f(N(x,y)) \left\| \frac{\partial N}{\partial x} \wedge \frac{\partial N}{\partial y} \right\| dx\, dy.$$

Exemple. Soit $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. En paramétrant Γ, en utilisant des coordonnées sphériques, on a

$$\Gamma = \{M(\theta,\varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi) : \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi\}.$$

Alors, l'élément de surface ds est défini par

$$ds = \left\| \frac{\partial M}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial M}{\partial \varphi} \right\| d\theta\, d\varphi = \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi.$$

et

$$\int_\Gamma f(s)\,ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f((\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi))\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi.$$

c) Si Ω est un ouvert connexe borné de classe C^k ($k \geq 1$), le bord $\Gamma = \partial\Omega$ est une hypersurface de classe C^k (une sous-variété de dimension $d-1$), c'est-à-dire que $\partial\Omega = \Phi(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$ et Φ est une application de classe C^k telle que la diférentielle $D\Phi$ est de rang $d-1$ en tout point de U. On a $\partial\Omega = \{\Phi(z_1,\dots,z_{d-1}) : (z_1,\dots,z_{d-1}) \in U\}$.

On définit l'intégrale de surface ds sur $\partial\Omega$ à l'aide du paramètrage local

$$\int_{\partial\Omega} f(s)\,ds = \int_U f(\Phi(z_1,\dots,z_{d-1}))\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\wedge\dots\wedge\frac{\partial\Phi}{\partial z_{d-1}}\right\| dz.$$

On remarquera que si $\partial\Omega$ est une hypersurface plane ($\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}\times\{0\}$), on obtient la formule usuelle du changement de variable pour la mesure de Lebesgue.

A.2.2 Formule de Green

La formule de flux-divergence généralise la formule : $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b)-f(a)$, dans le cas de la dimension $d \geq 2$. On considère l'ensemble :

$$\Omega = \{x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d : (x_1,\dots,x_{d-1}) \in \Omega_0,\ \Phi(x_1,\dots,x_{d-1}) < x_d < \Psi(x_1,\dots,x_{d-1})\},$$

où Ω_0 est un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$. Par le théorème de Fubini, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)\,dx = \int_{\Omega_0}\left(f(y,\Psi(y)) - f(y,\Phi(y))\right)\,dy$$

Lorsque Ω est un ouvert régulier de bord $\partial\Omega$, on note ds l'élément de surface sur $\partial\Omega$ et $\vec{n}(s)$ la normale sortante au point $s \in \partial\Omega$. On a alors la formule de flux-divergence ou formule de Green-Ostrogradski.

Théorème A.9 (Formule de Green-Ostrogradski) *Soit $\vec{F}$ de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors,*

$$\int_\Omega div\,\vec{F}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega}\vec{F}(s)\cdot\vec{n}(s)\,ds.$$

où la divergence de $\vec{F}$ est définie par

$$div\,\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Remarque A.1 Soit f de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$. Alors, $\vec{\nabla}f$ est de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ et

$$div\,\vec{\nabla}f = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \Delta f.$$

Alors, par la Formule de Green-Ostrogradski,

$$\int_\Omega \Delta f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega}\vec{\nabla}f(s)\cdot\vec{n}(s)\,ds.$$

Corollaire A.1 *Soient $\vec{F}$ de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et g de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$. Alors,*

$$\int_\Omega g(x) div\, \vec{F}(x)\, dx = -\int_\Omega \vec{F}(x)\cdot\vec{\nabla} g(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} g(s)\vec{F}(s)\cdot\vec{n}(s)\, ds.$$

En particulier, si f de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) g(x)\, dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} f(s)g(s)n_j(s)\, ds,$$

où n_j est la j-ième coordonnée de $\vec{n}$.

Corollaire A.2 (Formule de Green) *Soient f de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$ et g de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$. Alors,*

$$\int_\Omega \Delta f(x)g(x)\, dx = -\int_\Omega \vec{\nabla} f(x)\cdot\vec{\nabla} g(x)\, dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}(s)g(s)\, ds,$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}(s) = \vec{\nabla} f(s)\cdot\vec{n}(s).$$

Exemple. Soient $\Omega_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$ et $\Omega_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<2\}$. Soit $u(x,y)=r$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Alors, si $(x,y)\neq 0$,

$$\vec{\nabla} u(x,y) = \left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right) \quad \text{et} \quad \Delta u(x,y) = \frac{1}{r}.$$

En utilisant le changement de variables en coordonnées polaires, on a

$$\iint_{\Omega_1}\Delta u(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{r} r\, dr\, d\theta = 2\pi,$$

et

$$\iint_{\Omega_2}\Delta u(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{r} r\, dr\, d\theta = 2(\sqrt{2}-1)\pi.$$

Par la Formule de Stokes,

$$\iint_{\Omega_1}\Delta u(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega_1}\vec{\nabla} f(s)\cdot\vec{n}(s)\, ds = \int_{\partial\Omega_1} s\cdots ds = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi,$$

et

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_2}\Delta u(x,y)\, dx\, dy &= \int_{\partial\Omega_2}\vec{\nabla} f(s)\cdot\vec{n}(s)\, ds\\ &= \int_{s_1^2+s_2^2=2} ds - \int_{s_1^2+s_2^2=1} ds = \int_0^{2\pi}\sqrt{2}\, d\theta - \int_0^{2\pi} d\theta = 2(\sqrt{2}-1)\pi.\end{aligned}$$

A.3 Rappels sur les espaces de Hilbert

On considère E espace vectoriel sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A.3.1 Projection convexe. Théorème de représentation de Riesz

On appelle produit scalaire sur E toute application $\langle\cdot|\cdot\rangle : E\times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

1. Pour tout $y\in E$, l'application $\langle\cdot|y\rangle \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $x\mapsto\langle x|y\rangle$ est linéaire,
   (a) si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\forall x,y\in E$, $\langle y|x\rangle=\langle x|y\rangle$ (propriété de symétrie),
   (b) si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\forall x,y\in E$, $\langle y|x\rangle=\overline{\langle x|y\rangle}$ (propriété de antisymétrie),
2. Pour tout $x\in E$, $\langle x|x\rangle\geq 0$ (positivité),
3. Pour tout $x\in E$, $\langle x|x\rangle=0 \iff x=0$ (définie positive).

Une application satisfaisant les propriétés 1, 2 et 3 (mais pas nécessairement 4) est appelée un semi-produit scalaire. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), on appelle $\langle\cdot|\cdot\rangle$ produit scalaire euclidien (resp. hermitien).

Le couple constitué d'un espace vectoriel E et d'un produit scalaire sur E est appelé un **espace pré-hilbertien réel** (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) ou **complexe** (si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Exemples.

1. L'espace $E=\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire : $\langle x|y\rangle=\sum_{j=1}^d x_jy_j$, est appelé l'**espace euclidien canonique** de dimension d.
   L'espace $E=\mathbb{C}^d$ muni du produit scalaire : $(x|y)=\sum_{j=1}^d x_j\bar{y_j}$, est appelé l'**espace hermitien canonique** de dimension d.
2. Soit Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{L}^2(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue et de carré intégrable dans Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$. On munit $\mathcal{L}^2$ d'une relation d'équivalence
   $$f\sim g \iff f=g \text{ presque partout sur } \quad \Omega.$$
   L'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{L}^2/\sim$ est noté $L^2(\Omega)$ Comme d'habitude, on ne distinguera pas entre les fonctions (dans $\mathcal{L}^2$) et les classes d'équivalence (dans L^2).
   La relation
   $$\langle f|g\rangle=\int_\Omega f(x)g(x)\,dx \text{ si } \mathbb{K}=\mathbb{R},$$
   $$\langle f|g\rangle=\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx \text{ si } \mathbb{K}=\mathbb{C}$$
   définit sur $L^2(\Omega)$ un produit scalaire.
3. On note ℓ^2 l'espace des suites de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$: un élément de ℓ^2 est une suite $x=(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{j\in\mathbb{N}}|x_j|^2<\infty$. On vérifie facilement que l'expression
   $$\langle x|y\rangle=\sum_{j\in\mathbb{N}}x_j\overline{y}_j$$
   est bien définie pour $x,y\in\ell^2$, et est un produit scalaire.

L'inégalité suivante est fondamentale dans l'étude des espaces de Hilbert.

Proposition A.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit E un espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Pour tous $x,y\in E$ on a*

$$|\langle x|y\rangle|\leq\sqrt{\langle x|x\rangle}\sqrt{\langle y|y\rangle}.$$

Preuve : On peut supposer $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Si $x,y\in E$, alors

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad \langle x+ty|x+ty\rangle=\langle x|x\rangle+2t\Re e\langle x|y\rangle+t^2\langle y|y\rangle\geq 0.$$

Si $\langle y|y\rangle=0$, la fonction affine $t\mapsto\langle x|x\rangle+2t\Re e\langle x|y\rangle$ est positive et donc constante, ce qui entraîne que $0=(\Re e\langle x|y\rangle)^2\leq\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle=0$.

Sinon, le polynôme de second degré en t doit avoir un discriminant négatif ou nul et donc, dans ce cas aussi, $(\Re e\langle x|y\rangle)^2\leq\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$. Soit alors u un nombre complexe de module 1 tel que

$$|\langle x|y\rangle|=u\langle x|y\rangle=\langle ux|y\rangle=\Re e\langle ux|y\rangle.$$

Alors,

$$|\langle x|y\rangle|^2=(\Re e\langle ux|y\rangle)^2\leq\langle ux|ux\rangle\langle y|y\rangle=\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle,$$

puisque $u\bar{u}=1$. □

Remarque A.2 Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour $x,y\in E$, $|\langle x|y\rangle|=\|x\|\|y\|$ si et seulement si x et y sont liés.

Corollaire A.3 *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. La relation*

$$\|x\|=\sqrt{\langle x|x\rangle}$$

définit une norme sur E.

Preuve. Il suffit de vérifier l'inégalité triangulaire. On a, pour tous $x,y\in E$,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2+\|y\|^2+2\Re e\langle x|y\rangle\\ &\leq \|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|\\ &= (\|x\|+\|y\|)^2.\end{aligned}$$ □

Dans la suite, H est un espace préhilbertien, on notera (sauf précision contraire) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire sur H et $\|\cdot\|$ la norme associée. On peut remarquer que la donnée de la norme sur H permet de retrouver le produit scalaire, par exemple dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, par les formules suivantes :

$$\Re e\langle x|y\rangle=\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right);$$

$$\Im m\langle x|y\rangle=\frac{1}{2}\left(\|x+iy\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right).$$

Par exemple, si $H=L^2(\Omega)$ (exemple 2 ci-dessus),

$$\|f\|=\left(\int_\Omega|f|^2\,dx\right)^{1/2},$$

si $H=\ell^2$,

$$\|x\|=\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}|x_j|^2\right)^{1/2}.$$

Une conséquence immédiate mais utile de la définition de la norme d'un espace préhilbertien est l'**identité du parallélogramme**.

Proposition A.4 *Si x et y sont deux éléments d'un espace préhilbertien, alors*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Définition A.1 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire.*

Exemples :

1. L'espace $\mathbb{C}^n$ des suites $z = (z_1, \ldots, z_n)$ de nombres complexes est muni du produit scalaire hermitien suivant
$$\langle z|z'\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z}'_k.$$
Les espaces normés de dimension finie étant toujours complets, l'espace $\mathbb{C}^n$ et plus généralement les espaces pré-hilbertiens de dimension finie, appelés aussi espaces hermitiens, sont des espaces de Hilbert.
2. L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$).
3. L'espace ℓ^2 est un espace de Hilbert.

Théorème A.10 (Projection sur un convexe fermé) *Soit C un convexe fermé et non vide d'un espace de Hilbert H. Alors, pour tout point $x \in H$, il existe un unique point $x_C \in C$ tel que*

$$\|x - x_C\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

Ce point, appelé projection de x sur C et noté $x_C = P_C(x)$, est caractérisé par la propriété suivante :

$$x_C \in C \quad et \quad \forall z \in C, \quad \Re e\langle x - x_C | z - x_C\rangle \leq 0. \tag{34}$$

Preuve : Soit $x \in H$. Démontrons d'abord l'existence de la projection de x sur C. Par définition de $\delta = \inf_{z \in C} \|x - z\|$, il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C telle que

$$\|x - y_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

En appliquant l'identité du parallélogramme aux vecteurs $x - y_n$ et $x - y_p$, pour $n, p \geq 1$, on obtient

$$\left\|x - \frac{y_n + y_p}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y_n - y_p}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2).$$

Puisque C est convexe, $(y_n + y_p)/2$ est un point de C et donc

$$\frac{1}{4}\|y_n - y_p\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right).$$

ce qui démontre que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de C et donc converge vers un élément $x_C \in C$ qui vérifie $\|x - x_C\|^2 = \delta^2$.

Supposons ensuite qu'il existe deux points y_1 et y_2 de C tels que $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \delta$. En appliquant l'identité du parallélogramme comme précédemment, on obtient $\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$, c'est-à-dire $y_1 = y_2$, ce qui démontre l'unicité de $P_C(x)$.

Vérifions maintenant que le point $y = P_C(x)$ vérifie la propriété (34). Si $z \in C$, alors pour tout $t \in]0, 1]$ le point $(1-t)y + tz$ appartient à C et donc

$$\|x - (1-t)y - tz\|^2 \geq \|x - y\|^2,$$

c'est-à-dire

$$t^2\|y - z\|^2 + 2t\Re e\langle x - y|y - z\rangle \geq 0.$$

En divisant par t puis en faisant tendre t vers 0, on obtient

$$\Re e\langle x - y|z - y\rangle \leq 0.$$

Supposons réciproquement qu'un point $y \in C$ satisfait (34). Alors, pour tout $z \in C$,

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 &= \|(x - y) + (y - z)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\Re e\langle x - y|y - z\rangle \geq \|x - y\|^2,\end{aligned}$$

et donc $y = P_C(x)$. □

Remarque A.3 Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la caractérisation (34) (où $\Re e$ ne figure pas) exprime que $x_C = P_C(x)$ est l'unique point $y \in C$ tel que, pour tout $z \in C$, l'angle des vecteurs $x - y$ et $z - y$ est obtus (c'est-à-dire supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$).

Soit A une partie d'un espace de Hilbert H. L'orthogonal de A dans H est l'ensemble noté $A^\perp$ formé des éléments orthogonaux à tous les éléments de A, c'est-à-dire

$$A^\perp = \{y \in H : \forall\, x \in A,\ \langle x|y\rangle = 0\}.$$

Proposition A.5 *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors P_F est un opérateur linéaire de H sur F. Si $x \in H$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in H$ tel que*

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp.$$

Corollaire A.4 *Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert H,*

$$H = \overline{F} \oplus F^\perp.$$

En particulier, F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Corollaire A.5 (Critère de totalité) *On dit qu'un sous-ensemble A de l'espace de Hilbert H est total si $Vect(A)$ est dense dans H.*

Pour que A soit total, il faut et il suffit que $A^\perp$ soit réduit à $\{0\}$.

Il est utile de comparer la notion de sous-ensemble (dit aussi système) total à la notion algébrique de partie génératrice (ou système de générateurs). On sait que $A \subset H$ est un système de générateurs si $Vect(A) = H$, alors que A est un système total si $Vect(A)$ est partout dense. Ces deux conditions coïncident en dimension finie, mais en dimension infinie la seconde est beaucoup moins exigeante.

On suppose que H est un espace de Hilbert. Le théorème de représentation de Riesz énoncé ci-dessous décrit le dual topologique de H. On rappelle que le dual topologique E' d'un espace de Banach E est l'espace des formes linéaires continues sur E.

Théorème A.11 (Téorème de Riesz) *Soient H un espace de Hilbert et H' son dual topologique. Soit T une forme linéaire sur H. Alors, $T \in H'$ si et seulement s'il existe $y \in H$ tel que*

$$\forall\, x \in H \quad T(x) = \langle x|y\rangle.$$

De plus, $\|T\| = \|y\|$.

Définition A.2 *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de H est dite famille orthogonale si pour tous $i \neq j$, $x_i \perp x_j$. Une famille orthogonale dont tous les éléments sont de norme égale à 1 est dite famille orthonormale (ou orthonormée).*

Définition A.3 *Une base hilbertienne de H est une famille orthonormale totale de H.*

Exemple. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in]-\pi, \pi[$, on définit $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$. Alors, (e_n) est une base hilbertienne de $L^2(]-\pi, \pi[$.

Les bases hilbertiennes ne sont pas (sauf en dimension finie) des bases au sens algébrique du terme. Un élément de H ne pourra pas s'écrire, en général, comme combinaison linéaire finie des vecteurs de base, mais il pourra s'écrire (sous forme de série) comme limite de telles combinaisons.

Théorème A.12 *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.*

1. *Tout élément $f \in H$ peut se décomposer de façon unique sous forme d'une série convergente dans H*
$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j(f) e_j \quad c_j(f) \in \mathbb{C}.$$
Les composantes $c_j(f)$ sont données par
$$c_j(f) = \langle e_j|f\rangle,$$
et vérifient l'égalité de Bessel-Parceval :
$$\|f\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_j(f)|^2.$$
2. *Réciproquement, étant donnés des scalaires γ_j vérifiant $\sum_j |\gamma_j|^2 < +\infty$, la série $\sum_j \gamma_j e_j$ converge dans H et sa somme f vérifie $c_j(f) = \gamma_j$ pour tout j.*

A.4 Espaces de Lebesgue L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si $1 \leq p < +\infty$, on définit $\mathcal{L}^p(\Omega)$ l'espace des fonctions f mesurables au sens de Lebesgue sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_\Omega |f(x)|^p\, dx < +\infty,$$

et on note

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$, on définit $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions f mesurables au sens de Lebesgue sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\exists\, M > 0, \quad |f(x)| \leq M \text{ presque partout sur } \quad \Omega.$$

On pose

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ presque partout sur } \quad \Omega\}.$$

Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on munit $\mathcal{L}^p$ d'une relation d'équivalence

$$f \sim g \iff f = g \text{ presque partout sur } \quad \Omega.$$

L'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{L}^2/\sim$ est noté $E = L^2(\Omega)$ Comme d'habitude, on ne distinguera pas entre les fonctions (dans $\mathcal{L}^2$) et les classes d'équivalence (dans L^2).

Définition A.4 (Espaces de Lebesgue L^p) *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On définit L^p l'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{L}^p(\Omega)/\sim$.*

Théorème A.13 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(\Omega)$. De plus, $L^p(\Omega)$ muni de cette norme est complet.*

Les inégalités fondamentales sur l'espaces L^p sont les suivantes :

Proposition A.6 (Inégalité de Holder) *Si $1 \leq p \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Proposition A.7 (Inégalité de Minkowski) *Si $1 \leq p \leq +\infty$ et $f, g \in L^p(\Omega)$, alors $f+g \in L^p(\Omega)$ et*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

L'inégalité suivante est utile pour démontrer les résultats précédents.

Proposition A.8 (Inégalité de Young) *Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ et $1 < p, q < +\infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Références

[1] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications,* Dunod, 2005.

[2] F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle,* Masson, 1997.

[3] G. Lacombe, *Analyse Numérique,* Maîtrise de Mathématiques, UEVE 2002/2003.

[4] G. Lacombe, *EDP et méthodes Hilbertiennes,* M1 MINT, UEVE 2016/2017.

[5] P.G. Lemarié-Rieusset, *Outils d'analyse des EDP*, M1 mention Mathématiques, UEVE 2013/2014.

[6] P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles,*, Dunod, 2004.