Topologie

Julia Matos

L3 Mathématiques et L3 Double-licence Mathématiques-Économie
Université d'Evry Val-d'Essonne
Année 2017/2018

Table des matières

Ce polycopié est entièrement inspiré du polycopié de P. G. Lemarié-Rieusset [1] et du livre de J.-C. Yoccoz [3].

1 Suites

1.1 Définition et exemples

Définition 1.1 *Soient E et I deux ensembles. Une* **famille d'éléments de E indexée par l'ensemble** I*, notée $(u_i)_{i\in I}$ est la donnée pour chaque indice $i \in I$ d'un élément $u_i \in E$. On note E^I l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I.*

Une **suite à valeurs dans** E *est une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. On notera $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans E.*

Une famille $(u_n)_{n\geq n_0}$ d'éléments de E indexée par l'ensemble des entiers naturels plus grands qu'un entier n_0 est appelée une suite d'éléments de E définie à partir du rang n_0.

Exemples.

1. Soit $E = C(\mathbb{R})$ et $f_n(x) = nx$, $x \in \mathbb{R}$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E indexée par l'ensemble $\mathbb{N}$.
2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble X. On définit la réunion $\cup_{i\in I} A_i$ et l'intersection $\cap_{i\in I} A_i$ par
$$\cup_{i\in I} A_i = \{x \in X : \exists\, i \in I \text{ t.q. } x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \cap_{i\in I} A_i = \{x \in X : \forall\, i \in I,\;\; x \in A_i\}.$$

Une suite à valeurs réelles est appelée **suite numérique**.

Définition 1.2 (Limite d'une suite numérique) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.*

1. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (lorsque n tend vers $+\infty$) si*
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N \quad |u_n| < \varepsilon.$$
2. *On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ (lorsque n tend vers $+\infty$) si la suite $v_n = u_n - l$ converge vers 0, c'est-à-dire*
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| < \varepsilon,$$
et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** *s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que u_n converge vers l.*

Remarque 1.1 Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si elle vérifie la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre d'indices n tels que $|u_n| \geq \varepsilon$ est fini.

On rappelle la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1 (Propriété de la borne supérieure) *Toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, notée $\sup A$, définie comme le plus petit des majorants de A :*
$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall\, a \in A, \quad a \leq S \\ \forall\, M \;\; \textit{majorant de} \;\; A,\; S \leq M. \end{cases}$$

Le résultat suivant donne une caractérisation de la borne supérieure d'une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1 *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et S un majorant de A. On a $S = \sup A$ si et seulement si l'une des deux propriétés (équivalentes) est vérifiée :*

1. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $S - \varepsilon < a \leq S$,*
2. *il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers S.*

Remarque 1.2 Une partie de $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement majorée ou minorée, car $\mathbb{R}$ n'admet pas plus grand élément, ni plus petit élément. Il est alors commode de rajouter à $\mathbb{R}$ deux ensembles distinctes et n'appartenant pas à $\mathbb{R}$ que nous noterons $+\infty$ et $-\infty$; on obtient ainsi la **droite achevée** $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. On prolonge à $\overline{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ en posant $-\infty < x < +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, $\overline{\mathbb{R}}$ est un ensemble totalement ordonné dont toute partie est bornée supérieurement et inférieurement. De plus, une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A \in \mathbb{R}$ et dans ce cas, $\sup_{\mathbb{R}} A = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} A$.

Corollaire 1.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique croissante (c'est-à-dire, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n$). Alors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. De plus, on a dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*

Preuve. Il suffit de démontrer la condition suffisante. Par la propriété de la borne supérieure, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une borne supérieure $l = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$. D'après la Proposition 1.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $l - \varepsilon \leq x_N \leq l$, d'où $l - \varepsilon \leq x_n \leq l$ pour tout $n \geq N$. Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. □

Pour x nombre réel, la partie entière de x, notée $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. Plus précisement, on a le résultat suivant.

Proposition 1.2 (Partie entière) *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique nombre entier $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et $x - 1 < E(x) \leq x$ appelé partie entière de x.*

Preuve. Pour $x \geq 0$, par la propriété d'Archimède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq x$. L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}^* : n \leq x\}$ est donc borné et donc fini. Alors, $E(x) = \max A$. □

Exemple. La suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

1ère démonstration : si $\varepsilon > 0$ et si $N(\varepsilon) = 1 + E\left(\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right)$, alors pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, on a

$$n \ln 2 > \ln\frac{1}{\varepsilon} \implies 2^n = e^{n\ln 2} > \frac{1}{\varepsilon} \implies \left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon.$$

2ème démonstration : la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0), donc convergente. Soit $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = l$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans égalité :

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^n},$$

on obtient $l = \frac{1}{2}l$ et donc $l = 0$.

Proposition 1.3 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques réelles. Alors*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes , alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont aussi convergentes et*
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n+\lim_{n\to+\infty}v_n,\qquad \lim_{n\to+\infty}u_nv_n=\lim_{n\to+\infty}u_n\times\lim_{n\to+\infty}v_n.$$
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Une notion utile est la notion de série numérique.

Définition 1.3 (Somme d'une série numérique convergente)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle **série de terme général** u_n *la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $S_n=\sum_{k=0}^n u_k$. Les nombres S_n sont appellés les* **sommes partielles** *de la série. Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite (finie ou non), on la note $S=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ et on l'appelle* **somme de la série**.

Si cette limite est finie, la série est dite **convergente**, *autrement elle est dite* **divergente**.

Définition 1.4 *La différence entre la somme de la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ (lorsqu'elle existe et est finie) et S_n est appelée* **reste d'ordre** n *de la série :*
$$R_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k,\qquad \text{où}\qquad S=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n.$$

On se rappelle de certaines propriétés des séries numériques.

Proposition 1.4

1. *Soit $\sum_{n\geq 0}u_n$ une série à termes positifs (c'est-à-dire : $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 0$). Alors, elle est convergente si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Dans ce cas*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}S_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}S_n.$$
Sinon, elle diverge vers $+\infty$ et on note $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=+\infty$.
2. *Soit $\sum_{n\geq 0}u_n$ une série absolument convergente (c'est-à-dire : la série à termes positifs $\sum_{n\geq 0}|u_n|$ est convergente). Alors la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ est convergente.*

1.2 Suites extraites. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 1.5 (Suite extraite) *Soient E un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E indexée par un ensemble I. Si J est une partie de I ($J\subset I$), la* **sous-famille** $(u_i)_{i\in J}$ *de la famille $(u_i)_{i\in I}$ consiste à ne retenir la donnée des $e_i\in E$ que pour les indices $i\in J$.*

Une **suite extraite** *d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E est une sous-famille $(u_n)_{n\in A}$ où A est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Écrivant*
$$A=\{n_0,n_1,n_2,\cdot,n_k,n_{k+1},\cdots\},\quad \text{avec}\quad n_k<n_{k+1},\quad \forall\, k\in\mathbb{N},$$
on voit que A peut s'écrire $A=\varphi(\mathbb{N})$ où l'application $\varphi:k\mapsto\varphi(k)=n_k$ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. La suite extraite (ou sous-suite) $(u_n)_{n\in A}$ sera notée $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On peut extraire de cette suite la sous-suite des termes de rang pair : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et la sous-suite des termes de rang impair : $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.3 *Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.*

Proposition 1.5 *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.*

Définition 1.6 (Valeur d'adhérence) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Le nombre l est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$.*

Exemple 1. La suite $u_n = (-1)^n$ a deux valeurs d'adhérence : 1 et -1.

Exemple 2. La suite zéro-virgule. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme suit : on écrit n en base 10 et on écrit devant "0,". Plus précisemment, pour $n = 1, \ldots, 9$, on pose $u_n = \frac{n}{10}$; pour $n = 10, \ldots, 99$, on pose $u_n = \frac{n}{100}$; plus généralement, pour $n \in [10^{k-1}, 10^k - 1]$, on pose $u_n = n10^{-k}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'intervalle $[\frac{1}{10}, 1]$.

Théorème 1.2 (Bolzano-Weierstrass) *Toute suite bornée de nombres réels a au moins une valeur d'adhérence.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle bornée. On pose $v_n = \sup_{p\geq n} u_p$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc convergente, on note l sa limite. On construit une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $|l - u_{n_k}| \leq \frac{1}{k}$, pour $k > 0$. On effectue cette construction par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. On prend, par exemple, $n_0 = 0$ et on suppose définis $n_1, \cdots, n_{k-1}$. Alors, il existe $n > n_{k-1}$ tel que $|l - v_n| \leq \frac{1}{2k}$ et d'après la définition de v_n, il existe $n_k \geq n$ tel que $|v_n - u_{n_k}| \leq \frac{1}{2k}$. D'où $|l - u_{n_k}| \leq \frac{1}{k}$. La suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi construite converge vers l. □

Remarque 1.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle bornée. Les nombres

$$\limsup u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{p\geq n} u_p \quad \text{et} \quad \liminf u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{p\geq n} u_p$$

sont la plus grande valeur d'adhérence et la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivement. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\limsup u_n = \liminf u_n$.

1.3 Normes dans $\mathbb{R}^n$

Dans la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1.7 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une norme sur E est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. **Positivité :** *pour tout $x \in E$, $N(x) \geq 0$.*
2. **Homogénéité :** *pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.*

3. **Inégalité triangulaire :** *si $x, y \in E$, alors $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.*

4. **Séparation :** *si $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$.*

Une application qui satisfait les propriétés 1., 2. et 3. mais pas forcèment 4. est appelé une semi-norme sur E.

Habituellement une norme est notée par $N(x) = \|x\|$ ou $N(x) = |x|$.

Il est important de retenir l'inégalité suivante, conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire : si $\|\cdot\|$ est une semi-norme sur E, alors

$$\forall x, y \in E, \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Un *espace vectoriel normé* est la donnée d'un espace vectoriel E et d'une norme $\|\cdot\|$ sur E.

Exemple. La norme naturelle sur $\mathbb{R}$ est la valeur absolue. Dans toute la suite, en absence d'indication contraire, l'ensemble $\mathbb{R}$ sera toujours muni de cette norme et de la distance qu'elle définit.

La norme naturelle sur $\mathbb{C}$ est le module, si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemples de normes dans $\mathbb{R}^n$.

1. La norme
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$
est la norme produit formée à partir de la norme usuelle sur $\mathbb{R}$.
2. La relation
$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$
définie une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3. On définit la *norme euclidienne canonique* dans $\mathbb{R}^n$ par :
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad \text{pour} \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$$

Définition 1.8 *Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On dit que N_1 et N_2 sont* **équivalentes** *s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que*

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Théorème 1.3 *Dans un espace de dimension finie E, toutes les normes sont équivalentes.*

Preuve. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avec $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, on note

$$N_2(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

L'application N_2 ainsi définie sur E est une norme.

Il suffit maintenant de montrer que toute norme sur E est équivalente à celle-ci. Soit N_1 une norme sur E. On a

$$N_1(x) = N_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N_1(e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \max_{1\leq j\leq d} N_1(e_j) = N_2(x) \max_{1\leq j\leq d} N_1(e_j).$$

Soit $A = \{x \in E : N_2(x) = 1\}$ et $\theta = \inf_{x\in A} N_1(x)$. Par la caractérisation de borne inférieure (voir Proposition 1.1) ; il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de E telle que $N_2(x_n) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} N_1(x_n) = \theta$. On applique d fois le théorème de Bolzano-Weierstrass pour trouver $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n),i} \to x_{\infty,i}$ dans $\mathbb{K}$. Alors,

$$\theta = \inf_A N_1(x) = N_1((x_{\infty,1}, \ldots, x_{\infty,d})) = N_1(x_\infty) > 0$$

et $N_2(x_\infty) = 1$. Donc, pour tout $x \in E$,

$$N_1(x) \geq N_1(x_\infty) N_2(x).$$

□

Remarque 1.5 La réciproque du Théorème 1.3 est vraie. Mais le résultat est faux en dimension infinie.

2 Convergence dans un espace métrique

2.1 Distance

Définition 2.1 (Distance) *Sur un ensemble E, on appelle* **distance** *une application d : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. **Positivité :** *pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) \geq 0$.*
2. **Symétrie :** *pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$.*
3. **Inégalité triangulaire :** *pour tous $x, y, z \in E$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.*
4. **Séparation :** *pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$*

Un **espace métrique** (E, d) est un ensemble E muni d'une distance d.

Remarque 2.1 Une conséquence directe de l'inégalité triangulaire est l'inégalité suivante :

$$\forall\, x, y, z \in E, \quad |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z).$$

Exemples.

1. *La distance discrète sur E* : $d(x,y) = 0$ si $x = y$ et $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$.
2. *La distance usuelle sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$* : $d(x,y) = |x - y|$, $x, y \in \mathbb{K}$.
3. *La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$* :

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

On se rappelle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$:

$$\forall\, (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

L'inégalité triangulaire s'obtient en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i + z_i - y_i)(x_i - y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i||x_i - y_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i||x_i - y_i| \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \\
&= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2} \right) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},
\end{aligned}$$

et donc $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

4. Sur $C([0,1],\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on peut définir les distances :
$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt,$$
$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2\,dt},$$
$$d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|.$$

Définition 2.2 *Soit (E,d) un espace métrique et F une partie de E. Alors d définit une distance $d_{|F}$ sur F par $d_{|F}(x,y) = d(x,y)$, pour tous $x,y\in F$. On dira que l'espace métrique $(F,d_{|F})$ (ou simplement F) est une* **sous-espace** *de l'espace métrique (E,d).*

Proposition 2.1 (Distance produit) *Soient (E_1,d_1) et (E_2,d_2) deux espaces métriques. L'application d définie par*
$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2),$$
est une distance sur $E_1\times E_2$, appelée la **distance produit***. L'espace métrique $(E_1\times E_2,d)$ est appelé* **espace produit** *des espaces métriques (E_1,d_1) et (E_2,d_2).*

2.2 Convergence d'une suite

La notion de distance permet de définir la limite d'une suite à valeurs d'un espace métrique (E,d).

Définition 2.3 *Soit (E,d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge vers une limite** *$x\in E$ si*
$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x) = 0.$$
On note alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe $x\in E$ tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Proposition 2.2 *La limite d'une suite convergente de $E^{\mathbb{N}}$ est unique.*

Exemples.

1. Si d est la distance discrète sur E, alors une suite est convergente si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.
2. Sur $(\mathbb{R}^n,d)$, où d est la distance euclidienne, une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si, pour tout $1\le i\le n$, la suite numérique $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On dit que deux distances sur un même ensemble E sont **topologiquement équivalentes** si elles ont les mêmes suites convergentes.

Exemples.

1. On dit que deux distances d_1 et d_2 sur E sont **équivalentes** s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que
$$\forall\, x, y \in E, \quad \alpha d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \beta d_2(x,y).$$
Il est facile de montrer que deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes.
2. Soit $E = [0, 2\pi[$. La distance d_1 définie par $d_1(x,y) = |e^{ix} - e^{iy}|$ n'est pas topologiquement équivalente à la distance usuelle : $d_2(x,y) = |x-y|$. En effet, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$, avec $x_n = 2\pi - \frac{1}{n}$, ne converge pas dans E pour la distance d_2 mais $\lim_{n\to+\infty} d_1(x_n, 0) = 0$.
3. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. Les distances d_1, d_2 et d_∞ ne sont pas topologiquement équivalentes. On peut considérer par exemple les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $f_n(t) = e^{-nt}$ et $g_n(t) = \sqrt{n}e^{-nt}$.

Proposition 2.3 *Soit (E,d) un espace métrique et soit F une partie de E. Alors, une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ est convergente dans le sous-espace métrique $(F, d_{|F})$ si et seulement si elle est convergente dans (E,d) et que sa limite appartient encore à F.*

Proposition 2.4 *Soient $(E_1, d_1), \ldots, (E_k, d_k)$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, k espaces métriques. Une suite $((x_n^1, \ldots, x_n^k))_{n\in\mathbb{N}} \in (E_1 \times \ldots \times E_k)^{\mathbb{N}}$ est convergente pour la distance produit si et seulement si la suite $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans (E_i, d_i), pour tout $1 \leq i \leq k$.*

Le résultat suivant nous indique que l'on aurait pu faire un autre choix pour la distance produit :

Proposition 2.5 *Si $(E_1, d_1), \ldots, (E_k, d_k)$ sont k espaces métriques (où $k \in \mathbb{N}^*$), alors les distances D_1, D_2 et D_∞ définies sur le produit $E_1 \times \ldots \times E_k$ par*

$$D_1((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i),$$

$$D_2((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)^2},$$

$$D_\infty((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max_{1\leq i\leq n} d_i(x_i, y_i),$$

où $x_i, y_i \in E_i$, pour tout $1 \leq i \leq k$, sont équivalentes (et donc aussi topologiquement équivalentes). Plus précisemment : pour tous $x, y \in E_1 \times \ldots \times E_k$,

$$D_\infty(x,y) \leq D_2(x,y) \leq D_1(x,y) \leq n D_\infty(x,y).$$

Nous généralisons la notion de valeur d'adhérence d'une suite dans un espace métrique (E,d).

Définition 2.4 *Soit E un ensemble et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. Une* **suite extraite** *de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $y_n = x_{\varphi(n)}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Le point x est une **valeur d'adhérence** *ou un* **point d'accumulation** *de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x$.*

Remarque 2.2 Soient $(E_1, d_1), \ldots, (E_k, d_k)$ des espaces métriques et soint $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E_i, pour tout $1 \leq i \leq k$. On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E = E_1 \times \ldots \times E_k$ par $x_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,k})$, $n \in \mathbb{N}$.

Si $x = (x_1, \ldots, x_k)$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors, pour tout $1 \leq i \leq k$, le point x_i est une valeur d'adhérence de la suite $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ dans (E_i, d_i). La réciproque n'est pas vraie.

Contre-exemple : On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$x_{2n} = (x_{1,2n}, x_{2,2n}) = (n, 0) \quad \text{et} \quad x_{2n+1} = (x_{1,2n+1}, x_{2,2n+1}) = (0, n).$$

Il est facile de voir que 0 est valeur d'adhérence des deux suites $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ mais $(0, 0)$ n'est pas valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.6 *Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et a la même limite.*

2.3 Application continue entre deux espaces métriques

Définition 2.5 *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors, f est continue au point $x \in E$ si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

1. $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall y \in E, \quad d_E(x, y) < \delta \implies d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$
2. $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n\to+\infty} d_E(x_n, x) = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} d_F(f(x_n), f(x)) = 0.$

Remarque 2.3 En conséquence de la proposition 2.4*, si (E, d_E), (F, d_F) et (G, d_G) sont trois espaces métriques, si $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ sont deux applications et si $x \in E$, alors (f, g) est continue en x (comme application de E dans l'espace produit $F \times G$) si et seulement si f et g sont continues au point x.*

Proposition 2.7 *Soient (E, d_E), (F, d_F) et (G, d_G) trois espaces métriques et soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Alors, si f est continue au point x de E et g est continue au point $f(x)$ de F, alors $g \circ f$ est continue au point x.*

Proposition 2.8 (Convergence uniforme) *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite applications de E dans F qui* **converge uniformément** *vers une application f, c'est-à-dire :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in E} d_F(f_n(x), f(x)) = 0.$$

Alors, si toutes les applications f_n sont continues en un même point x_0 de E, leur limite f est aussi continue en x_0.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par la convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{x\in E} d_F(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puisque f_N est continue en $x_0 \in E$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$d_E(x, x_0) < \delta \implies d_F(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors, si $d_E(x, x_0) < \delta$, on a

$$d_F(f(x), f(x_0)) \leq d_F(f(x), f_N(x)) + d_F(f_N(x), f_N(x_0)) + d_F(f_N(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \square$$

Remarque 2.4 La limite pontuelle d'une suite de fonction continues peut ne pas être continue.

Contre-exemple. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. Pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \to f(x)$ lorsque $n \to +\infty$ où $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$. La fonction f n'est pas continue en $x = 1$.

3 Ouverts et fermés dans un espace métrique

3.1 Définitions

Définition 3.1 *Soit (E,d) un espace métrique et soient $x \in E$ et $r > 0$. La* **boule ouverte** *de centre x et rayon r est l'ensemble*

$$B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}.$$

La **boule fermée** *de centre x et rayon r est l'ensemble*

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in E : d(x,y) \leq r\}.$$

Définition 3.2 *Soient (E,d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et A une partie de E.*

1. *On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une* **suite bornée** *s'il existe $x \in E$ et $r > 0$ tels que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in B(x,r).$$

2. *On dit que A est une* **partie bornée** *de E s'il existe $x \in E$ et $r > 0$ tels que $A \in B(x,r)$.*

Exemples.

1. Il est évident que toute suite convergente dans (E,d) est une suite bornée.
2. L'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ n'est pas borné dans $\mathbb{R}^2$.
3. L'ensemble $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$ est borné dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.3 *Soit (E,d) un espace métrique et soit A une partie de E.*

1. *On dit que $x \in E$ est un* **point intérieur** *de A si $x \in A$ et si A contient une boule de centre x :*

$$\exists\, r > 0 : \quad B(x,r) \subset A.$$

On dit que A est un voisinage de x et on note $A \in \mathcal{V}_x$, si x est un point intérieur de A.

2. *L'ensemble des points intérieures de A est appelé l'* **intérieur** *de A et est noté $\mathring{A}$ ou $\mathrm{int}(A)$. On a l'équivalence :*

$$x \in \mathring{A} \iff \exists\, r > 0 : \quad B(x,r) \subset A.$$

Définition 3.4 *Soit A une partie d'un espace métrique (E,d).*

1. *A est un* **ouvert** *de E si $A = \mathring{A}$.*
2. *A est un* **fermé** *de E si son complémentaire $E \setminus A$ est un ouvert de E.*

Exemples.

1. Une boule ouverte est une partie ouverte.
Soit $A = B(a,r)$, avec $a \in E$ et $r > 0$. Soit $x \in B(a,r)$. On prend $r' = r - d(a,x) > 0$. Pour tout $y \in B(x,r')$, on a

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < r' + d(x,a) = r$$

alors $y \in B(a,r)$. On conclut que $B(x,r') \subset A = B(a,r)$. Donc, A est un ouvert de E

2. Une boule fermée est une partie fermée.
   Soit $A = \bar{B}(a,r)$, avec $a \in E$ et $r > 0$. On montre que $E \setminus \bar{B}(a,r)$ est un ouvert. Soit $x \in E \setminus \bar{B}(a,r)$. On prend $r' = d(a,x) - r > 0$. Pour tout $y \in B(x,r')$, on a
   $$d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x) < d(a,y) + r'$$
   et alors
   $$d(a,y) > d(a,x) - r' = r.$$
   Donc, $B(x,r') \subset E \setminus \bar{B}(a,r)$. D'où, $E \setminus \bar{B}(a,r)$ est un ouvert.
3. La partie vide $\emptyset$ et la partie totale E de E sont toujours des parties ouvertes et fermées de E.

Proposition 3.1 *Soient (E,d) un espace métrique, A une partie de E et $x \in A$. Alors, x est un point intérieur de A si et seulement si pour toute $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, $x_n \in A$ si $n \geq N$.*

En particulier, une partie A non vide est ouverte de E si et seulement si pour toute suite à valeurs dans E qui converge vers un élément de A est à valeurs dans A à partir d'un certain rang.

Remarque 3.1 *Soit A une partie d'un espace métrique (E,d). Alors,*

1. *$\mathring{A}$ est un ouvert de E. De plus, $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E contenu dans A.*
2. $\mathrm{int}(\mathring{A}) = \mathring{A}$.
3. *A est un ouvert de E si et seulement*
   $$\forall\, x \in A, \quad \exists\, r > 0 : \quad B(x,r) \subset A.$$

3.2 Union, intersection d'ouverts et de fermés

Soit (E,d) un espace métrique.

Proposition 3.2

1. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties ouvertes de E. L'union $\bigcup_{i\in I} A_i$ est une partie ouverte de E.*
2. *Soient $A_1, \ldots, A_k$ des parties ouvertes de E. L'intersection $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ est une partie ouverte de E.*

Preuve.

1. Si $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, il existe $j \in I$ tel que $x \in A_j$. Puisque A_j est ouverte, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A_j$. Alors, $B(x,r) \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

2. Si $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$, pour tout $i = 1, \dots, k$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset A_i$. On pose $r = \min_{1 \le i \le k} r_i > 0$. Alors, pour tout $i = 1, \dots, k$,

$$B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset A_i.$$

D'où, $B(x, r) \subset \bigcap\limits_{i \in I} A_i$. □

Proposition 3.3

1. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties fermées de E. L'intersection $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ est une partie fermée de E.*
2. *Soient $A_1, \dots, A_k$ des parties fermées de E. L'union $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ est une partie ouverte de E.*

Preuve. Conséquence de la proposition précédente, en passant aux complémentaires. □

Remarque 3.2

1. En général, l'intersection d'une famille infinie de parties ouvertes n'est pas ouverte. *Exemple.* Soit $E = \mathbb{R}$ et $A_n =]-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}[$, pour tout $n \geq 1$. On a $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \{0\}$ qui n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}$ (c'est une partie fermée de $\mathbb{R}$).
2. En général, l'union d'une famille infinie de parties fermées n'est pas fermée. *Exemple.* Soit $E = \mathbb{R}$ et $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$, pour tout $n \geq 1$. On a $\bigcup_{n \geq 1} A_n =]0, 1]$ qui n'est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

Remarque 3.3 Soit A une partie de E. L'intérieur de A est l'union des parties ouvertes de E contenues dans A.

3.3 Adhérence et caractérisation des parties fermées par les suites

Définition 3.5 *L'intersection des parties fermées de E contenant A est la plus petite partie fermée de E contenant A et s'appelle l'***adhérence** *de A dans E. On note $\bar{A}$ l'adhérence de A.*

Remarque 3.4 Soit A une partie d'un espace métrique (E, d). Alors :

1. $A \subset \bar{A}$.
2. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.
3. $\mathrm{int}(E \setminus A) = E \setminus \bar{A}$. Cet ensemble est appelé l'**extérieur** de A.
4. $\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$.
5. On appelle **frontière** de A, notée ∂A ou $\mathrm{Fr}A$, l'ensemble des points qui ne sont intérieures ni extérieurs à A. Plus précisemment,

$$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap (E \setminus \mathring{A}).$$

Les ensembles ∂A et $\mathring{A}$ sont disjoints.

Proposition 3.4 *Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Soit $x \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $x \in \bar{A}$.
2. *Pour tout* $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
3. *Il existe une suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* A, *telle que* $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$.

Preuve. 3. $\implies$ 2. Pour tout $r > 0$, on a $x_n \in A \cap B(x, r)$, pour n assez grand.

2. $\implies$ 3. Pour $n \geq 1$, on prend $x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$. Alors, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A et $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$

1. $\implies$ 2. On montre la contraposée. Si $B(x, r) \cap A = \emptyset$, alors $B(x, r)$ est une partie ouverte contenue dans $E \setminus A$, donc dans $\mathrm{int}(E \setminus A) = E \setminus \bar{A}$, et alors $x \notin \bar{A}$.

2. $\implies$ 1. Si $x \notin \bar{A} = E \setminus \mathrm{int}(E \setminus A)$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \mathrm{int}(E \setminus A) \subset E \setminus A$. Donc, $B(x, r) \cap A = \emptyset$. □

Corollaire 3.1 *Soit A une partie de l'espace métrique E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *A est une partie fermée de E.*
2. $\bar{A} = A$.
3. *La limite de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge dans E appartient à A.*

Proposition 3.5 *Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (E, d). Alors,*

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Remarque 3.5 L'adhérence d'une intersection n'est pas en général l'intersection des adhérences.

Contre-exemple. Soient $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus A$. Alors, $\bar{A} = \bar{B} = \mathbb{R}$ et $A \cap B = \emptyset$.

Définition 3.6 *Soit (E, d) un espace métrique et D une partie de E. On dit que D est* **dense** *dans E si $\bar{D} = E$.*

Exemple. $D = \mathbb{Q}$ est dense dans $E = \mathbb{R}$ (muni de la distance usuelle).

3.4 Sous-espaces

Soit (E, d) un espace métrique et F une partie de E munie de la distance induite $d_{|F}$.

Théorème 3.1 *Soit A une partie de F.*

1. *A est une partie ouverte dans F si et seulement s'il existe une partie O ouverte dans E telle que $A = O \cap F$.*
2. *A est une partie fermée dans F si et seulement s'il existe une partie C fermée dans E telle que $A = C \cap F$.*
3. *Si F est une partie ouverte de E, alors A est ouverte dans F si et seulement si elle est ouverte dans E.*
4. *Si F est une partie fermée de E, alors A est fermée dans F si et seulement si elle est fermée dans E.*

Preuve. 1. Soit A partie ouverte de F. Pour tout $x \in A$, il existe $r_x > 0$ tel que

$$B_F(x, r_x) = B(x, r_x) \cap F \subset A.$$

Alors, $O = \cup_{x \in A} B(x, r_x)$ est un ouvert de E et

$$A = O \cap F.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe une partie O ouverte dans E telle que $A = O \cap F$. Soit $x \in A$. Alors, $x \in B$ et il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$. Donc, $B_F(x, r) = B(x, r) \cap F \subset O \cap F = A$. On conclut que A est une partie ouverte dans F.

2. Une partie A est fermée dans F si et seulement si $F \setminus A$ est ouverte dans F. D'après la question 1, cela équivaut à dire qu'il existe O ouvert dans E telle que $(E \setminus A) \cap F = F \setminus A = O \cap F$, c'est-à-dire $A = (E \setminus O) \cap F$, où $E \setminus O$ est une partie fermée dans E.

3. Soit A une partie de F. Alors, A est ouverte dans F si et seulement s'il existe O ouverte dans E telle que $A = O \cap F$. Si A est ouverte dans F, puisque F est ouverte dans E, A le sera aussi (réunion de deux parties ouvertes est une partie ouverte). Réciproquement, si A est ouverte dans E, puisque $A = A \cap F$, on conclut que A est aussi une partie ouverte dans F.

4. Même raisonnement qu'en 3. □

3.5 Applications continues

Définition 3.7 *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est* **continue** *de E dans F (ou continue sur E) si elle est continue en tout point de E.*

Théorème 3.2 *Soient (E, d_E), (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue.*
2. *L'image réciproque par f d'une partie ouverte de F est une partie ouverte de E.*
3. *L'image réciproque par f d'une partie fermée de F est une partie fermée de E.*

Preuve. 2. $\Longleftrightarrow$ 3. Soit B une partie de F. Alors,

$$f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$$

D'autre part, B est ouverte dans F si et seulement si $F \setminus B$ est fermée dans F et $f^{-1}(B)$ est ouverte dans E si et seulement si $E \setminus f^{-1}(B)$ est fermée dans E, d'où l'équivalence.

1 $\Longrightarrow$ 2. Soient B une partie ouverte de F et $x \in f^{-1}(B)$. Alors, $f(x) \in B$ et il existe $r > 0$ tel que $B(f(x), r) \subset B$. Par la continuité de f, il existe $\delta > 0$ telle que

$$\forall\, z \in E, \quad d_E(x, z) < \delta \implies d_F(f(x), f(z)) < r.$$

Donc, pour tout $z \in B(x, r)$, $f(z) \in B$, c'est-à-dire $B(x, r) \subset f^{-1}(B)$.

2 $\Longrightarrow$ 1. Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. On pose $B = B(f(x), \varepsilon)$ qui est un ouvert de F. Alors, par l'hypothèse, $f^{-1}(B)$ est un ouvert de E. Il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B)$, c'est-à-dire

$$\forall\, y \in B(x, \delta), \quad f(y) \in B = B(f(x), \varepsilon),$$

ce qui équivaut à dire

$$d_E(x,y) < \delta \implies d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

$\square$

Remarque 3.6 L'image par f d'une partie ouverte (respectivement, fermée) dans E n'est pas nécessairement ouverte (respectivement, fermée) dans F. Exemple : Soient $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. L'image $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$ n'est ni ouverte ni fermée dans $\mathbb{R}$.

Exemple. L'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 > 0\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ car $A = f^{-1}(]0, +\infty[)$ où f est l'application continue sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ et $]0, +\infty[$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 3.8 *Soit $k > 0$. On dit que $f : E \longrightarrow F$ est k-**lipschitzienne** si*

$$\forall\, x, y \in E, \quad d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x,y).$$

On dit que f est **lipschitzienne** *s'il existe $k > 0$ telle que f est k-lipschitzienne.*

Proposition 3.6 *Si f est k-lipschitzienne sur E alors f est continue sur E.*

Preuve. Soit $x \in E$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ dans la définition de fonction continue en x. $\square$

4 Espaces vectoriels normés

4.1 Définitions

Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$ est appelé l'**espace vectoriel normé** $(E, \|\cdot\|)$. La définition de norme a été donnée en 1.7.

Proposition 4.1 *Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, alors $d(x,y) = \|x-y\|$ définit une distance sur E. On dit que d est la* **distance associée à la norme** $\|\cdot\|$.

Proposition 4.2 *Soient (E,N) un espace vectoriel normé et F est sous-espace vectoriel de E. Alors $N_{|F}$ est une norme sur F, appelée la* **norme induite**.

La distance sur F associée à la norme induite est la distance induite sur F par la distance sur E associée à la norme N.

Proposition 4.3 *Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$ et $(E_2, \|\cdot\|_2)$ des espaces normés. L'application $N : E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$N((x_1,x_2)) = N_1(x_1) + N_2(x_2)$$

est une norme sur $E_1 \times E_2$, appelée la **norme produit**.

La distance d sur $E_1 \times E_2$ associée à norme produit est bien la distance produit des distances d_1 et d_2, sur E_1 et E_2 respectivement, où $d_i(x,y) = N_i(x-y)$, pour $x, y \in E_i$ et $i = 1, 2$.

4.2 Applications linéaires continues

Théorème 4.1 *Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ deux espaces normés et $u : E_1 \longrightarrow E_2$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *u est continue.*
2. *u est continue en 0.*
3. *l'image par u de la boule unité $\bar{B}(0,1)$ (de E_1) est une partie bornée de E_2.*
4. *u est lipschitzienne.*
5. *Il existe $C > 0$ telle que*

$$\forall\, x \in E_1, \quad \|u(x)\|_2 \leq C\|x\|_1.$$

Preuve. 1. $\Longrightarrow$ 2. Il est évident.

2. $\Longrightarrow$ 3. Si u est continue en 0, il existe $\delta > 0$ telle que

$$\|x\|_1 \leq \delta \implies \|u(x)\|_2 \leq 1.$$

Si $x \in \bar{B}(0,1)$, alors

$$\delta\|u(x)\|_2 = \|u(\delta x)\|_2 \leq \delta \iff \|u(x)\|_2 \leq \frac{1}{\delta}.$$

3. $\Longrightarrow$ 4. Soit $C > 0$ telle que

$$\forall\, x \in \bar{B}(0,1), \quad \|u(x)\|_2 \leq C.$$

Soient $x, y \in E_1$ tels que $x - y \neq 0$. Alors, $\frac{x-y}{\|x-y\|_1} \in \bar{B}(0,1)$. Donc,

$$\|u(x) - u(y)\|_2 = \|u(x-y)\|_2 = \|x-y\|_1 \left\| u\left(\frac{x-y}{\|x-y\|_1}\right) \right\|_2 \leq C\|x-y\|_1.$$

D'où, u est C-lipschitzienne.

4. $\Longrightarrow$ 5. Il est évident (car $u(0) = 0$).

5. $\Longrightarrow$ 1. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. □

Rajouter un exemple - dernier exercice du DS 2017

Les applications linéaires continues de E_1 dans E_2 forment un sous-espace vectoriel de l'espace des applications linéaires de E_1 dans E_2 que l'on note $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. L'application $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E_1, E_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|u(x)\|_2,$$

définie une norme sur $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. De plus, pour tout $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$,

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|u(x)\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_2}{\|x\|_1},$$

et u est $\|u\|$-lipschitzienne, c'est-à-dire

$$\forall\, x \in E_1, \quad \|u(x)\|_2 \leq \|u\|\|x\|_2.$$

Le théorème précédent peut se généraliser pour les applications multilinéaires.

Théorème 4.2 *Soient $(E_1, \|\cdot\|_1)$, $(E_2, \|\cdot\|_2)$ et $(E_3, \|\cdot\|_3)$ trois espaces normés et $u : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_3$ une application bilinéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *u est continue.*
2. *u est continue en 0.*
3. *Il existe $C > 0$ telle que*

$$\forall\, (x_1, x_2) \in (E_1, E_2), \quad \|u(x_1, x_2)\|_2 \leq C\|x\|_1\|x\|_2.$$

Proposition 4.4 *Si E_1 est de dimension fine, toute application linéaire $u : E_1 \longrightarrow E_2$ est continue.*

Preuve. La continuité d'une application linéaire ne change pas si on remplace les normes par des normes équivalentes. On peut donc supposer E_1 muni de la norme :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

où $(e_1, \ldots, e_n$ est une base de E_1 (d'après le théorème 1.3, toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes). Alors, pour tout $x \in E_1$,

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|_2 &= \left\| u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \right\|_2 \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \right\|_2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|u(e_i)\|_2 \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|u(e_i\|_2) \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\
&= \max_{1 \leq i \leq n} \|u(e_i)\|_2 \|x\|_1.
\end{aligned}$$

5 Espaces compacts

5.1 Définitions

Définition 5.1 *Soit (E, d) un espace métrique et K une partie de E. On dit que K est une partie* **compacte** *de (E, d) si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K admet au moins une valeur d'adérence, c'est-à-dire il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in K$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x$.*

On dit que l'espace (E, d) est **compact** *si E est compacte dans (E, d).*

On dit q'une partie A de E est **relativement compacte** *si $\bar{A}$ est compacte dans E.*

Exemples.

1. Si E est un ensemble fini, alors E est compacte.
2. Soit $E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Alors (E, d) est compacte, où d est défini par :

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}|x_n - y_n|.$$

Proposition 5.1 *Soient (E_1, d_1), (E_1, d_1) des espaces métriques et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application continue. Si E_1 est compact, alors $f(E_1)$ est une partie compacte de E_2.*

Preuve. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(E_1)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E_1$ tel que $f(x_n) = y_n$. Comme E_1 est compact, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $a \in E_1$. Par la continuité de f,

$$\lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(a) \in f(E_1).$$

Proposition 5.2 *Soit A une partie d'un espace métrique (E, d). Si A est compacte, A est fermée dans E. Si E est compacte et A est fermé dans E, alors A est compacte.*

Preuve. Supposons que A est une partie compacte dans E. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Par la compacité de A, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans A. Alors, par l'unicité des valeurs d'adhérence pour une suite convergente, $x \in A$. Donc, A est fermée dans E.

Supposons que E est compacte et A est fermé dans E. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A. Comme E est compacte, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x \in E$. La partie A est fermée dans E, alors $x \in A$. D'où, le résultat. $\square$

Proposition 5.3 *soient $(E_1, d_1), \ldots, (E_k, d_k)$ des espaces métriques compacts. L'espace produit (E, d), où $E = E_1 \times \ldots \times E_k$ et d est la distance produit associée aux distances $d_1, \ldots, d_k$, est compact.*

Preuve. <u>Cas $k = 2$</u>. Soit (x_n, y_n) une suite de $E_1 \times E_2$. Puisque E_1 est compact, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente d'éléments de E_1. Puisque E_2 est compact, il existe une suite extraite $(y_{\psi(\varphi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente d'éléments de E_2. Alors, la suite $(x_{\psi(\varphi(n))}, y_{\psi(\varphi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $E_1 \times E_2$.

<u>Cas général</u>. On raisonne par récurrence sur $k \geq 2$. $\square$

5.2 Parties compactes de $\mathbb{R}^n$

Proposition 5.4 *Les intervalles fermés* $[a,b]$ *sont des parties compactes de* $\mathbb{R}$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 5.1 *Les parties compactes de* $\mathbb{R}^n$ *sont les parties fermées et bornées.*

Preuve. Toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (théorème 1.3). On peut supposer $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit A une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Alors, A est fermée (proposition 5.2). Supposons par contradiction que A n'est pas bornée. Alors, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de A telle que $\|x_n\|_\infty \geq n$, pour tout $n \geq 0$. Cette suite n'admet pas de valeur d'adhérence ce qui contradit le fait que A est une partie compacte.

Soit A une partie fermée et bornée de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Soit $R > 0$ tel que $A \subset \bar{B}(0,R) = [-R,R]^n$. L'intervalle $[-R,R]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$ et alors $[-R,R]^n$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Comme A est une partie fermée de $[-R,R]^n$, A est compacte (proposition 5.2). □

Corollaire 5.1 *Soient* (E,d) *un espace métrique compact (non vide) et* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors,* f *est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve. D'après la proposition 5.1, $f(E)$ est un compact de $\mathbb{R}$. Puisque $f(E)$ est bornée et fermée dans $\mathbb{R}$, il existe $a, b \in E$ tels que

$$\forall\, x \in E, \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

5.3 Recouvrements finis

Définition 5.2 *Soit* (E,d) *un espace métrique et* A *une partie de* E.

1. *Une famille* $(A_i)_{i\in I}$ *de parties de* E *est un* **recouvrement** *de* E *si* $E = \bigcup_{i\in I} A_i$.
   Un **sous-recouvrement** *est une sous-famille* $(A_j)_{j\in J}$, *avec* $J \subset I$, *telle que* $E = \bigcup_{j\in J} A_j$.
2. *Une famille* $(A_i)_{i\in I}$ *de parties de* E *est un* **recouvrement** *de* A *si* $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.
   Un **sous-recouvrement** *est une sous-famille* $(A_j)_{j\in J}$, *avec* $J \subset I$, *telle que* $A \subset \bigcup_{j\in J} A_j$.

Théorème 5.2 (Lebesgue) *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *un recouvrement par parties ouvertes d'un espace métrique compact* (E,d). *Alors, il existe* $r > 0$ *tel que, pour tout* $x \in E$, *il existe* $i \in I$ *tel que* $B(x,r) \subset A_i$.

Preuve. Par contradiction, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans E telle que, pour tout $n \geq 1$, $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est pas contenue dans A_i, pour tout $i \in I$. Par la compacité de E, il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = a \in E$. Il existe $j \in I$ telle que $a \in A_j$ et puisque A_j est ouverte, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset A_j$. Par la définition de limite, il existe $n_k > \frac{2}{\varepsilon}$ tel que $d(x_{n_k}, a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, on a

$$B\left(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}\right) \subset B\left(x_{n_k}, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset B(a,\varepsilon) \subset A_j,$$

une contradiction. □

Proposition 5.5 *Soient (E,d) un espace métrique compact et $r>0$. Alors, il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon r.*

Preuve. Cas contraire, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de E telle que $d(x_m,x_n)\geq r$, pour tous $m\neq n$. Cette suite n'admet pas de valeur d'adhérence ce qui contradit l'hypothèse de compacitié de E. □

Théorème 5.3 (Borel-Lebesgue) *Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E.*

1. *E est compact si et seulement si tout recouvrement de E par parties ouvertes admet un sous-recouvrement fini.*
2. *A est un compact de E si et seulement si tout recouvrement de A par parties ouvertes admet un sous-recouvrement fini.*

Preuve. Supposons que E est compact et que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement par parties ouvertes de E. Par la théorème 5.2, on peut considérer $r>0$ tel que toute boule ouverte de rayon r soit contenue dans l'une des A_i. D'après la proposition 5.5, il existe $x_1,\dots,x_k\in E$ tels que $E=\bigcup_{j=1}^k B(x_j,r)$. Puisque, pour tout $j\in\{1,\dots,k\}$, il existe $i_j\in I$ tel que $B(x_j,r)\subset A_{i_j}$, on conclut que

$$E=\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}.$$

Réciproquement, si (E,d) n'est pas compact, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans E sans valeur d'adhérence. Pour tout $x\in E$, il existe $r_x>0$ telle que $B_x=B(x,r_x)$ contient au plus un nombre fini de valeurs de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La famille $(B_x)_{x\in E}$ est un recouvrement par parties ouvertes de E, mais l'union de toute sous-famille finie ne peut contenir qu'un nombre fini de valeurs de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Corollaire 5.2 *Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de parties fermées non vides d'un espace métrique compact (E,d). Alors, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\neq\emptyset$.*

5.4 Continuité uniforme

Soient (E,d_E) et (F,d_F) deux espaces métriques et $f:E\longrightarrow F$ une application.

Définition 5.3 *On dit que l'application f est* **uniformément continue** *si*

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,\delta>0:\quad d_E(x,y)<\delta \implies d_F(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

Une fonction uniformément continue sur E est continue sur E. Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Théorème 5.4 (Heine) *Si E est compact et $f:E\longrightarrow F$ est continue, alors f est uniformément continue.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Par la continuité de f, pour tout $x \in E$, il existe $\delta_x > 0$ tel que

$$y \in B(x, \delta_x) \implies f(y) \in B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On a $E = \bigcup_{x \in E} B(x, \delta_x)$ et E compact, alors d'après le théorème 5.2, il existe $\delta > 0$ tel que toute boule ouvert de centre δ est contenue dans une boule $B(x, \delta_x)$. Si $y, z \in E$ et $d(y, z) < \delta$, il existe $x_0 \in E$ tel que $B(y, \delta) \subset B(x_0, \delta_{x_0})$ et donc

$$d(f(y), f(z)) \leq d(f(y), f(x_0)) + d(f(x_0), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

6 Espaces complets. Théorème du point fixe

6.1 Suites de Cauchy. Espaces métriques complets

Soit (E, d) un espace métrique.

Définition 6.1 *On dit que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *est une* **suite de Cauchy** *si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} d(x_{n+k}, x_n) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq N, \ \forall\, k \in \mathbb{N}, \ d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon,$$

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n, m \geq N, \ d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Proposition 6.1 *Toute suite convergente dans E est une suite de Cauchy.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente dans E. Alors, il existe $x \in E$ tel que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N} : \ \forall\, n \geq N, \ d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Par conséquent, pour tous $n, m \geq N$, on a

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Définition 6.2 *On dit que l'espace métrique (E, d) est* **complet** *si toute suite de Cauchy dans E est convergente.*

Une partie F de E est complète si l'espace métrique (F, d) est complet.

Un espace vectoriel normé complet est appelé un **espace de Banach**.

Proposition 6.2 *Une suite de Cauchy qui a un point d'adhérence, est convergente.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et x un point d'adhérence. Alors, il existe $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ suite extraite telle que $\lim_{n\to+\infty} d(x_{\phi(n)}, x) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n, m \geq N, \ d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq N, \ d(x_{\phi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, si $n \geq N$, on a

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\phi(n)}) + d(x_{\phi(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

c'est-à-dire, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x dans E. □

Exemples.

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ est complet pour la distance usuelle. On montre que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est bornée et admet donc une valeur d'adhérence (Théorème de Bonzano-Weierstrass). On conclut par la proposition 6.2.

   L'espace $\mathbb{R}$ est un espace de Banach.
2. Un espace muni de la distance de la topologie discrètre est complet.

Proposition 6.3 *Un espace métrique compact est complet.*

Preuve. Conséquence de la définition d'un espace compact et de la proposition 6.2. □

Proposition 6.4 *Soit E est un espace vectoriel normé et N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E. Alors, (E, N_1) est un espace de Banach si et seulement si (E, N_2) est un espace de Banach.*

Proposition 6.5 *Soit F une partie de E. On a :*

1. *si F est complète alors F est fermée dans E.*
2. *si E est complet et F est fermée dans E, alors F est complète.*

Preuve. Supposons F complète. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers $x \in E$. Alors, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et par complétude, converge dans F. Par l'unicité de limite, $x \in F$. Donc, F est fermée dans E.

Réciproquement, supposons que E est complet et F est fermée dans E. Une suite de Cauchy d'éléments de F converge dans E (qui est complet) et donc dans F (qui est fermée dans E). D'où, le résultat. □

Remarque. Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ un homéomorphisme. il est possible que E_1 soit complet sans que E_2 le soit (et vice versa). Par exemple, l'application

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

est un homéomorphisme. $\mathbb{R}$ est complet, mais $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ n'est pas complet (proposition 6.5).

Proposition 6.6 *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. Alors $E \times F$ est complet si et seulement si (E, d_E) et (F, d_F) sont complets.*

Preuve. Une suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E \times F$ est de Cauchy (respectivement, convergente) si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F (respectivement, convergentes). D'où, le résultat. □

Exemple. L'espace $\mathbb{R}^n$, muni de n'importe quelle norme, est un espace complet.

Proposition 6.7 *Un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série normalement convergente y est convergente, c'est-à-dire, si la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ est convergente alors $\sum_{n\geq 0} x_n$ est convergente dans E.*

Preuve. Supposons que E est complet et soit $\sum_{n\geq 0} x_n$ une série normalement convergente de E. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ est convergente, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\sum_{m\geq 1} \|x_{n+m}\| < \varepsilon$. Alors, pour tous $n \geq n_0$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\|S_{n+k} - S_n\| = \| \sum_{m=1}^{k} x_m\| \leq \sum_{m=1}^{k} \|x_{n+m}\| < \varepsilon.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et donc converge dans E, c'est-à-dire la série $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge dans E.

Réciproquement, supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E. Alors, il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)}\| < \frac{1}{2^n}.$$

Par comparaison, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)}\|$ converge. Alors, par l'hypothèse, la série $\sum_{n\geq 0}(x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)})$ converge dans E. Puisque,

$$\sum_{k=0}^{n}(x_{\phi(k+1)} - x_{\phi(k)}) = x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(0)},$$

on conclut que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence. Alors, par la proposition 6.2 la suite converge dans E.

Proposition 6.8 *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. L'ensemble $C_b(E, F)$ des fonctions continues bornées de (E, d_E) vers (F, d_F) est un espace métrique avec la distance de la convergence uniforme d_∞ définie par*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x\in E} d_F(f(x), f(y)).$$

Si (F, d_F) est complet alors $(C_b(E, F), d_\infty)$ est complet.

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $C_b(E, F)$. Pour tout $x \in E$, on a

$$d_F(f_n(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m),$$

donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans F, et elle converge vers une limite $f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n, m \geq N, \quad d_F(f_n(x), f_m(x)) \leq d_\infty(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En passant à la limite cette inégalité lorsque $m \to +\infty$, on a, pour tout $x \in E$ et $n \geq N$,

$$d_F(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $x_0 \in E$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} d_F(f(x_0), f(x)) &\leq d_F(f(x_0), f_N(x_0)) + d_F(f_N(x_0), f_N(x)) + d_F(f_N(x), f(x)) \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + d_F(f_N(x_0), f_N(x)). \end{aligned}$$

L'application f_N est bornée, on déduit alors que f est aussi bornée.

L'application f_N est continue, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in B(x_0, \delta) \implies d_F(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après l'inégalité précédente, on a, pour tout $x \in B(x_0, \delta)$,

$$d_F(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Donc, f est continue en x_0.

On conclut que $f \in C_b(E,F)$ et $d_\infty(f_n, f) \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. $\square$

Exemple. Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad f \in E,$$

et de la distance associée

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in E.$$

On a $C([0,1],\mathbb{R}) = C_b([0,1],\mathbb{R})$ et l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet. Donc, d'après la proposition 6.8, $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace complet.

6.2 Le théorème du point fixe

Définition 6.3 *Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'une application $f : E \longrightarrow E$ est* **strictement contractante** *s'il existe $k \in]0,1[$ tel que f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire*

$$\forall\, x, y \in E, \quad d(f(x), f(y)) \leq k d(x,y).$$

Définition 6.4 *Soit E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ est application. Un* **point fixe** *de f est un point $a \in E$ tel que $f(a) = a$.*

Théorème 6.1 (Théorème du point fixe) *Soit (E,d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application strictement contractante. Alors, il existe un et un seul point fixe a de f dans E.*

De plus, si $x_0 \in E$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence par : $x_{n+1} = f(x_n)$, pour tout $n \geq 0$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.

Preuve. Soit $k \in]0,1[$ tel que f est k-lipschitzienne. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq k d(x_{n-1}, x_n).$$

Donc,

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1).$$

On en déduit que, pour $n, p \geq 0$:

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_0, x_1) k^n \sum_{j=0}^{p-1} k^j \leq d(x_0, x_1) \frac{k^n}{1-k}.$$

Donc, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme E est complet, il existe $a \in E$ tel que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$. Comme f est continue, on a

$$f(a) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = a,$$

donc a est un point fixe de f.

Supposons que $b \in E$ est un autre point fixe de f. Alors,

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a,b) \implies (1-k)d(a,b) \leq 0.$$

Puisque $1-k > 0$, on a $d(a,b) = 0$ et $a = b$. □

Remarque. Le théorème est faux si dans les deux cas suivants :

1. E n'est pas complet.
   Exemple. Soit $E =]0,1[$ et $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(x) = \frac{x}{2}$. L'application f est strictement contractante mais n'admet pas de point fixe.
2. f n'est pas strictement contractante. En particulier, si l'on suppose que

$$\forall\, x, y \in E, \quad x \neq y, \quad d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

   Exemple. Soit $E = \mathbb{R}$ et $f = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. L'application f est 1-lipschitzienne mais elle n'a pas de point fixe sur $\mathbb{R}$.

Le théorème du point fixe a une grande importance tant théorique que pratique. D'un point de vue théorique, il faut surtout retenir l'existence et l'unicité du point fixe de l'application strictement contratante f. D'un point de vue pratique, la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers le point fixe a permet de déterminer le point fixe avec un précision arbitraire. On sait que

$$\forall\, m \geq n \geq 0, \quad d(x_m, x_n) \leq d(x_0, x_1)\frac{k^n}{1-k}.$$

Donc,

$$\forall\, n \geq 0, \quad d(a, x_n) \leq d(x_0, x_1)\frac{k^n}{1-k}.$$

Exemple. Soit $E = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall\, n \geq 0, \quad 10 \leq x_n \leq 11\}$ muni de la distance uniforme :

$$d_\infty(x,y) = \sup_{n\geq 0} |x_n - y_n|, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

L'espace (E, d_∞) est complet. Soit $f : E \longrightarrow E$ définie par :

$$f(x) = z, \quad \text{avec} \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ et } \ z_n = \sqrt{100 - \sin n + x_{n+1}}.$$

1. On montre d'abord que f est bien définie.
Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, pour tout $n \geq 0$, on a $x_n \in [10, 11]$. Alors,

$$109 \leq 100 - \sin n + x_{n+1} \leq 112 \implies 10 \leq z_n = \sqrt{100 - \sin n + x_{n+1}} \leq 11.$$

Donc $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

2. L'application f est strictement contractante.
Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. On note

$$f(x) = z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad f(y) = w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} |z_n - w_n| &= \left|\sqrt{100 - \sin n + x_{n+1}} - \sqrt{100 - \sin n + y_{n+1}}\right| \\ &\leq \frac{|x_n - y_n|}{\sqrt{100 - \sin n + x_{n+1}} + \sqrt{100 - \sin n + y_{n+1}}} \\ &\leq \frac{1}{20}|x_n - y_n| \\ &\leq \frac{1}{20} d_\infty(x, y). \end{aligned}$$

Pour tous $x, y \in E$, on a

$$d_\infty(f(x), f(y)) = \sup_{n \geq 0} |z_n - w_n| \leq \frac{1}{20} d_\infty(x, y),$$

donc f est $\frac{1}{20}$-lipschitizienne. Par le théorème du point fixe, f a un unique point fixe $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il existe donc une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[10, 11]$ qui vérifie :

$$\forall\, n \geq 0, \quad a_n = \sqrt{100 - \sin n + a_{n+1}} \iff \forall\, n \geq 0, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 100 + \sin n.$$

Remarque. Le théorème du point fixe reste vrai si l'on remplace l'hypothèse : f est strictement contractante par : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que f^k est strictement contactante. On utilise la notation :

$$f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

Théorème 6.2 (Théorème du point fixe avec paramètre) *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \times F \longrightarrow E$ une application continue qui est uniformément strictement contractante par rapport à la première variable : il existe $k \in]0, 1[$ tel que*

$$\forall\, x, y \in E, \ \ \forall\, z \in F, \quad d_E(f(x, z), f(y, z)) \leq k d_E(x, y).$$

Si (E, d_E) est complet, l'application $\phi : F \longrightarrow E$ définie par $\phi(z) = x_z$, où x_z est l'unique point fixe de l'application $x \mapsto f(x, z)$, est continue de (F, d_F) dans (E, d_E).

Preuve. Par la théorème du point fixe, l'application ϕ est bien définie. Montrons qu'elle est continue. Soit $z_0 \in F$ et $x_0 = \phi(z_0)$. Alors, $f(x_0, z_0) = x_0$. Soit $\delta > 0$. Par la continuité de f, $f^{-1}(B(f(x_0, z_0), \delta))$ est un ouvert de $E \times F$. Alors, il existe $r, \varepsilon > 0$ tels que

$$B(x_0, r) \times B(z_0, \varepsilon) \subset f^{-1}(B(f(x_0, z_0), \delta)) = f^{-1}(B(x_0, \delta)).$$

On définit la suite d'applications $g_n : B(z_0, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ par récurrence :

$$\forall\, z \in B(z_0, \varepsilon), \quad g_0(z) = x_0, \quad g_{n+1}(z) = f(g_n(z), z).$$

On montre, par récurrence sur $n \geq 0$, que

$$d_E(g_{n+1}(z), g_n(z)) \leq k^n d_E(f(x_0, z), x_0) \leq \delta k^n.$$

La suite $(g_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et (par la complétude de E) converge vers $x_z = \phi(z)$. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$d_E(g_n(z), x_0) = d_E(g_n(z), g_0(z)) \leq \frac{\delta}{1-k}.$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\forall\, z \in B(z_0, \varepsilon), \quad d_E(\phi(z), \phi(z_0)) = d_E(x_z, x_0) \leq \frac{\delta}{1-k}.$$

$\square$

7 Connexité

7.1 Propriétés fondamentales

Nous étudions ici une catégorie d'espaces mt́etriques d'une nature différente de ceux qui ont été étudiées jusqu'à présent : la connexité ne se relie pas à des notions de convergence.

Définition 7.1 *On dit que (E, d) est un* **espace métrique connexe** *si les seules parties de E qui soient à la fois ouvertes et fermées sont E et $\emptyset$.*

On dit qu'une partie A de E est **connexe** *si A, muni de la distance induite par celle de E, est un espace connexe.*

Théorème 7.1 *Soit (E, d) un espace métrique. Alors le propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) E est connexe.

(ii) Toute partition de E en deux ouverts disjoints ($E = O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$) est triviale, c'est-à-dire $E = O_1$ ou $E = O_2$.

(iii) Toute partition de E en deux fermés disjoints ($E = F_1 \cup F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$) est triviale, c'est-à-dire $E = F_1$ ou $E = F_2$.

(iv) Toute partition disjointe ouverte de E, c'est-à-dire toute famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts de (E, d) telle que $E = \cup_{i \in I} O_i$ et $O_i \cap O_j$ si $i \neq j$, est triviale : il existe $i_0 \in I$ tel que $E = O_{i_0}$ (et donc $O_j = \emptyset$ si $j \neq i_0$).

Remarque 7.1

1. Une partie A de E est connexe si, pour tous ouverts O_1 et O_2 de E tels que $E \subset O_1 \cup O_2$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, on a $A \subset O_1$ ou $A \subset O_1$ (c'est-à-dire, $A \cap O_2 \neq \emptyset$ ou $A \cap O_1 \neq \emptyset$, respectivement).

   Donc, A n'est pas un connexe de E si et seulement s'il existe des ouverts O_1 et O_2 de E tels que

$$A \subset O_1 \cup O_2, \quad A \cap O_1 \neq \emptyset, \quad A \cap O_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

2. Toute partie réduite à un élément est évidemment connexe. Un espace discret est connexe si et seulement s'il admet au plus un élément.

Une propriété fondamentale des espaces connexes est la suivante.

Théorème 7.2 *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Alors, l'image par f de toute partie connexe de E est une partie connexe de F.*

Preuve. Soit A une partie de E. On va montrer que si $f(A)$ n'est pas connexe alors A n'est pas connexe.

Puisque $f(A)$ n'est pas connexe, il existe des ouverts O_1 et O_2 de F tels que $f(A) \subset O_1 \cup O_2$, $f(A) \cap O_1 \neq \emptyset$, $f(A) \cap O_2 \neq \emptyset$ et $f(A) \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Les ensembles $U_1 = f^{-1}(O_1)$ et $U_2 = f^{-1}(O_2)$ sont des ouverts de E (image réciproque d'ouverts par une application continue) tels que $A \subset U_1 \cup U_2$, $A \cap U_1 \neq \emptyset$, $A \cap U_2 \neq \emptyset$ et $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, ce qui prouve que A n'est pas connexe. $\square$

Proposition 7.1 *L'espace métrique (E, d) est connexe si et seulement si les applications continues $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ sont les constantes.*

Preuve. La condition nécessaire est une conséquence du Théorème 7.2 vu que $f(E)$ doit être une partie connexe de $\{0, 1\}$.

Réciproquement, si E n'est pas connexe, $E = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts non vides et disjoints. L'application $f : E \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in O_1$ et $f(x) = 0$ si $x \in O_2$ n'est pas constante mais elle est continue (car l'image réciproque de tout ouvert de $\{0, 1\}$ est un ensemble ouvert de E).

Corollaire 7.1 *Soit A une partie connexe de (E, d). Alors, son adhérence $\bar{A}$ est aussi connexe.*

Preuve. Soit $f : \bar{A} \longrightarrow \{0, 1\}$ continue. Puisque A est connexe, d'après la proposition 7.1, $f_{|A}$ est constante. Par continuité, f est constante sur $\bar{A}$. On conclut que $\bar{A}$ est connexe. □

Corollaire 7.2 *Soit A une partie connexe de (E, d). Alors, toute partie B de E telle que $A \subset B \subset \bar{A}$ est connexe.*

Preuve. Utiliser le même argument que dans le corollaire précédent.

Corollaire 7.3 *Soit (E, d) un espace métrique.*

1. *Soient F, G des parties connexes de E. Si $F \cap G \neq \emptyset$, alors $F \cup G$ est connexe.*
2. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E telle que $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Alors, $\cup_{i \in I} A_i$ est connexe.*
3. *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties connexes de E telle que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, pour tout n. Alors, $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est connexe.*

Preuve. 1. Soit $f : F \cup G \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Alors, $f_{|F}$ et $f_{|G}$ sont constantes. Puisque $F \cap G \neq \emptyset$, on conclut que f est constante. Par la Proposition 7.1, $F \cup G$ est connexe. □

Proposition 7.2 (Produit de deux espaces connexes) *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques non vides. Alors, $E \times F$ est connexe pour la distance produit d si et seulement si (E, d_E) et (F, d_F) sont connexes.*

Preuve. Condition nécessaire : Supposons $E \times F$ connexe. L'application $p_E : E \times F \longrightarrow E$ est continue et surjective donc, par le théorème 7.2, $E = p_E(E \times F)$ est connexe. Même raisonnement pour F.

Condition suffisante : Soit $f : E \times F \longrightarrow \{0, 1\}$ une application continue et $(x_0, y_0) \in E \times F$. Par l'hypothèse et la proposition 7.1 : il existe deux constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x \in E,\ f(x, y_0) = \alpha \quad \text{et} \quad \forall\, y \in F,\ f(x_0, y) = \beta.$$

Alors, $\alpha = \beta$ et f est constante. □

7.2 Parties connexes de la droite réelle

Théorème 7.3 *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Preuve. **1.** Soit A une partie connexe non vide de $\mathbb{R}$. Posons $a = \inf A \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b = \sup A \in \overline{\mathbb{R}}$. On va montrer que, si $a < x < b$ alors $x \in A$ et donc $A =]a, b[$ (si A est un ouvert).

Soit $x \in]a, b[$ et supposons par contradiction que $x \notin A$. Alors, $A \cap]-\infty, x[$ et $A \cap]x, +\infty[$ forment une partition de A de deux ouverts de A non vides et disjoints, ce qui contradit le fait que A est connexe.

2. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. I peut s'écrire comme une réunion d'une famille d'intervalles I_j de la forme $[x_j, y_j]$ dont l'intersection est non vide. D'après le corollaire 7.3, il suffit de montrer que tout intervalle compacte $[a, b]$ est connexe.

Supposons par contradiction que $[a, b]$ n'est pas connexe, donc il existe deux fermés (et aussi bornés, donc compacts) K_1 et K_2 non vides et disjoints tels que $[a, b] = K_1 \cup K_2$. Les ensembles K_1 et K_2 sont compacts alors il existe $a_1 \in K_1$ et $a_2 \in K_2$ tels que

$$d(K_1, K_2) = d(a_1, a_2) > 0,$$

et alors l'intervalle non vide $]a_1, a_2[$ (si $a_1 < a_2$) n'appartiendrait pas à $K_1 \cup K_2 = [a, b]$, ce qui est absurde. □

Remarque 7.2 En particulier, $\mathbb{R}$ est connexe.

Corollaire 7.4 *Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont connexes.*

Corollaire 7.5 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit (E, d) un espace métrique connexe, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et $a, b \in E$. Posons $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Alors, pour tout $\gamma \in [\alpha, \beta]$ (si $\alpha \leq \beta$), il existe $c \in E$ tel que $\gamma = f(c)$.*

Preuve. Par les théorèmes 7.2 et 7.3, $f(E)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$ et donc un intervalle. Puisque $\alpha, \beta \in f(E)$, on conclut que $[\alpha, \beta] \subset f(E)$, d'où le résultat. □

7.3 Connexité par arcs

Définition 7.2 (Arcs) *Soit (E, d) un espace métrique et $x, y \in E$. Un* **arc** *ou* **chemin** *de x à y est une application continue $\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Définition 7.3 *Un espace métrique (E, d) est* **connexe par arcs** *si, pour tous $x, y \in E$, il existe un arc de x à y.*

Proposition 7.3 *Un espace métrique (E, d) connexe par arcs est connexe.*

Preuve. Soit $x \in E$. Puisque E est connexe par arcs, pour tout $y \in E$, il existe $\gamma_y : [0, 1] \longrightarrow E$ continue telle que $\gamma_y(0) = x$ et $\gamma_y(1) = y$. Alors, $E = \cup_{y \in E} \gamma_y([0, 1])$ qui est connexe d'après le théorème 7.2 et corollaire 7.3. □

Exemple. Soit E un espace vectoriel normé et C une partie convexe de E, c'est-à-dire :

$$\forall\, x, y \in C, \quad \forall\, t \in [0, 1], \quad tx + (1 - t)y \in C.$$

Alors, C est connexe par arcs et aussi connexe.

Lemme 7.1 *Soit (E, d) un espace métrique. La relation R définie par :*

$$xRy \iff \text{il existe un arc de } x \text{ à } y$$

est une relation d'équivalence.

Preuve.
Réflexivité : Soit $x \in E$. Alors, xRx car l'application $\gamma : [0,1] \longrightarrow E$ constante ègale à x est un arc de x à x.

Symétrie : Soient $x, y \in E$ tels que xRy. Alors, il existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow E$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Soit $\bar{\gamma} : [0,1] \longrightarrow E$ définie par $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$. Alors, $\bar{\gamma}$ est continue et $\gamma(0) = y$ et $\gamma(1) = x$. Donc, yRx.

Transitivité : Soient $x, y, z \in E$ tels que xRy et yRz. Alors, il existe $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow E$ et $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow E$ continues telles que $\gamma_1(0) = x$, $\gamma_1(1) = y$, $\gamma_2(0) = y$ et $\gamma_2(1) = z$. Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow E$ définie par :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

L'application γ est un arc de x à z, donc xRz. □

Lemme 7.2 *Soient (E, d) un espace métrique et R une relation d'équivalence sur E. Si chaque classe d'équivalence de R est ouverte dans E, alors il existe une seule classe (c'est-à-dire, $\forall\, x, y \in E$, on a xRy).*

Preuve. Soit C une classe d'équivalence de R. Alors, C est ouverte et non vide. De plus, $E \setminus C$ est l'union des autres classes d'équivalence, donc est aussi ouverte. Comme E est connexe, on a $E \setminus C = \emptyset$ et donc $E = C$. □

Théorème 7.4 *Soit E un espace vectoriel normé et O un ouvert connexe de E. Alors, O est connexe par arcs.*

Preuve. On note R la relation d'équivalence sur E (lemme 7.1) définie par :

$$xRy \iff \text{il existe un arc de } x \text{ à } y.$$

Soit $x \in E$ et C_x la classe d'équivalence de x, c'est-à-dire

$$C_x = \{y \in E : xRy\}.$$

Soit $y_0 \in C_x$. Puisque O est ouvert il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y_0, \varepsilon) \subset O$ et soit $\gamma_0 : [0,1] \longrightarrow O$ continue telle que $\gamma_0(0) = x$ et $\gamma_0(1) = y_0$. Pour $y \in B(y_0, \varepsilon)$ fixé, soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow O$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{si} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ y_0 + (2t-1)(y - y_0) & \text{si} \quad \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

L'application γ est continue, $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, donc $y \in C_x$. D'où, $B(y_0, \varepsilon) \subset C_x$ et C_x est un ouvert de O.

Les classes d'équivalence sont des ouvertes de E. D'après le lemme 7.2, O est connexe par arcs. □

Proposition 7.4 *Soit (E, d) un espace métrique.*

1. *Soient F, G deux parties connexes par arcs de E. Alors, si $F \cap G \neq \emptyset$, $F \cup G$ est connexe par arcs.*
2. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes par arcs de E. Alors, si $\cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, $\cup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.*
3. *Soit A une partie connexe par arcs de E et $f : (E, d) \longrightarrow (E', d')$ une application continue vers un autre espace métrique. Alors $f(A)$ est connexe par arcs.*
4. *Le produit cartésian d'espaces connexes par arcs est connexe par arcs.*

Remarque 7.3 Par contre l'adhérence d'une partie connexe par arcs peut ne pas être connexe par arcs.

Exemple. L'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \quad y = \sin(1/x)\}$ est connexe par arcs, mais $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs.

On a

$$\bar{A} = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}.$$

7.4 Composantes connexes

Définition 7.4 (Connexité locale)

1. *Un espace métrique (E, d) est* **localement connexe** *si tout $x \in E$ a une base de voisinages connexes : pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, il existe $C \in \mathcal{V}(x)$ telle que $C \subset V$ et C est connexe.*
2. *Un espace métrique (E, d) est* **localement connexe par arcs** *si tout $x \in E$ a une base de voisinages connexes par arcs.*

Exemples.

1. Une partie ouverte d'un espace vectoriel normé est localement connexe par arcs.
2. $\mathbb{R}$ est localement connexe. Les intervalles $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ forment un système de voisinages connexes.

Théorème 7.5 (Composantes connexes) *Soit (E, d) un espace métrique et $x \in E$.*

1. *Il existe une partie connexe maximale contenant x. Elle est appelée la composante connexe de x.*
2. *Les composantes connexes de deux points de E sont soit confondues soit disjointes.*
3. *Une composante connexe de E est fermée dans E. Si E est localement connexe, elle est également ouverte.*

Remarque 7.4 E est connexe si et seulement si E a une seule composante connexe.

Remarque 7.5 Un ouvert de $\mathbb{R}$ est la réunion au plus dénombrable disjointe d'intervalles ouverts.

Exemple. $A = [1, 2] \cup]3, 4[$. On note C_x la composante connexe de x dans A. Alors,

$$C_1 = [1, 2], \quad C_{\frac{3}{2}} = [1, 2], \quad C_{\frac{7}{2}} =]3, 4[.$$

Remarque 7.6 Pour $x \in E$, la composante connexe de x dans E, notée C_x est égale à la réunion de tous les connexes de E contenant x :

$$C_x = \bigcup_{\substack{C \subset E \text{ connexe} \\ x \in C}} C$$

qui est connexe d'après le corollaire 7.3.

Théorème 7.6 (Composantes connexes par arcs) *Soit (E, d) un espace métrique et $x \in E$.*

1. *Il existe une partie connexe par arcs maximale contenant x. Elle est appelée la composante connexe par arcs de x.*
2. *Les composantes connexes par arcs de deux points de E sont soit confondues soit disjointes.*
3. *Si E est localement connexe par arcs, les composantes connexes par arcs sont ouvertes et fermées dans E.*

Contre-exemple. Soit

$$E = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\} = \overline{\{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}}.$$

L'ensemble E est connexe dans $\mathbb{R}^2$ (mais il n'est pas connexe par arcs ni localement connexe par arcs) et a deux composantes connexes par arcs : $\{0\} \times [-1, 1]$ qui est fermée dans E et $\{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}$ qui est un ouvert dense dans E.

Références

[1] P.-G. Lemarié-Rieusset, *Topologie métrique,* Polycopié Université d'Evry, 2015–2016.

[2] C. Wagschal, *Topologie et analyse fonctionnelle,* Hermann, 1995.

[3] J.-C. Yoccoz, *Cours de Topologie, calcul différentiel et équation différentielles pour la Licence MAF*, Centre Scientifique d'Orsay, Édition Université de Paris-Sud.