Analyse Fonctionnelle 2

Julia MATOS

M1 MINT / M1 MA
Université Évry Paris-Saclay / ENSIIE
Année 2024/2025

Table des matières

1 Théorème de Baire et conséquences

1.1 Rappels sur les espaces métriques

Nous commençons par rappeller les notions d'espace métrique complet.

Définition 1.1 (Distance)**.** *Sur un ensemble E, on appelle distance une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Symétrie : pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$.*
2. *Inégalité triangulaire : pour tous $x, y, z \in E$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.*
3. *Séparation : pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$*

Un espace métrique (E,d) est un ensemble E muni d'une distance d.

Une classe importante d'espaces métriques est celle où E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) muni d'une norme $\|\cdot\|$. La distance associée à cette norme est définie par $d(x,y) = \|x - y\|$, pour tous $x, y \in E$.

Dans la suite, on suppose que (E,d) est un espace métrique.

Définition 1.2. *Une partie A de E est dense de (E,d) si $\bar{A} = E$. Autrement dit, A est dense de (E,d) si et seulement si A rencontre tous les ouverts non vides de (E,d).*

Définition 1.3. *On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} d(x_{n+k}, x_n) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq N, \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \ d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon,$$

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n, m \geq N, \ d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Définition 1.4. *On dit que l'espace métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

Une partie F de E est complète si l'espace métrique (F,d) est complet.

Un espace vectoriel normé complet est appelé un espace de Banach.

1.2 Théorème de Baire

Le théorème de Baire [1] est l'un des résultats importants d'analyse fonctionnelle. Ce résultat concerne les F_σ (réunion dénombrables de fermés) et les G_δ (intersection dénombrable d'ouverts) d'un espace métrique complet.

1. René Baire, 1874–1932, mathématicien français

Théorème 1.1 (Baire)**.** *Soit (E,d) un espace métrique complet. On a :*

1. *Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E d'intérieurs vides i.e. $\mathring{F}_n = \emptyset$, alors la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.*
2. *Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses de E i.e. $\overline{O_n} = E$, alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E.*

Démonstration. Il y a équivalence entre 1 et 2, car si A est une partie de E, alors

$$\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A} \quad \text{et} \quad E \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(E \setminus A).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = E &\iff E \setminus \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = \emptyset \\ &\iff \operatorname{int}\left(E \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) = \emptyset \\ &\iff \operatorname{int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \setminus O_n)\right) = \emptyset. \end{aligned}$$

De plus, O_n partie ouverte de E si et seulement si $F_n = E \setminus O_n$ partie fermée de E.

Supposons que $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses de E et O est un ouvert non vide de E. L'ouvert O_0 est dense dans E et O est un ouvert non vide, alors il existe $(x_0, r_0) \in E\times]0, +\infty[$ tel que

$$B_f(x_0, r_0) \subset B(x_0, 2r_0) \subset O \cap O_0.$$

L'ouvert O_1 est dense dans E et $B(x_0, r_0) \cap O_1$ est un ouvert non vide, alors il existe $(x_1, r_1) \in E\times]0, +\infty[$ tel que

$$B_f(x_1, r_1) \subset B(x_1, 2r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \subset O \cap O_0 \cap O_1.$$

De plus, on peut supposer $r_1 \leq \frac{r_0}{2}$. Par récurrence, on construit une suite $((x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E\times]0, +\infty[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_f(x_n, r_n) \subset B(x_n, 2r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n \subset O \cap (O_0 \cap \ldots \cap O_n)$$

et $r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2}$. On vérifie que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq r_n \leq \frac{r_0}{2^n}.$$

Donc, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E qui est un espace complet. Cette suite converge donc vers une limite que l'on note x_∞. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_{n+p} \in B_f(x_n, r_n)$ alors $x_\infty \in B_f(x_n, r_n)$. On en déduit que, pour tout $n \geq 0$,

$$x_\infty \in O \cap \left(\bigcap_{i=0}^{n} O_i \right).$$

Donc,

$$O \cap \left(\bigcap_{n\geq 0} O_n \right) \neq \emptyset.$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque 1.1. Le théorème de Baire peut s'énoncer de façon équivalente :

Soit (E, d) un espace métrique complet. On a

1. *Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E tels que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur non vide alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$.*
2. *Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts de E tels que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ n'est pas dense de E alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que O_{n_0} n'est pas dense dans E.*

Remarque 1.2. Nous pouvons comparer cet énoncé avec le suivant :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités. Alors : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de probabilité nulle, $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ est encore de probabilité nulle.

Dans notre cas, une notion de régularité ($A_n \in \mathcal{A}$) et de petitesse ($P(A_n) = 0$) probabiliste est remplacée par une notion de régularité (F_n fermé) et de petitesse (F_n d'intérieur vide) topologique.

Théorème 1.2. *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E vers F telle que, pour tout $x \in E$ la limite $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe ; on note $f(x)$ cette limite et on dit que f_n converge simplement vers f. Si (E, d_E) est complet, l'ensemble de points de continuité de f est dense dans E.*

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$F_{n,k} = \{x \in E : \forall\, p, q \geq n,\ d_F(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{2^k}\} \text{ et } O_{n,k} = \mathring{F}_{n,k}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, si $m, n \in \mathbb{N}$ et $m \leq n$ alors $F_{m,k} \subset F_{n,k}$ et $O_{m,k} \subset O_{n,k}$. L'ensemble $F_{n,k}$ est fermé de E et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{n,k} = E$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_{n,k}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n,k} \setminus O_{n,k} = F_{n,k} \setminus \mathring{F}_{n,k}$ est un fermé d'intérieur vide. Comme (E, d) est un espace métrique complet, par le théorème de Baire $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(F_{n,k} \setminus O_{n,k})$ est d'intérieur vide dans E. Alors, si $U_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_{n,k}$,

$$E \setminus U_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_{n,k} \setminus U_k) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_{n,k} \setminus O_{n,k})$$

est aussi d'intérieur vide dans E, c'est-à-dire U_k est un ouvert dense de E. En utilisant à nouveau le théorème de Baire,

$$D = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_{n,k} \right)$$

est dense dans E.

Montrons que f est continue sur D. Soit $x \in D$. Soit $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^k} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Comme $x \in U_k$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in O_{n,k}$. On remarque que

$$\forall\, y \in O_{n,k}, \quad d_F(f_n(y), f(y)) \leq \frac{1}{2^k} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

L'application f_n est continue en x, alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in E$,

$$d_E(x, y) < \delta \implies d_F(f_n(x), f_n(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

De plus, puisque $O_{n,k}$ est un ouvert de E, on peut choisir $\delta > 0$ suffisamment petit tel que

$$d_E(x, y) < \delta \implies y \in O_{n,k}.$$

Alors, pour tout $y \in B_E(x, \delta)$, on a

$$\begin{aligned} d_F(f(x), f(y)) &\leq d_F(f(x), f_n(x)) + d_F(f_n(x), f_n(y)) + d_F(f_n(y), f(y)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, f est continue en x. □

1.3 Théorème de Banach-Steinhaus

Notation : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On désigne $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des opérateurs linéaires et continus de E dans F muni de la norme :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E, \|x\|_E=1} \|T(x)\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Remarque 1.3. Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet alors $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ est complet.

Le résultat fondamental suivant, dû à Banach [2] et Steinhaus [3], est une conséquence du théorème de Baire. Il permet d'en déduire une estimation uniforme à partir d'une estimation ponctuelle.

Théorème 1.3 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit E espace de Banach et F espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que*

$$\forall\, x \in E, \quad \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty.$$

Alors,

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

Autrement dit, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \forall i \in I, \quad \|T_i(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Démonstration. Pour chaque $n \geq 1$, on pose

$$F_n = \{x \in E : \forall\, i \in I,\ \|T_i(x)\|_F \leq n\}.$$

Les ensembles F_n sont des fermés de E et

$$\forall\, x \in E, \quad \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty \implies \bigcup_{n\geq 1} F_n = E.$$

Par le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$. Soient $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset F_{n_0}$. On a

$$\forall\, z \in B(0,1), \quad \forall\, i \in I, \quad \|T_i(x_0 + rz)\|_F \leq n_0.$$

Pour tout $i \in I$ et pour tout $z \in B(0,1)$, on a

$$r\|T_i(z)\|_F = \|T_i(rz)\|_F = \|T_i(x_0 + rz) - T_i(x_0)\|_F \leq n_0 + \|T_i(x_0)\|_F \leq 2n_0$$

et donc

$$\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Finalement, $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{2n_0}{r}$. □

2. Stefan Banach, 1892–1945, mathématicien polonais
3. Hugo Steinhaus, 1887-1972, mathématicien polonais

Théorème 1.4 (Banach-Steinhaus - bis)**.** *Soit E espace de Banach et F espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Si $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{L(E,F)} = +\infty$, alors il existe un G_δ dense U de E tel que, pour tout $x \in U$, on a $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F = +\infty$.*

Démonstration. Soit A l'ensemble des points de E tels que $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty$. On va montrer que A est un F_σ d'intérieur vide. On pose

$$F_n = \{x \in E : \forall\, i \in I,\ \|T_i(x)\|_F \leq n\}.$$

On a $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et chaque F_n est fermé de E. Il reste à montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathring{F}_{n_0} = \emptyset$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$, on montre comme précédemment que

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{2n_0}{r} < +\infty$$

ce qui contradit l'hypothèse. □

Corollaire 1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F tels que, pour chaque $x \in E$, $T_n(x)$ converge quand $n \to +\infty$ vers une limite notée $T(x)$. Alors, on a*

1. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$,
2. $T \in \mathcal{L}(E,F)$,
3. $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \|T_n\|_{L(E,F)}$.

Démonstration. Par le théorème de Banach-Steinhaus, avec $I = \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall\, x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Il est clair que T est linéaire et donc $T \in \mathcal{L}(E,F)$. D'autre part, on a

$$\forall\, x \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E.$$

Lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\forall\, x \in E,\ \|T(x)\|_F \leq \liminf_{n\to+\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E.$$

D'où 3. □

Corollaire 1.2. *Soit G un espace de Banach et soit A un sous-ensemble de G. On suppose que, pour tout $f \in G'$, l'ensemble $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ est borné (dans $\mathbb{R}$). Alors, A est borné.*

Remarque 1.4. Pour vérifier qu'un ensemble est borné, il suffit de le "regarder" à travers toutes les formes linéaires continues : c'est ce que l'on fait en général en dimension finie en utilisant les composantes sur une base. Le corollaire 1.2 remplace en dimension infinie le recours à une base. Ce résultat s'exprime aussi en disant que "faiblement borné" $\Longrightarrow$ "fortement borné".

1.4 Théorème de l'application ouverte et théorème du graphe fermé

Les résultats suivants sont dûs à Banach.

Théorème 1.5 (Théorème de l'application ouverte). *Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue de E dans F. Si T est surjective alors T est ouverte : pour tout O ouvert de E, $T(O)$ est un ouvert de F.*

Démonstration. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n = \overline{T(B_E(0, 2^n))}.$$

Puisque T est surjective, $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. L'espace F est complet et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés de F. Par le théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_{n_0} \neq \emptyset$. Alors, il existe $y \in F_{n_0}$ et $r > 0$ tels que

$$B_F(y, r) \subset F_{n_0}.$$

On montre alors que $B_F(0, r) \subset F_{n_0+2}$.

Soit $z_0 \in B_F(0, r)$. On peut trouver $x_0 \in B_E(0, 2^{n_0+1})$ tel que

$$\|z_0 - T(x_0)\|_F < 2^{-1} r,$$

et on pose $z_1 = z_0 - T(x_0)$. Par récurrence, si $z_k \in B_F(0, 2^{-k} r)$, on peut trouver $x_k \in B_E(0, 2^{1+n_0-k})$ tel que

$$\|z_k - T(x_k)\|_F < 2^{-k-1} r,$$

et on pose $z_{k+1} = z_k - T(x_k)$. On a

$$\lim_{n \to +\infty} T\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} T(x_k) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} (z_k - z_{k+1}) = z_0 - \lim_{n \to +\infty} z_{n+1} = z_0.$$

De plus, la série $\sum_{k \geq 0} x_k$ est normalement convergente et puisque E est un espace complet, elle converge vers une limite $y \in E$. Par la continuité de T et l'unicité de limite, on a $T(y) = z_0$. Or $\|y\|_E \leq 2^{n_0+1}$. On a donc

$$B_F(0, r) \subset T(\overline{B_E(0, 2^{n_0+1})}) \subset T(B_E(0, 2^{n_0+2})) \subset F_{n_0+2}.$$

Soit O est un ouvert de E et $y \in T(O)$. Alors, il existe $a \in O$ et $\rho > 0$ tels que $B_E(a, \rho) \subset O$. En appliquant le raisonnement précédent, on a

$$B_F(T(a), 2^{-n_0-2}\rho r) \subset T(B_E(a, \rho)) \subset T(O).$$

Donc, $T(O)$ est bien un ouvert de F. $\square$

Remarque 1.5. Dans les conditions de ce théorème, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$B_F(0, \varepsilon) \subset T(B_E(0, 1)).$$

Corollaire 1.3. *Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue de E dans F. Si T est bijective alors T^{-1} est continue.*

Démonstration. Soit O un ouvert de E et on pose $U = (T^{-1})^{-1}(O) = T(O)$. Par le théorème de l'application ouverte, U est un ouvert de F. On conclut alors que T^{-1} est continue sur E. $\square$

Exemple. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On suppose que E muni de chacune de ces deux normes est un espace de Banach. On suppose de plus qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|_2 \leq C\|x\|_1.$$

Alors, il existe $c > 0$ telle que

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|_1 \leq c\|x\|_2.$$

Autrement dit, les deux normes sont équivalentes. Il suffit d'appliquer le corollaire 1.3 avec $E = (E, \|\cdot\|_1)$, $F = (E, \|\cdot\|_2)$ et $T = \mathrm{I}d$.

Théorème 1.6 (Théorème du graphe fermé)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue si et seulement si son graphe*

$$G = \{(x, y) \in E \times F : y = T(x)\}$$

est fermé dans $E \times F$.

Démonstration. Si T est continue alors G est fermé (image réciproque d'un fermé de F par une application continue sur $E \times F$).

Réciproquement, supposons que G est fermé. Comme E et F sont des espaces complets, $E \times F$ et G le sont aussi. La projection $\gamma_1 : G \longrightarrow E$ définie par $\gamma_1(x, T(x)) = x$, pour $(x, T(x)) \in G$ est linéaire, bijective et continue. Alors, par le corollaire 1.3, γ_1^{-1} est aussi continue. $\square$

2 Convergence faible et faible-$*$

Dans ce chapitre nous allons introduire une notion de convergence, dite faible, sur un espace de Banach pour laquelle, dans certains cas, les ensembles bornés sont séquentiellement relativement compacts. Rappelons qu'en dimension infinie, la boule unité fermée n'est pas séquentiellement relativement compacte pour la topologie de la norme (théorème de Riesz [4] A.2).

2.1 Définition et propriétés de la convergence faible

Dans cette section, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace de Banach de dual E'.
On définit la convergence faible d'une suite de E de la façon suivante.

Définition 2.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que x_n converge faiblement vers $x \in E$, et on note $x_n \rightharpoonup x$, si*

$$\forall\, f \in E', \quad f(x_n) \to f(x) \ \textit{ quand } n \to +\infty.$$

Remarque 2.1.

1. En utilisant le crochet de dualité, on écrit $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E par :

$$\forall\, f \in E', \quad \langle f, x_n\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E} \ \text{ quand } n \to +\infty.$$

2. Il y a unicité de la limite faible quand elle existe, car si $\langle f, x-y\rangle_{E',E}$, pour tout $f \in E'$, par le corollaire A.5 on a

$$\|x-y\| = \sup\{\langle f, x-y\rangle_{E',E} : f \in E', \quad \|f\| \leq 1\} = 0 \implies x = y.$$

3. Ne pas confondre la convergence faible avec la convergence de la norme. Pour éviter l'ambiguité, on dit que x_n *converge fortement* vers x pour signifier que $\|x_n - x\| \to 0$ (convergence au sens de la norme de E). On écrit assez souvent $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E ou $x_n \to x$ fortement dans E. C'est redoundant mais cela renforce la différence sachant que les symboles $\rightharpoonup$ et $\to$ sont assez proches.
4. Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est une espace de Hilbert, d'après le théorème de Riesz A.10, la convergence faible $x_n \rightharpoonup x$ dans H s'exprime aussi avec le produit scalaire sous la forme

$$\forall\, y \in H,\ \langle x_n|y\rangle \to \langle x|y\rangle.$$

5. Il existe une topologie sur E, dite *topologie faible* $\sigma(E, E')$ sur E , dont les suites convergentes sont exactement celles que l'on vient d'introduire. Elle est la topologie la moins fine sur E, c'est-à-dire, avec le minimum d'ensembles ouverts, rendant continues toutes les applications $f \in E'$. Ce n'est pas une topologie une topologie métrique ni une topologie métrisable, en dimension infinie.

4. Frigyes Riesz, 1880–1956, mathématicien hongrois

Notons que l'utilisation effective de la convergence faible dans un espace de Banach nécessite le plus souvent une identification de son dual avec un autre espace de Banach "concret".

Proposition 2.1. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E telle que $x_n \to x$ fortement dans E, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E.*

Démonstration. Soit $f \in E'$. On a

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\|_{E'}\|x_n - x\|.$$

Donc, $f(x_n) \to f(x)$. □

La réciproque est en général fausse.

Proposition 2.2. *Soient $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de Hilbert de H. Alors, $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $e_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\| = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $F_n = \mathrm{v}ect(e_0, \ldots, e_n)$. C'est un sous-espace vectoriel de H de dimension $n+1$ (finie). Par conséquent la projection orthogonale P_n de H sur F_n est bien définie. Pour tout $x \in H$,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i.$$

Par ailleurs, puisque la base $\{e_0, \ldots, e_n\}$ de F_n est orthonormée, on a

$$\|P_n(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} |\langle x|e_i\rangle|^2.$$

On peut montrer que $x = P_n(x) + x - P_n(x)$, avec $P_n(x) \in F_n$ et $x - P_n(x) \in F_n\perp$ et, d'après Pythagore, on a

$$\|x\|^2 = \|P_n(x)\|^2 + \|x - P_n(x)\|^2 \geq \|P_n(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} |\langle x|e_i\rangle|^2.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient l'inégalité de Bessel

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |\langle x|e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

La série du membre de droite est par conséquent convergente, ce qui implique que son terme général tend vers 0, c'est-à-dire

$$\forall\, x \in H,\ \langle x|e_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, $e_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H. □

En dimension finie, les deux notions de convergence forte et faible coıncident.

Proposition 2.3. *Soient E un espace de dimension finie et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Alors, $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E si et seulement si $x_n \to x$ fortement dans E.*

Démonstration. Il est clair que toute suite fortement convergente est faiblement convergente. Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x dans E. Soit $d = \mathrm{d}im(E)$ et $(e_1, e_2, \dots, e_d)$ une base de E avec $\|e_i\| = 1$, pour tout $i \in I = \{1, \dots, d\}$. Pour tout $x \in E$, on a une décomposition unique

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i.$$

Pour chaque $i \in I$, on définit l'application linéaire (i-ième coordonnée) $f_i : E \to \mathbb{R}$ par : $f_i(x) = x_i$. Comme E est de dimension finie, toutes les formes linéaires sur E sont continues (c'est-à-dire le dual topologique E'= dual algébrique E^*), pour tout $i \in I$, $f_i \in E'$. Alors, pour tout $i \in I$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_i(x_n) = f_i(x).$$

Donc,

$$\|\sum_{i=1}^{d} f_i(x_n)e_i - \sum_{i=1}^{d} f_i(x)e_i\| \leq \sum_{i=1}^{d} |f_i(x_n) - f_i(x)| \longrightarrow_{n\to+\infty} 0,$$

c'est-à-dire x_n converge vers x fortement. □

Remarque 2.2. Si E est de dimension infinie, il existe en général des suites qui convergent faiblement mais qui ne convergent pas fortement. Par exemple, si E est réflexif (définition A.6), on peut toujours construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $\|x_n\| = 1$ et $x_n \rightharpoonup 0$.

Exemple. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans ℓ^2 définie par

$$u_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = k \\ 0 & \text{si} \quad n \neq k \end{cases}.$$

Puisque, pour tout $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, on a

$$L_v(u_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_{k,n} v_n = v_k \to 0$$

lorsque $k \to +\infty$, on conclut que u_k converge faiblement vers 0 (car $L : \ell^2 \to (\ell^2)'$ définie par : $L(v) = L_v$ est une isométrie). D'autre part, $\|u_k\|_2 = 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Néaanmoins, il existe des espaces de Banach de dimension infinie où toute suite faiblement convergente est fortement convergente. Par exemple, $E = \ell^1$ possède cette propriété étonnante.

La convergence faible entraine les propriétés de bornitude et de compacité suivantes.

Proposition 2.4. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E. Alors :*

1. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de E,*
2. *$\|x\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$,*
3. *si $f_n \to f$ fortement dans E' (c'est-à-dire, $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$), alors $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Démonstration.

1. Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E, pour tout $f \in E'$, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(x)$, en particulier $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On a

$$\forall\, f \in E',\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)| < +\infty.$$

On applique le corollaire 1.1 du Théorème de Banach-Steinhaus à la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $T_n : E' \to \mathbb{R}$ est définie par $T_n(f) = f(x_n)$. En d'autres termes, $T_n \in E''$. On obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{E''} < +\infty.$$

Or, d'après le corollaire A.5,

$$\|T_n\|_{E''} = \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |T_n(f)| = \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |f(x_n)| = \|x_n\|_E,$$

d'où le résultat.

2. Soit $f \in E'$. On a, pour tout n,

$$|f(x_n)| \leq \|f\|\|x_n\|.$$

Passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$|f(x)| \leq \|f\| \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

En appliquant le corollaire A.5, on a

$$\|x\| = \sup_{f\in E',\, \|f\|_{E'}\leq 1} |f(x)| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

3. On a

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |(f_n - f)(x_n)| + |f(x_n - x)| \leq \|x_n\|_E \|f_n - f\|_{E'} + |f(x_n - x)|.$$

Par 1, $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une constante M indépendante de n. Alors,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq M\|f_n - f\|_{E'} + |f(x_n - x)| \to 0$$

quand $n \to +\infty$. D'où le résultat.

□

2.2 Convergence faible-$*$

La convergence faible est définie sur n'importe quel espace de Banach. Quand c'est espace est lui-même un dual (par exemple $L^\infty(0,1)$), on a une notion encore plus faible de convergence, la convergence faible-$*$ (prononcée "faible étoile"). Cette convergence n'existe pas dans un espace de Banach qui n'est pas un dual (par exemple $L^1(0,1)$). L'étoile, qui évoque le dual algébrique, permet de s'en rappeler.

Définition 2.2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. On dit que f_n converge faible-$*$ ou faiblement-$*$ vers f, et l'on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, si*

$$\forall\, x \in E, \quad \langle f_n, x\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}.$$

Cette définition sur E' utilise les éléments de E. Donc, si l'on est sur un espace de Banach qui n'est pas un dual, la définition ne s'applique pas car elle n'a aucun sens.

Exemple. Si $p = +\infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble mesurable pour la mesure de Lebesgue [5], d'après le théorème A.5, la convergence faible-$*$ dans $L^\infty(\Omega)$, $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ s'écrit :

$$\forall\, g \in L^1(\Omega), \ \int_\Omega f_n g\, dx \to \int_\Omega f g\, dx.$$

Nous avons déjà vu dans le proposition 2.4 que la convergence forte implique la convergence faible. Nous allons voir maintenant que la convergence faible implique la convergence faible-$*$. C'est en ce sens que cette dernière est plus faible que la faible (sans $*$).

Proposition 2.5. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. Alors,*

1. *Si $f_n \to f$ fortement dans E' alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans E'.*
2. *Si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans E' alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans E'.*

Démonstration.

1. Soit $x \in E$. On a

$$|\langle f_n, x\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}| = |\langle f_n - f, x\rangle_{E',E}| \le \|f_n - f\|_{E'}\|x\|_E \to 0$$

quand $n \to +\infty$. D'où le résultat.

2. Si $x \in E$, on note $J(x) \in E''$ son image canonique dans le bidual, définie par

$$\langle J(x), f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E},$$

pour tout $f \in E'$ (théorème A.8). Par convergence faible, on a donc, pour tout $x \in E$,

$$\langle f_n, x\rangle_{E',E} = \langle J(x), f_n\rangle_{E'',E'} \to \langle J(x), f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E},$$

donc $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans E'.

5. Henri-Léon Lebesgue, 1875–1941, mathématicien français

$\square$

En général, les deux notions de convergence faible dans E' sont disctictes, c'est-à-dire qu'il y a strictement plus de suites faiblement-$*$ convergentes que de suites faiblement convergentes. Toutefois elles coïncident dans le cas où E est un espace réflexif.

Proposition 2.6. *Si E est un espace réflexif, alors la convergence faible et faible-$*$ sur E' coïncident.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans E', alors $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans E'. Soit $T \in E''$. Par la réflexivité de E, il existe un $x \in E$ tel que, pour tout $f \in E'$,

$$\langle T, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E}.$$

En fait, $x = J^{-1}(T)$. Par conséquent, par la convergence faible-$*$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\langle T, f_n\rangle_{E'',E'} = \langle f_n, x\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E} = \langle T, f\rangle_{E'',E'}.$$

et donc $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans E'. $\square$

Tout comme la convergence faible, la convergence faible-$*$ entraine des propriétés de bornitude et compacité.

Proposition 2.7. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E' telle que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans E'. Alors :*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E',*
2. *$\|f\|_{E'} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'}$,*
3. *si $x_n \to x$ fortement dans E, alors $\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}$.*

Démonstration.

1. Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans E', alors pour tout $x \in E$, $\langle f_n, x\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}$ et donc, la suite $(\langle f_n, x\rangle_{E',E})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Banach-Steinhaus implique alors que
$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E'} < +\infty.$$
2. Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$, on a
$$|\langle f_n, x\rangle_{E',E}| \leq \|f_n\|_{E'}\|x\|_E \leq \|f_n\|_{E'}.$$
En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient
$$|\langle f, x\rangle_{E',E}| = \lim_{n\to+\infty} |\langle f_n, x\rangle_{E',E}| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'}.$$
Donc,
$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, \|x\|_E\leq 1} |\langle f, x\rangle_{E',E}| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'}.$$

3. Si $x_n \to x$ fortement dans E, alors

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}| &\leq |\langle f_n, x_n - x\rangle_{E',E}| + |\langle (f_n - f, x\rangle_{E',E}| \\ &\leq M\|x_n - x\|_E + |\langle (f_n - f, x\rangle_{E',E}| \to 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

Remarque 2.3. La *topologie faible-$*$* dans E', pour laquelle les suites convergentes sont les suites qui convergent faiblement-$*$, est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(J(x))_{x\in E}$, où J est l'isométrie canonique de E dans le bidual E'' (définition A.6). C'est une topologie au sens de la topologie générale, pas de la topologie métrique.

Comme, par l'injection canonique J, $E \subset E''$, il est clair que la topologie faible-$*$ (appelée aussi topologie $\sigma(E', E)$) est moins fine que la topologie $\sigma(E', E'')$. Autrement dit, la topologie faible-$*$ possède moins d'ouverts (respectivement, fermés) que la topologie $\sigma(E', E'')$ (qui à son tour possède moins d'ouverts (respectivement, fermés) que la topologie forte).

3 Théorème de Banach-Alaoglu

3.1 Espaces séparables

Définition 3.1. *On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Exemple. L'espace $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est séparable.

Définition 3.2. *Soit E espace vectoriel normé. On dit que $A \subset E$ est total si le sous-espace vectoriel engendré par A est dense dans E.*

Proposition 3.1. *Soit E espace vectoriel normé. Alors, E est séparable si et seulement s'il existe $A \subset E$ total et dénombrable.*

Démonstration. La condition nécessaire est évidente. Inversement, supposons qu'il existe $A \subset E$ total et dénombrable. On désigne L_0 le sous-espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par A. Cet espace est dénombrable. Il est clair que L_0 est dense dans le sous-espace vectoriel engendré par A, qui par hypothèse est dense dans E. Donc, L_0 est dénombrable et dense dans E et, par conséquent E est séparable. □

Théorème 3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Les espaces $L^p(\Omega)$ sont séparables pour $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration. Soit $(R_j)_{j\in I}$ la famille (dénombrable) des pavés R de la forme

$$R = \Pi_{k=1}^{d}]a_k, b_k[$$

avec $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ et $R \subset \Omega$. On définit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les fonctions $\mathbf{1}_{R_j}$ (c'est-à-dire, les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des fonctions de $\mathbf{1}_{R_j}$). E est un ensemble dénombrable. Montrons que E est dense dans $L^p(\Omega)$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Soit $f_1 \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$ (rappelons que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$). Soit Ω' un ouvert borné tel que $supp\, f_1 \subset \Omega' \subset \Omega$. Comme $f_1 \in C_c(\Omega')$, on construit une fonction $f_2 \in E$ telle que $supp\, f_2 \subset \Omega'$ et que $|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$ presque partout sur Ω'. D'où $\|f_2 - f_1\|_{L^p} \leq \varepsilon$ et donc $\|f - f_2\|_{L^p} \leq 2\varepsilon$. □

Théorème 3.2. *Soit E un espace de Banach tel que E' est séparable. Alors E est séparable.*

Démonstration. On désigne par $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dénombrable dense dans E'. Comme

$$\|f_n\| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} f_n(x)$$

il existe $x_n \in E$ tel que

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad f_n(x_n) \geq \frac{\|f_n\|}{2}.$$

On désigne par G_0 l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire G_0 est l'espace des combinaisons linéaires finies à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'éléments de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera que G_0 est dénombrable. En effet, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, A_k espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par $x_1, \ldots, x_k$ est en correspondance bijective avec un sous-ensemble de $\mathbb{Q}^k$ et, $G_0 = \bigcup_{k\geq 1} A_k$.

Soit G l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par les $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il est clair que G_0 est un sous-espace dense de G. Vérifions que G est dense dans E (et donc G_0 est dense dans E et E est séparable). Soit $f \in E'$ tel que $f(x) = 0$, pour tout $x \in G$. Montrons que $f = 0$ sur E. On pourra alors conclure que G est dense dans E, par le corollaire A.6. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\| < \varepsilon$. On a

$$\frac{\|f_n\|}{2} \leq f_n(x_n) = (f_n - f)(x_n) + f(x_n) = (f_n - f)(x_n) \leq \|f_n - f\|\|x_n\| < \varepsilon.$$

Donc, $\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| < 3\varepsilon$. Par conséquent, $f = 0$. $\square$

Remarque 3.1. La réciproque n'est pas vraie. Il existe des espaces de Banach E séparables tels que E' ne soit pas séparable. Par exemple : $E = L^1(\Omega)$ et $E' = L^\infty(\Omega)$.

Le tableau suivant récapitule les principales propriétés des espaces L^p et ℓ^p.

	Réflexif	Séparable	Espace dual (isomorphe à)
L^p $(1 < p < \infty)$	oui	oui	L^q (où $1/p + 1/q = 1$)
L^1	non	oui	L^∞
L^∞	non	non	contient strictement L^1
ℓ^p $(1 < p < \infty)$	oui	oui	ℓ^q (où $1/p + 1/q = 1$)
ℓ^1	non	oui	ℓ^∞
c_0	non	oui	ℓ^1
ℓ^∞	non	non	contient strictement ℓ^1

Proposition 3.2. *Tout espace métrique compact (E, d) est séparable.*

3.2 Cube de Hilbert

Théorème 3.3. *On note C le sous-ensemble de ℓ^2 des suites $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$|u(n)| \leq 2^{-\frac{n+1}{2}}.$$

On appelle C le cube de Hilbert[6]*. Alors,*

1. *C est contenu dans la boule unité fermée B de ℓ^2 ($B = \{u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}} : \|u\|_{\ell^2} \leq 1\}$).*

6. David Hilbert, 1862–1943, mathématicien allemand

2. *Dans C, la convergence dans ℓ^2 est équivalente à la convergence ponctuelle : si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans ℓ^2 (vers une limite u) si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite numérique $(u_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente (vers $u(n)$).*
3. *C est une partie compacte de B.*

Démonstration. 1. Soit $u \in C$. Alors,

$$\|u\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} u(n)^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-(n+1)} = 1 \implies u \in B.$$

2. La convergence dans ℓ^2 entraine la convergence ponctuelle, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_k(n) - u(n)| \leq \|u_k - u\|_{\ell^2}.$$

Inversement, supposons que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers u. Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que, pour k assez grand, $\|u_k - u\|_{\ell^2} < \varepsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} < \frac{\varepsilon^2}{16}$. On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|u_k - u\|_{\ell^2} &\leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |u_k(n) - u(n)|^2} + \sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_k(n) - u(n)|^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |u_k(n) - u(n)|^2} + \sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_k(n)|^2} + \sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |u(n)|^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |u_k(n) - u(n)|^2} + 2\sqrt{\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-(n+1)}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |u_k(n) - u(n)|^2} + 2^{-\frac{N}{2}+\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |u_k(n) - u(n)|^2} + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Par la convergence ponctuelle, il existe $K = K(N, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour $k \geq K$,

$$\sqrt{\sum_{n=0}^{N} |u_k(n) - u(n)|^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc, $\|u_k - u\|_{\ell^2} < \varepsilon$.

3. On montre la compacité de C en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass et le procédé diagonal de Cantor [7].

   Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_k(n)| \leq 2^{-\frac{n+1}{2}},$$

   donc $(u_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}$. Par le théorème de Bolzano [8]-Weierstrass [9], on peut extraire une suite convergente : il existe $\phi_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonction strictement croissante telle que la suite $(u_{\phi_0(k)}(0))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite a_0, lorsque $k \to +\infty$. Raisonnant par récurrence, on suppose avoir des extractions $\phi_0, \ldots, \phi_k : N \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $a_0, \ldots, a_m$ tels que, pour tout $0 \leq j \leq m$,

$$u_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_j(k)}(j) \longrightarrow_{k\to+\infty} a_j.$$

   Comme la suite $(u_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_m(k)}(m+1))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, une nouvelle application du théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\phi_{m+1} : N \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel a_{m+1} tels que

$$u_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_{m+1}(k)}(m+1) \longrightarrow_{k\to+\infty} a_{m+1}.$$

   On définit $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ par

$$\psi(k) = \phi_0 \circ \ldots \circ \phi_k(k).$$

   On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\psi(k+1) = \phi_0 \circ \ldots \circ \phi_{k+1}(k+1) \geq \phi_0 \circ \ldots \circ \phi_k(k+1) > \phi_0 \circ \ldots \circ \phi_k(k) = \psi(k),$$

   donc ψ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $(u_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. La sous-suite diagonale $(u_{\psi(k)}(n))_{k\geq n}$ est une suite-extraite de la suite $(u_{\phi_0\circ\ldots\circ\phi_n(k)}(n))_{k\geq n}$ et converge donc vers a_n.

   On conclut en utilisant 2. que la suite u définie par $u(n) = a_n$ est la limite dans ℓ^2 de la suite $(u_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

$\square$

Proposition 3.3. *Soit (E,d) un espace métrique. Alors :*

1. *(E,d) est séparable si et seulement s'il est homéomorphe à une partie de C.*
2. *(E,d) est compact si et seulement s'il est homéomorphe à une partie fermée de C.*

---

7. Georg Cantor, 1845–1918, mathématicien allemand
8. Bernard Bolzano, 1781–1848, mathématicien autrichien
9. Karl Weierstrass, 1815–1896, mathématicien allemand

Démonstration.

1. Soit $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dense dans E. On définit $h : E \longrightarrow C$ par
$$h(x)(n) = 2^{-\frac{n+1}{2}} \min\{1, d(x, x_n)\}.$$
Si $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, on considère $x_n \in D$ tel que
$$d(x, x_n) < \min\left\{1, \frac{d(x, y)}{4}\right\}.$$
Alors, $d(x, x_n) < \frac{1}{3} d(x_n, y)$ et
$$h(x)(n) = 2^{-\frac{n+1}{2}} \min\{1, d(x, x_n)\} < 2^{-\frac{n+1}{2}} \min\{1, d(y, x_n)\} = h(y)(n).$$
D'où, h est injective.
Pour montrer que h est continue sur E et que $h^{-1} : h(E) \longrightarrow E$ est continue sur $h(E)$, il suffit de montrer que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite de E converge vers y dans (E, d) si et seulement si $h(y_k)$ converge vers $h(y)$ dans C. Par la théorème 3.3, on sait que $(h(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $h(y)$ dans C si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite numérique $(h(y_k)(n)))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $h(y)(n)$, i.e.
$$\min\{1, d(y_k, x_n)\} \rightarrow_{k\to+\infty} \min\{1, d(y, x_n)\}.$$
Si $d(y_k, y) \to 0$, en utilisant l'inégalité
$$|d(y_k, x_n) - d(y, x_n)| \leq d(y_k, y)$$
on obtient $\min\{1, d(y_k, x_n)\} \to \min\{1, d(y, x_n)\}$ lorsque $k \to +\infty$. Inversement, si $y_k \not\to y$ lorsque $k \to +\infty$, il existe $\epsilon_0 > 0$ et une sous-suite $(y_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $d(y_{\phi(k)}, y) > \epsilon_0$.
Réciproquement, on utilise le fait qu'un compact métrique est séparable (donc C est séparable) et qu'une partie d'un espace séparable reste séparable pour la topologie induite.
2. L'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte de l'espace d'arrivée et un espace métrique compact est séparable. Le résultat est conséquence de 1.

□

3.3 Théorème de Banach-Aloaglu

Théorème 3.4 (Banach-Alaoglu[10] - 1)**.** *Soit E un espace de Banach séparable. Alors, il existe une distance δ sur la boule unité fermée B de E' telle que les suites à valeurs dans B qui convergent faiblement-$*$ dans E' sont les suites convergentes pour δ. De plus, (B, δ) est un espace métrique compact.*

10. Leonidas Alaoglu, 1914–1981, mathématicien canadien

Démonstration. Soit $D = \{y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots\}$ un ensemble dense et dénombrable dans la boule unité fermée B_E de E. Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans la boule unité fermée B de E'. Comme les T_k sont équicontinues sur B_E, on a que $(T_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est faiblement-$*$ convergente dans E' si et seulement si elle converge ponctuellement sur D. En effet, la convergence ponctuelle de toutes les suites $(T_k(y_n))_{k\in\mathbb{N}}$, pour $n \in \mathbb{N}$, entraine la convergence de $(T_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in E$. Pour tout $x \in B_E$, on montre que la suite $(T_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy sur $\mathbb{R}$ en utilisant l'inégalité :

$$\begin{aligned}|T_k(x) - T_{k+p}(x)| &\leq |T_k(x) - T_k(y_n)| + |T_k(y_n) - T_{k+p}y_n| + |T_{k+p}(y_n) - T_{k+p}(x)| \\ &\leq \|T_k\|_{E'}\|x - y_n\|_E + |T_k(y_n) - T_{k+p}(y_n)| + \|T_{k+p}\|_{E'}\|x - y_n\|_E \\ &\leq 2\|x - y_n\|_E + |T_k(y_n) - T_{k+p}(y_n)|.\end{aligned}$$

Plus généralement, pour tout $x \in E$, $(T_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy sur $\mathbb{R}$ et donc convergente sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$, on définit

$$T(x) = \lim_{k\to+\infty} T_k(x).$$

Alors, par le corollaire 1.1, $T \in E'$ et $\|T\|_{E'} \leq 1$. De plus, $T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T$ dans E'.

On considère $\phi : B \longrightarrow C$ définie par :

$$\phi(T) = (2^{-\frac{n+1}{2}} T(y_n))_{n\in\mathbb{N}},$$

où C est le cube de Hilbert :

$$C = \{u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u(n)| \leq 2^{-\frac{n+1}{2}}\}.$$

D'après le théorème 3.3, C est un compact de ℓ^2 et que la convergence d'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans C équivaut à la convergence des suites $(u_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'image de B par ϕ est donc un fermé du compact C, de sorte que $\phi(B)$ est un compact. De plus, ϕ est injective. On peut donc définir une distance δ sur B par la formule :

$$\delta(T, S) = \|\phi(T) - \phi(S)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-(n+1)}(T(y_n) - S(y_n))^2}.$$

La convergence pour δ est bien équivalente à la convergence faible-$*$. $\square$

Le résultat suivant est l'un des résultats fondamentaux sur la convergence faible-$*$. Il assure que dans le dual d'un espace de Banach séparable, toute suite bornée est faiblement-$*$ séquentiellement relativement compacte.

Théorème 3.5 (Banach-Alaoglu - 2)**.** *Soit E est espace de Banach séparable. Alors :*

— *L'ensemble $B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ est faiblement-$*$ séquentiellement compacte.*

— *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite bornée de* E'*, c'est-à-dire*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E'} < +\infty$$

alors on peut extraire une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *qui converge faiblement-$*$ vers un* $f \in E'$.

Démonstration. Conséquence du théorème précédent. □

Remarque 3.2. La boule unité fermée d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compacte pour la topologie forte (théorème de Riesz).

On dit que E est un *espace réflexif* si l'isométrie canonique $J : E \longrightarrow E''$ est une bijection de E sur E''.

Le résultat suivant donne une caractérisation importante des espaces réflexifs.

Théorème 3.6. *Soit E un espace de Banach. Alors,*

1. *E est réflexif si et seulement si $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est faiblement sequentiellement compact.*
2. *E est réflexif si et seulement si toute suite borné $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E admet une sous-suite extraite faiblement convergente dans E.*

Démonstration. Il suffit de montrer 1.

Supposons que E est réflexif et séparable. Comme E'' peut être identifié à E par l'isomorphisme isométrique canonique $J : E \longrightarrow E''$, E'' est séparable. Alors, d'après le théorème 3.2, E' est également séparable. On a aussi $J(B_E) = B_{E''}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B_E. Alors, $(J(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la boule unité fermée de E'' qui, par le le théorème de Banach-Alaoglu, est faiblement-$*$ compact dans $(E')'$. Alors, il existe une sous-suite $(J(x_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ de $(J(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\xi \in E''$ tels que

$$\begin{aligned} J_{x_{\phi(n)}} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi \text{ dans } E'' &\iff \forall\, T \in E',\ \langle J_{x_{\phi(n)}}, T\rangle_{E'',E'} \to \langle \xi, T\rangle_{E'',E'} \\ &\iff \forall\, T \in E',\ \langle T, x_{\phi(n)}\rangle_{E',E} \to \langle T, J^{-1}(\xi)\rangle_{E',E} \end{aligned}$$

Donc, la sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x = J^{-1}(\xi)$ dans E.

Dans le cas général, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B_E. On définit $F = \overline{vect\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ qui est un sous-espace vectoriel fermé de E. De plus, F est réflexif et séparable. L'argument précédent s'applique à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une suite d'éléments de B_F.

On admet la réciproque. □

Exemples.

1. Si H est un espace de Hilbert alors H est réflexif (conséquence du théorème de Riesz).
2. Pour tout $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est réflexif.
3. L'espace $L^1([0,1])$ n'est pas réflexif. Supposons par l'absurde que $L^1([0,1])$ est réflexif. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

On a $\|f_n\|_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème précédent, il y aurait une suite extraite $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $f \in L^1([0,1])$ tels que $f_{\phi(n)} \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1([0,1])$. Si I est un intervalle fermée contenu dans $[0,1]$, en choisissant $g = \mathbf{1}_I \in L^\infty([0,1])$, on obtient

$$\int_I f_{\phi(n)}(x)\,dx \to \int_I f(x)\,dx.$$

En particulier, pour $I = [0,1]$, on obtient

$$1 = \int_0^1 f_{\phi(n)}(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$$

ce qui montre que $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.
Soit maintenant I un intervalle fermé de $]0,1]$. Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que $I \subset [\alpha, 1]$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{\phi(n)} = 0$, pour tout $n \geq n_0$, d'où $\int_I f_{\phi(n)}(x)\,dx = 0$, pour ces valeurs de n. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on conclut que $\int_I f(x)\,dx = 0$.
Pour tout $k \geq 1$, en choisissant $I = [\frac{1}{k}, 1]$, on obtient $\int_{\frac{1}{k}}^1 f(x)\,dx = 0$. Par passage à la limite quand $k \to +\infty$ et par convergence dominée, on obtient $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, contradiction.

3.4 Convergence faible et convexité

Définition 3.3. *Soit E un espace de Banach et $A \subset E$. On dit que*

(i) *A est faiblement séquentiellement fermé si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A avec $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E, alors $x \in A$;*

(ii) *A est faiblement séquentiellement compact si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans E vers un élément $x \in A$.*

Remarque 3.3.

1. *Soit A une partie de E espace de Banach. On vérifie facilement que si A est faiblement séquentiellement fermé (resp. compact) alors A est fermé (resp. faiblement séquentiellement compact) dans E. Ceci est la conséquence du faite que la topologie faible est moins fine que la topologie forte.*
2. *Un ensemble faiblement séquentiellement compact est nécessairement faiblement séquentiellement fermé.*
3. *Ces notions faibles différent des notions de fermeture et compacité forte. Par exemple, si H est un espace de Hilbert alors $S = \{x \in H : \|x\| = 1\}$ est fermé mais pas faiblement séquentiellement fermé. En effet, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, on a $e_n \in S$, $e_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H mais $0 \notin S$.*

Tout ensemble fermé pour la topologie faible est fermé pour la topologie forte mais la réciproque est fausse, comme on vient de l'indiquer dans la dernière remarque. Toutefois, on va montrer que pour les ensembles convexes ces deux notions coïncident.

Théorème 3.7. *Soit $C \subset E$ convexe. Alors C est faiblement séquentiellement fermé si et seulement si C est fortement fermé.*

Démonstration. La condition nécessaire est évidente car toute suite qui converge fortement, converge aussi faiblement.

Réciproquement, supposons que C est fortement fermé. On veut montrer que C est aussi faiblement fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightharpoonup x_\infty$ faiblement dans E. Supposons par l'absurde que $x_\infty \notin C$. D'après le théorème de Hahn-Banach A.7, il existe un hyperplan fermé séparant au sens strict $\{x_\infty\}$ et C. Donc, il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f, x_\infty\rangle_{E',E} < \alpha < \langle f, y\rangle_{E',E}, \quad \forall\, y \in C.$$

En particulier,

$$\langle f, x_\infty\rangle_{E',E} < \alpha < \langle f, x_n\rangle_{E',E}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $\langle f, x_\infty\rangle_{E',E} < \alpha \leq \langle f, x_\infty\rangle_{E',E}$, contradiction. $\square$

Par contre, la boule unité d'un espace de Banach réflexif, qui est convexe, est une partie faiblement séquentiellement compacte qui n'est pas fortement compacte en dimension infinie. Pas de coincidence dans le cas convexe pour les notions de compacité.

3.5 Fonctions convexes coercives

Définition 3.4. *Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E. On dit qu'un fonction $J : C \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est convexe si*

$$\forall\, x, y \in C,\ \forall\, t \in [0,1],\ J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y).$$

On dit que J est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte pour $x \neq y$ et $t \in]0,1[$.

Si $t \in]0,1[$ et, $J(x) = +\infty$ ou $J(y) = +\infty$, le membre de droite vaut, par convention, $+\infty$. Également par convention, dans le membre de droite, $0 \times +\infty = 0$.

Exemples.

1. Les applications linéaires et les applications affines sont convexes.
2. Les applications normes $x \mapsto \|x\|$ sont convexes (mais ne sont pas strictement convexes).
3. Dans un espace de Hilbert, l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est strictement convexe car, si $t \in]0,1[$ et $x \neq y$, on a

$$\begin{aligned}\|tx + (1-t)y\|^2 - t\|x\|^2 - (1-t)\|y\|^2 &= t(t-1)\|x\|^2 - 2t(1-t)\langle x|y\rangle - t(1-t)\|y\|^2 \\ &= -t(1-t)\|x-y\|^2 < 0.\end{aligned}$$

Définition 3.5. *Soit E un espace de Banach. On dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$[f \leq \alpha] = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$$

est fermé.

Remarque 3.4. Si f est continue sur E alors f est s.c.i. sur E.

Proposition 3.4. *Soient E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La fonction f est s.c.i. sur E si et seulement si : pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $x \in E$,*

$$x_n \to x \ \textit{ fortement dans } \ E \implies f(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n).$$

Démonstration. Supposons que f est s.c.i. sur E et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge fortement vers $x \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $x \in \{y \in E : f(y) > f(x) - \varepsilon\}$ qui est une partie ouverte de E. Alors, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall\, y \in B(x,r), \quad f(y) > f(x) - \varepsilon,$$

Pour n suffisamment grand, $x_n \in B(x,r)$ et $f(x_n) > f(x) - \varepsilon$. En passant à la limite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$f(x) - \varepsilon \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n).$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on conclut que

$$f(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n).$$

Réciproquement, soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans $[f \leq \alpha]$ qui converge fortement vers $x \in E$. Par l'hypothèse,

$$f(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \leq \alpha$$

et donc $x \in [f \leq \alpha]$. On conclut que $[f \leq \alpha]$ est un fermé de E. $\square$

Définition 3.6. *Soit E un espace de Banach, $A \subset E$ et $f : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que f est faiblement séquentiellement s.c.i. en $x \in A$ si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A avec $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E, on a*

$$f(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x_n).$$

On dit que f est faiblement séquentiellement s.c.i. sur A si elle est faiblement séquentiellement s.c.i. en tout point $x \in A$.

Remarque 3.5. On a clairement que si f est faiblement s.c.i alors f est s.c.i. pour la convergence forte. La réciproque est fausse. *Contre-exemple* : Soit H un espace de Hilbert séparable et $f(x) = 1 - \|x\|^2$, $x \in H$. Alors, f est continue et donc s.c.i. pour la convergence forte. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, alors $e_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H et

$$f(0) = 1 > 0 = \liminf_{n\to+\infty} f(e_n).$$

Lemme 3.1. *Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E et $f : C \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, l'ensemble $C_\alpha = \{x \in C : f(x) \leq \alpha\}$ est convexe.*

Démonstration. Soient $x, y \in C_\alpha$ et $t \in]0,1[$. D'une part, $tx + (1-t)y \in C$ par convexité de C. D'autre part, on a

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \leq t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha$$

par convéxité de f, donc $tx + (1-t)y \in C_\alpha$. $\square$

Nous montrons que dans un cas particulier, les notions de fortement s.c.i. et faiblement s.c.i. coïncident.

Corollaire 3.1. *Soit C un convexe fermé de E espace de Banach et $f : C \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, s.c.i. pour la convergence forte. Alors, f est faiblement séquentiellement s.c.i. sur C.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C telle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E. Comme C est convexe et fermé fort, il est aussi faiblement séquentiellement fermé (théorème 3.7) et donc $x \in C$. Si $\liminf_{n\to+\infty} f(x_n) = +\infty$ il n'y a rien à montrer. Sinon, on pose

$$\alpha = \liminf_{n\to+\infty} f(x_n) \in [-\infty, +\infty[.$$

Par la définition de borne inférieure, il existe une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_{\phi(n)}) = \alpha \;\text{ et }\; x_{\phi(n)} \rightharpoonup x \;\text{ faiblement dans }\; E.$$

Supposons $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme f est convexe, l'ensemble $C_k = \{x \in C : f(x) \leq \alpha + \frac{1}{k}\}$ est convexe par le lemme 3.1 et fermé fort comme intersection de fermés forts : C et $[f \leq \alpha + \frac{1}{k}]$. D'après le théorème 3.7, C_k est faiblement séquentiellement fermé. Comme pour n assez grand, $x_{\phi(n)} \in C_k$, on en déduit que $x \in C_k$, c'est-à-dire

$$f(x) \leq \alpha + \frac{1}{k} = \liminf_{n \to +\infty} f(x_n) + \frac{1}{k}.$$

En faisant $k \to +\infty$, on obtient

$$f(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n).$$

Donc, f est faiblement séquentiellement s.c.i. sur C.

Supposons maintenant que $\alpha = -\infty$. Pour tout $M \in \mathbb{R}$, on a $f(x_{\phi(n)}) \leq M$ pour n assez grand. Comme précédemment, ceci implique que $x \in C_M$, c'est-à-dire $f(x) \leq M$. Comme M est arbitraire, $f(x) = -\infty$ ce qui est exclu car f prend ses valeurs dans $\mathbb{R} \cap \{+\infty\}$. Ce dernier cas ne peut donc pas se produire. □

Théorème 3.8. *Soit E un espace de Banach réflexif. Si C est une partie convexe fermée non vide de E et si $f : C \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *f est convexe,*
2. *f est semi-continue inférieurement,*
3. *f est coercive :*
$$\lim_{\|x\|_E \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

alors la fonction f atteint son minimum sur C, c'est-à-dire il existe $x_0 \in C$ tel que

$$\forall\, x \in C,\ f(x_0) \leq f(x).$$

Si de plus f est strictement convexe, alors le point de minimum est unique.

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour la fonction f : $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ et

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \inf_{y \in C} f(y).$$

On note F l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les y_n, $n \in \mathbb{N}$, et $K = C \cap F$. Alors, F est un espace de Banach réflexif et séparable, K est un convexe de F et $f_{|F}$ est une fonction convexe s.c.i. coercive sur K et on a $\inf_{y\in C} f(y) = \inf_{y\in K} f(y)$. On peut donc supposer dans la suite que E est un espace séparable.

Par la coercivité de f, la suite minimisante $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit $J : E \longrightarrow E''$ l'injection canonique (isométrique) : $J(x)(T) = T(x)$. La suite $(J(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans le bidual E''. Comme $E'' = J(E)$ (par réflexivité de E), E'' est séparable et donc E' est séparable. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite $(J(y_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement-$*$ dans E'' (vers une limite $\xi \in E''$), et donc $(y_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers une limite a dans E (où $a = J^{-1}(\xi)$).

Comme C est convexe fermé, par le théorème 3.7, $a \in C$. Pour tout $R > \inf_{x\in C} f(x)$, l'ensemble $K_R = f^{-1}(]-\infty, R[)$ est un convexe fermé de E. Comme $y_{\phi(n)}$ appartient à K_R, pour n suffisamment grand, on obtient $a \in K_R$ et donc que $f(a) \leq R$. On en conclut que $f(a) \leq \inf_{y\in C} f(y)$ et le minimum de f est bien atteint (en a).

Si $a \neq b$ minimisent tous deux f sur C, alors par convéxité de C, on a $\frac{a+b}{2} \in C$ et par stricte convéxité de f, on obtient

$$\inf_{x\in C} f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b) = \inf_{x\in C} f(x)$$

ce qui est absurde. On en conclut que $a = b$. □

Remarque 3.6.

1. L'application f est coercive si et seulement si pour tout $R > 0$, $f^{-1}(]-\infty, R[)$ est une partie bornée de E.
2. La convexité stricte est une condition suffisante d'unicité mais ce n'est pas une condition nécessaire.

Définition 3.7. *Soit E un espace vectoriel normé.*

1. *On dit que E est strictement convexe si*

$$\forall\, x, y \in E,\ x \neq y \ \text{ et } \ \|x\| = \|y\| = 1 \implies \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

2. *On dit que E est uniformément convexe si*

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 :\ \|x\| = \|y\| = 1 \ \text{ et } \ \|x - y\| > \epsilon \implies \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

Remarque 3.7.

1. Tout espace de Banach uniformément convexe est strictement convexe. La réciproque est fausse.
2. Uniformément convexe est une propriété géométrique de l'espace E qui dépend de la norme considérée. Par exemple, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ est uniformément convexe alors que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ n'est pas uniformément convexe ni strictement convexe.

Exemples.

1. Tout espace de Hilbert H est uniformément convexe.

2. Pour tout $1 < p < +\infty$, les espaces ℓ^p et $L^p(\Omega)$, où Ω est une partie ouverte de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, sont uniformément convexes.

Corollaire 3.2. *Soient E un espace de Banach réflexif, C une partie convexe fermée non vide de E et $x \in E$. On considère $\phi_x : C \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$\phi_x(y) = \|x - y\|_E, \ y \in C.$$

Alors,

1. *La fonction ϕ_x atteint son minimum sur C.*
2. *Si E est strictement convexe, le point où ϕ_x atteint son minimum sur C est unique. On l'appelle le point de la projection convexe de x sur C et on note $p_C(x)$.*
3. *Si E est strictement convexe et si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minimisante pour la fonction ϕ_x, alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $p_C(x)$.*
4. *Si E est uniformément convexe et si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minimisante pour la fonction ϕ_x, alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers $p_C(x)$.*

Démonstration.

1. La fonction $\phi_x : C \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\phi_x(y) = \|x-y\|_E$, est convexe, s.c.i et coercive sur E. Le résultat est conséquence du thérème précédent.
2. Si y_1 et y_2 sont deux points de minimum de ϕ_x, cela est encore vrai pour $y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}$ et on a
$$\|x - y_1\|_E = \|x - y_2\|_E = \|x - y_3\|_E = \left\|\frac{x-y_1}{2} + \frac{x-y_2}{2}\right\|_E.$$
Si E est strictement convexe, on conclut que $y_1 = y_2$.
3. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante de la fonction ϕ_x : $y_n \in C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et
$$\lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\|_E = \min_{y\in C} \|x - y\|_E.$$
On note F l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(J(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans F'' par la constante $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\|_E < +\infty$. La boule fermé $B = B_f(0, M)$ pour la norme E'' est compacte pour une distance d telle que les suites de B convergentes pour d sont les suites de B faiblement-$*$ convergentes dans E'', d'après le théorème de Banach-Alaoglu. Les suites extraites faiblement-$*$ de $(J(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $J(y_\infty)$ (où $y_\infty = p_C(x)$). La suite $(J(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans le compact (B, d) a une seule valeur d'adhérence et elle converge donc vers $J(y_\infty)$ pour d, et aussi faiblement-$*$ dans F''. Si $T \in E'$, l'application $\bar{T} : F \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\bar{T}(x) = T(x)$, $x \in F$, appartient à F'. Alors,
$$\lim_{n\to+\infty} J(y_n)(\bar{T}) = J(y_\infty)(\bar{T}).$$
Comme $J(y_n)(\bar{T}) = \bar{T}(y_n) = T(y_n)$ et $J(y_\infty)(\bar{T}) = \bar{T}(y_\infty) = T(y_\infty)$, on a bien que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers y_∞ dans E.

4. D'après la question précédente, $x - y_n$ converge faiblement vers $x - y_\infty$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\|_E = \|x - y_\infty\|_E.$$

Si E est uniformément convexe, on conclut que $x-y_n$ converge fortement vers $x-y_\infty$ et donc que y_n converge fortement vers y_∞.

$\square$

A Annexe : Espaces de Banach

A.1 Normes, espaces vectoriels normés

Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition A.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ qui satisfait les propriétés suivantes.*

1. *Homogénéité : Pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.*
2. *Inégalité triangulaire : si $x, y \in E$, alors $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.*
3. *Propriété de séparation : si $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$.*

Une application qui satisfait les propriétés 1. et 2. mais pas forcèment 3. est appelé une semi-norme sur E.

Habituellement une norme est notée par $N(x) = \|x\|$ ou $N(x) = |x|$.

Définition A.2. *Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel $\mathbb{K}$. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que*

$$\forall x \in E, \qquad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Théorème A.1. *Dans un espace de dimension finie E sur K, toutes les normes sont équivalentes.*

Corollaire A.1. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.*

Théorème A.2 (Riesz)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

A.2 Applications linéaires continues

Le théorème suivant (que l'on évitera d'utiliser pour des applications non linéaires !) à l'intérêt de ramener le problème de la continuité à des majorations sur les normes.

Théorème A.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire f de E dans F est continue si et seulement si elle satisfait l'une des propriétés suivantes :*

1. *f est continue en 0.*
2. *f est bornée sur la boule unité fermée $B_f(0,1)$ de E.*
3. *il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.*
4. *f est lipschitzienne.*

Si c'est le cas, le réel $\|f\| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{x\|_E}$ s'appelle la norme de f.

On vérifie sans peine que l'application $f \mapsto \|f\|$ ainsi définie est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F. On vérifie également que, pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

A.3 Espaces de Banach

Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans E est convergente (par rapport à la topologie définie par la distance associée à la norme).

Théorème A.4. *Soit E un espace vectoriel normé. Alors, E est un espace de Banach si et seulement si toute série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ normalement convergente est convergente dans E.*

Proposition A.1. *Soient E, F deux espaces vectoriels normés. S'il existe un homéomorphisme linéaire de E sur F et si E est complet, alors F est complet.*

Corollaire A.2. *Toute espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Proposition A.2. *Si F est complet, alors l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi complet.*

A.4 Dual topologique

Le *dual topologique* d'un espace vectoriel normé E sur le corps $\mathbb{K}$ est, par définition, l'ensemble des formes linéaires continues de E, c'est-à-dire des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$. On note cet ensemble E'. Ainsi, $E' = \mathcal{L}((E, \mathbb{K})$ et, par ce qui précède, E' muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| = 1} f(x) = \sup_{x \in E, \|x\| = 1} |f(x)| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

est un espace de Banach puisque $\mathbb{K}$ est complet.

Théorème A.5 (Théorème de représesntation de Riesz)**.** *Soit (X, μ) un espace mesuré avec une mesure μ positive et σ-finie et soit $1 \leq p < +\infty$ et $q = \frac{p}{p-1}$ (alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Alors, l'application $L : L^q(X, d\mu) \longrightarrow (L^p(X, d\mu))'$ définie par $g \mapsto L_g$ avec, pour tout $f \in L^p(X, d\mu)$,*

$$L_g(f) = \langle f, g \rangle_{L^p, L^q} = \int_X f g \, d\mu$$

est un isomorphisme isométrique, c'est-à-dire, $\|L_g\|_{(L^p)'} = \|g\|_{L^q}$.

A.5 Théorème de Hahn Banach analytique

Définition A.3. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une application $p : E \to \mathbb{R}$ est sous-linéaire si elle satisfait les propriétés suivantes.*

1. *Pour tous $x \in E$, $\lambda > 0$, on a $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ (positivement homogène).*
2. *Inégalité triangulaire : si $x, y \in E$, alors $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.*

Toute semi-norme (donc aussi toute norme) est une application sous-linéaire. De même, toute application linéaire est une application sous-linéaire.

Théorème A.6 (Hahn-Banach)**.** *Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une fonction sous-linéaire. Soient F un sous-espace vectoriel de E et $f : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur F majorée par p, c'est-à-dire $f(x) \leq p(x)$, pour tout $x \in F$. Il existe alors une forme linéaire $g : E \to \mathbb{R}$ sur E telle que*

1. *$\forall\, x \in F$, $g(x) = f(x)$,*
2. *$\forall\, x \in E$, $g(x) \leq p(x)$.*

On remarque que E n'est qu'un espace vectoriel réel sans topologie, donc sans norme.

Les corollaires du théorème de Hahn-Banach suivants sont très utiles dans les applications.

Corollaire A.3. *Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue. Alors, il existe $f \in E'$ qui prolonge g et tel que*

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

Corollaire A.4. *Soit E un espace normé. Pour tout $x_0 \in E$, il existe $f_0 \in E'$ tel que*

$$\|f_0\|_{E'} = \|x_0\| \quad \text{et} \quad f_0(x_0) = \|x_0\|^2.$$

Corollaire A.5. *Soit E un espace normé. Pour tout $x \in E$, on a*

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in E', \quad \|f\| \leq 1\} = \max\{|f(x)| : f \in E', \quad \|f\| \leq 1\}.$$

Corollaire A.6. *Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\bar{F} \neq E$. Alors, il existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tel que*

$$\forall\, x \in F, \quad f(x) = 0.$$

Remarque A.1. Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est dense dans E, il suffit de montrer que si f est une forme linéaire continue sur E telle que $f = 0$ sur F alors f est identiquement nulle sur E.

A.6 Théorème de Hahn Banach géométrique

Définition A.4. *Un hyperplan est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\},$$

où f est une forme linéaire sur E non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $f = \alpha$.

Il est facile de montrer le résultat suivant.

Proposition A.3. *L'hyperplan d'équation $f = \alpha$ est fermé si et seulement si f est continue.*

Définition A.5. *Soient A et B des sous-ensembles de E. On dit que l'hyperplan d'équation $f = \alpha$ sépare A et B au sens large si l'on a*

$$f(x) \leq \alpha, \quad \forall\, x \in A \quad \text{ et } \quad f(x) \geq \alpha, \quad \forall\, x \in B.$$

On dit que H sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon, \quad \forall\, x \in A \quad \text{ et } \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon, \quad \forall\, x \in B$$

Rapellons qu'un ensemble $A \subset E$ est *convexe* si

$$\forall\, x, y \in A, \quad \forall\, t \in [0, 1], \quad tx + (1 - t)y \in A.$$

Théorème A.7 (Hahn-Banach, forme géométrique)**.** *Soient A et B deux sous-ensembles convexes, non vides, disjoints de E. On suppose que A est fermé et que B est compact. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.*

A.7 Crochet de dualité

Théorème A.8. *Soit E un espace vectoriel normé. Pour $x \in E$, l'application $J(x)$ définie sur E' par*

$$J(x)(T) = \langle T, x\rangle_{E',E} = T(x)$$

est une forme linéaire continue sur E', de sorte que l'on peut écrire

$$\langle J(x), T\rangle_{E'',E'} = \langle T, x\rangle_{E',E}.$$

De plus, on a

$$\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E.$$

On appelle J l'isométrie canonique de E dans le bidual E''.

Définition A.6. *Un espace de Banach est réflexif si J est une bijection de E sur E''.*

A.8 Espaces de Hilbert

On considère E espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A.9 Projection convexe. Théorème de représentation de Riesz

Définition A.7. *On appelle produit scalaire sur E toute application $\langle\cdot|\cdot\rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :*

1. *Pour tout $y \in E$, l'application $\langle\cdot|y\rangle \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $x \mapsto \langle x|y\rangle$ est linéaire,*
   (a) *si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $\langle y|x\rangle = \langle x|y\rangle$ (propriété de symétrie),*
   (b) *si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\forall x, y \in E$, $\langle y|x\rangle = \overline{\langle x|y\rangle}$ (propriété de antisymétrie),*
2. *Pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle \geq 0$ (positivité),*
3. *Pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle = 0 \iff x = 0$ (définie positive).*

Une application satisfaisant les propriétés 1, 2 et 3 (mais pas nécessairement 4) est appelée un semi-produit scalaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on appelle $\langle\cdot|\cdot\rangle$ produit scalaire euclidien (resp. hermitien).

Définition A.8. *Le couple constitué d'un espace vectoriel E et d'un produit scalaire sur E est appelé un espace pré-hilbertien réel (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou complexe (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

Exemples.

1. L'espace $E = \mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire : $\langle x|y\rangle = \sum_{j=1}^d x_j y_j$, est appelé l'*espace euclidien canonique* de dimension d.
   L'espace $E = \mathbb{C}^d$ muni du produit scalaire : $(x|y) = \sum_{j=1}^d x_j \bar{y}_j$, est appelé l'*espace hermitien canonique* de dimension d.
2. Soit Ω un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{L}^2(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables au sens de Lebesgue et de carré intégrable dans Ω à valeurs dans $\mathbb{K}$. On munit $\mathcal{L}^2$ d'une relation d'équivalence

$$f \sim g \iff f = g \text{ presque partout sur } \quad \Omega.$$

   L'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{L}^2/\sim$ est noté $L^2(\Omega)$ Comme d'habitude, on ne distinguera pas entre les fonctions (dans $\mathcal{L}^2$) et les classes d'équivalence (dans L^2).
   La relation

$$\langle f|g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

$$\langle f|g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

   définit sur $L^2(\Omega)$ un produit scalaire.

3. On note ℓ^2 l'espace des suites de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$: un élément de ℓ^2 est une suite $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant $\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2 < \infty$. On vérifie facilement que l'expression
$$\langle x|y\rangle_{\ell^2} = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j \overline{y}_j$$
est bien définie pour $x, y \in \ell^2$, et est un produit scalaire.

L'inégalité suivante est fondamentale dans l'étude des espaces de Hilbert.

Proposition A.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit E un espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Pour tous $x, y \in E$ on a*
$$|\langle x|y\rangle| \leq \sqrt{\langle x|x\rangle}\sqrt{\langle y|y\rangle}.$$

Remarque A.2. *Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz :* pour $x, y \in E$, $|\langle x|y\rangle| = \|x\|\|y\|$ si et seulement si x et y sont liés.

Corollaire A.7. *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. La relation*
$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$
définit une norme sur E.

Dans la suite, H est un espace préhilbertien, on notera (sauf précision contraire) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire sur H et $\|\cdot\|$ la norme associée. On peut remarquer que la donnée de la norme sur H permet de retrouver le produit scalaire, par exemple dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, par les formules suivantes :
$$\Re e\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right);$$
$$\Im m\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Par exemple, si $H = L^2(\Omega)$ (exemple 2 ci-dessus),
$$\|f\| = \left(\int_\Omega |f|^2\,dx\right)^{1/2},$$
si $H = \ell^2$,
$$\|x\| = \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2\right)^{1/2}.$$

Une conséquence immédiate mais utile de la définition de la norme d'un espace préhilbertien est l'*identité du parallélogramme*.

Proposition A.5. *Si x et y sont deux éléments d'un espace préhilbertien, alors*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Définition A.9. *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire.*

Exemples :

1. L'espace $\mathbb{C}^n$ des suites $z = (z_1, \ldots, z_n)$ de nombres complexes est muni du produit scalaire hermitien suivant
$$\langle z|z'\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z}'_k.$$
Les espaces normés de dimension finie étant toujours complets, l'espace $\mathbb{C}^n$ et plus généralement les espaces pré-hilbertiens de dimension finie, appelés aussi espaces hermitiens, sont des espaces de Hilbert.
2. L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$).
3. L'espace ℓ^2 est un espace de Hilbert.

Théorème A.9 (Projection sur un convexe fermé)**.** *Soit C un convexe fermé et non vide d'un espace de Hilbert H. Alors, pour tout point $x \in H$, il existe un unique point $x_C \in C$ tel que*

$$\|x - x_C\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

Ce point, appelé projection de x sur C et noté $x_C = P_C(x)$, est caractérisé par la propriété suivante :

$$x_C \in C \quad \text{et} \quad \forall z \in C, \quad \Re e\langle x - x_C | z - x_C\rangle \leq 0. \tag{1}$$

Remarque A.3. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la caractérisation (1) (où $\Re e$ ne figure pas) exprime que $x_C = P_C(x)$ est l'unique point $y \in C$ tel que, pour tout $z \in C$, l'angle des vecteurs $x - y$ et $z - y$ est obtus (c'est-à-dire supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$).

Soit A une partie d'un espace de Hilbert H. L'orthogonal de A dans H est l'ensemble noté $A^\perp$ formé des éléments orthogonaux à tous les éléments de A, c'est-à-dire

$$A^\perp = \{y \in H : \forall\, x \in A,\ \langle x|y\rangle = 0\}.$$

Proposition A.6. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors P_F est un opérateur linéaire de H sur F. Si $x \in H$, alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in H$ tel que*

$$y \in F \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp.$$

Corollaire A.8. *Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert H,*

$$H = \bar{F} \oplus F^{\perp}.$$

En particulier, F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

Corollaire A.9 (Critère de totalité)**.** *On dit qu'un sous-ensemble A de l'espace de Hilbert H est total si $Vect(A)$ (sous-esapce vectoriel engendré par A) est dense dans H.*

Pour que A soit total, il faut et il suffit que $A^{\perp}$ soit réduit à $\{0\}$.

Il est utile de comparer la notion de sous-ensemble (dit aussi système) total à la notion algébrique de partie génératrice (ou système de générateurs). On sait que $A \subset H$ est un système de générateurs si $Vect(A) = H$, alors que A est un système total si $Vect(A)$ est partout dense. Ces deux conditions coïncident en dimension finie, mais en dimension infinie la seconde est beaucoup moins exigeante.

On suppose que H est un espace de Hilbert. Le théorème de représentation de Riesz énoncé ci-dessous décrit le dual topologique de H. On rappelle que le dual topologique E' d'un espace de Banach E est l'espace des formes linéaires continues sur E.

Théorème A.10 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soient H un espace de Hilbert et H' son dual topologique. Soit T une forme linéaire sur H. Alors, $T \in H'$ si et seulement s'il existe $y \in H$ tel que*

$$\forall\, x \in H, \quad T(x) = \langle x|y \rangle.$$

De plus, $\|T\| = \|y\|$.

Définition A.10. *Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de H est dite famille orthogonale si pour tous $i \neq j$, $x_i \perp x_j$. Une famille orthogonale dont tous les éléments sont de norme égale à 1 est dite famille orthonormale (ou orthonormée).*

Remarque A.4. Une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une *base hilbertienne* de H si elle est :

1. orthonormée : $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, $\langle e_n|e_m \rangle = \delta_{n,m}$, où $\delta_{n,m}$ est le symbole de Kronecker [11].
2. totale : l'espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans H, c'est-à-dire, tout élément de H est limite d'une suite de combinaissons linéaires d'éléments de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition A.11. *Une base hilbertienne de H est une famille orthonormale totale de H.*

Exemple. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in]-\pi, \pi[$, on définit $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$. Alors, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]-\pi, \pi[$.

Le procédé d'orthonormalisation de Gram [12]-Schmidt [13] montre que tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie admet une base hilbertienne. On part d'une famille

11. Leopold Kronecker, 1823–1891,mathématicien allemand
12. Jorgen Pedersen Gram, 1850–1916, mathématicien danois
13. Erhard Schmidt, 1876–1959, mathématicien allemand

dénombrable dense, on en extrait une famille libre qui engendre le même espace vectoriel, et on orthonormalise cette famille libre par Gram-Schmidt comme en dimension finie.

Les bases hilbertiennes ne sont pas (sauf en dimension finie) des bases au sens algébrique du terme. Un élément de H ne pourra pas s'écrire, en général, comme combinaison linéaire finie des vecteurs de base, mais il pourra s'écrire (sous forme de série) comme limite de telles combinaisons.

Théorème A.11. *Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.*

1. *Tout élément $x \in H$ peut se décomposer de façon unique sous forme d'une série convergente dans H*
$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(x) e_n \quad c_n(x) \in \mathbb{C}.$$
Les composantes $c_n(x)$ sont données par
$$c_n(x) = e_n|x\rangle,$$
et vérifient l'égalité de Bessel-Parceval :
$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n(x)|^2.$$
2. *Réciproquement, étant donnés des scalaires γ_n vérifiant $\sum_n |\gamma_n|^2 < +\infty$, la série $\sum_n \gamma_n e_n$ converge dans H et sa somme f vérifie $c_n(x) = \gamma_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Références

[1] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications,* Masson, 1983.

[2] F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle,* Masson, 1997.

[3] F. Golse, Y. Laszlo, F. Pacard, C. Viterbo, *Analyse réelle*, Polycopié de l'École Polytechnique.

[4] J. Lamboley, H. Le Dret, *Analyse fonctionnelle approfondie et calcul de variations,* Sciences Sorbonne Université.

[5] P. G. Lemarié-Rieusset, *Analyse Fonctionnelle,* Polycopié M1 MINT, Université Paris Saclay - UEVE, 2019–2020.