Université de BORDEAUX I

Master Ingénierie Mathématiques, Statistique et Economique
Equations et derivées partielles, Calcul et épidémiologie

Présenté par

Mayoufi Kawther

Pour obtenir le diplôme de Master 2

Sujet du mémoire :

Étude Mathématique des fluides Géophysiques

Soutenu le 28 Juin 2013 sous la direction de :

Pr.Marius Païcu

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence globale en temps de la solution du système de Navier-Stokes-Coriolis dans le cas d'un espace entier et périodique.
L'histoire des équations du mouvement des fluides a commencé avec L.Euler et J.d'Alembert lorsqu'ils travaillaient sur les fluides parfaits après avec L.Navier pour un fluide visqueux. Mais depuis quelques années, l'étude des fluides soumis à une rotation rapide connaît un grand développement par exemple les problèmes issus de la géophysique.

1.1 Généralités

Les écoulements dans les océans, dans les atmosphères des planètes géantes, dans le noyau liquide de la terre, et même dans les étoiles sont spécifiques essentiellement par deux aspects :

- La rotation globale à laquelle ils sont soumis, se traduit par la force de Coriolis
- La stratification du fluide en couches de densité variable, soumis à un champ de gravité.

Ces deux caractéristiques changent radicalement la dynamique des fluides, donnant naissance à de nouvelles ondes et de nouveaux équilibres.

1.1.1 Force de Coriolis

Si nous regardons le fluide à partir d'un repère fixé qui n'est pas lié à la terre, nous allons décrire le mouvement d'un fluide par l'équation de Navier-Stokes, par contre si on observe le fluide à partir d'un repère lié à la terre (qui tourne avec une vitesse angulaire α), on verra que la force de Coriolis joue un rôle important sur le fluide en mouvement.

Question : Quel est l'effet de la force de Coriolis ?
Si on suppose que la vitesse du fluide est u, alors le temps pris par une particule de fluide pour parcourir la distance l est

$$t = \frac{l}{u}$$

Lorsque le temps est bien inférieur à la période de rotation de la terre, le

fluide sera à peine touché par cette rotation pendant la période t.
Pour que la rotation joue un rôle principal il faut que :

$$t > \frac{1}{\alpha}$$

Les fluides satisfaisant la relation ci-dessus sont dits **les fluides à grande échelle.**
La force de Coriolis crée une asymétrie entre le mouvement horizontal et vertical ce qui induit une **anisotropie** dans le comportement du fluide.

1.1.2 Le nombre de Rossby

C'est un nombre adimentionnel, il est défini par la relation suivante :

$$\varepsilon = \frac{u}{2\alpha l}$$

Dans ce mémoire, on va prendre le cas particulier des fluides à grande échelle quand le nombre de Rossby est vraiment petit, dans ce cas on va voir que la force de Coriolis joue un rôle majeur parmi les force considérées.

1.1.3 La viscosité

On distingue deux types de viscosité "cinématique" et "dynamique", mais dans les équations de Navier-Stokes, c'est la viscosité cinématique qui a un plus grand rôle car est elle de taille comparable avec le nombre de Rossby.
Dans la réalité, le fluide est turbulent et ν n'est pas la viscosité cinématique c'est plutôt une viscosité turbulente.

1.1.4 La Stratification

C'est la répartition verticale de la température dans les fluides, la plupart des fluides ont une masse volumique ρ (densité) qui diminue avec la température et en présence de la gravité, le fluide chaud se retrouve au-dessus du fluide froid.
En effet, la stratification peut stabiliser les écoulements et par là réduire la turbulence.

1.1.5 Les ondes inertielles

On les appelle aussi oscillations inertielles : c'est un type d'ondes mécaniques qu'on retrouve dans un fluide en rotation. Elles résultent de la tendance de retour à l'état initial des mouvements induits par une force d'inertie.

Les ondes inertielles sont responsables des variations à grandes échelles du mouvement des fluides, ce qui mène au mélange entre parties de différentes densités. Ces mélanges se font souvent en régime turbulent pour lequel un traitement mathématique rigoureux est possible dans la limite d'une rotation rapide.

1.2 Équations de mouvement de fluide en rotation rapide

Avant d'introduire les équations de Navier-Stokes-Coriolis, rappelons-nous des équations qui modélisent le mouvement d'un fluide en général.
On considère le mouvement continu d'un fluide homogène incompressible de densité ρ sur la terre dans un repère qui n'est pas lié à la planète, la propriété d'incompressible se traduit comme suit :

$$div u_a \equiv \nabla . u_a = 0 \tag{1}$$

L'équation de conservation de la masse (équation de continuité) implique que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_a . \nabla \rho + \rho(\nabla . u_a) = 0 \tag{2}$$

et puisque le fluide est homogène, la masse volumique est constante en espace.
Les équations (1) et (2) impliquent que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

et donc $\rho = \rho_0$ est constante en temps aussi.
D'après l'équation fondamentale de la dynamique (Loi de Newton) pour un fluide de masse : $m = \rho \, dV$ on a :

$$\rho \overrightarrow{a} = \sum \frac{\overrightarrow{F_{ext}}}{dV} \tag{3}$$

où : $\overrightarrow{a}$ est l'accélération, dV désigne le volume, ρ la masse volumique et $\overrightarrow{F_{ext}}$ sont les forces extérieures qui agissent sur le fluide :

- Force de pression : $\overrightarrow{F} = \left(\frac{-\partial p}{\partial x_j} \right)_j$
- Force volumique (potentiel de gravitation) : $\overrightarrow{F} = \rho \nabla f$
- Contrainte visqueuse : $\overrightarrow{F} = div \, \tau_{ij} = \left(\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial_{x_j}} \right)_{i=1,2,3}$

  τ_{ij} est appelé tenseur de contrainte visqueuse l'équation (3) peut s'exprimer comme suit :

$$\rho\frac{du_a}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho\,\nabla f + div\ \tau_{ij} \tag{4}$$

où :
u_a désigne la vitesse dans un repère fixe et $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + u.\nabla$ est la dérivée particulaire.

Donc on peut écrire (4) sous la forme :

$$\rho(\frac{\partial u_a}{\partial t} + u_a.\nabla u_a) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho\,\nabla f + div\ \tau_{ij} \tag{5}$$

On suppose que le fluide est Newtonien, le tenseur de contrainte est une fonction linéaire du gradient de vitesse :

$$\tau = -pI + 2\mu e \tag{6}$$

avec $I = (\delta_{ij})_{ij}$ nombre de Kronecker, μ désigne la viscosité dynamique du fluide.
et,

$$e = e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_a^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_a^j}{\partial x_i}\right) \tag{7}$$

On remplace l'expression de τ dans l'équation (5)pour tout $i = 1, 2, 3$ on a :

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial u_a^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_a^i}{\partial x_j}u_a^j\right) &= -\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij} + 2\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu e_{ij}(u_a)\right] + \rho\frac{\partial f}{\partial x_i}\\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_a^i}{\partial x_j}\right) + \mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_a^j}{\partial x_i}\right) + \rho\frac{\partial f}{\partial x_i}\end{aligned}$$

En regroupant le gradient des forces volumiques et le gradient de la pression et en tenant compte du fait que $div u_a = 0$ on a pour $i = 1, 2, 3$:

$$\rho\left(\frac{\partial u_a^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_a^i}{\partial x_j}u_a^j\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\,\Delta u_a$$

qui est la même que : $\rho(\dfrac{\partial u_a}{\partial t} + u_a.\nabla u_a) = -\nabla p + \mu\,\Delta u_a$.
Par la définition de la viscosité cinématique $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ on trouve l'équation de Navier-Stokes :

$$(NS)\begin{cases} \dfrac{\partial u_a}{\partial t} + u_a.\nabla u_a - \nu\Delta u_a = -\nabla p \\ div u_a = 0 \end{cases}$$

Il est plus commode d'observer un fluide dans un repère lié à la planète qui tournera d'une vitesse angulaire α(orienté selon l'axe des pôles, dirigée du sud vers le nord et supposée constant). Les évolutions d'un champ de vecteurs exprimées dans les deux repères sont liées par l'équation suivante :

$$(\frac{du_a}{dt})_a = \frac{du}{dt} + \alpha\ e_3 \wedge u \tag{8}$$

u_a désigne la vitesse dans un repère absolu fixé.

Avec le changement de repère où $r = OM$ est un vecteur de position d'une particule d'un fluide (O est le centre de la terre et M un point considéré). L'équation (8) donne :

$$(\frac{dr_a}{dt})_a = \frac{dr}{dt} + \alpha\ e_3 \wedge r$$

donc,

$$u_a = u + \alpha\ e_3 \wedge r$$

En appliquant (8) pour le champ de vitesse u_a, on obtient :

$$\begin{aligned} (\frac{du_a}{dt})_a &= \frac{du_a}{dt} + \alpha\ e_3 \wedge r \\ &= (\frac{d}{dt}(u + \alpha\ e_3 \wedge r)) + \alpha\ e_3 \wedge (u + \alpha\ e_3 \wedge r) \\ &= \frac{du}{dt} + \alpha\ e_3 \wedge (\frac{dr}{dt}) + \alpha\ e_3 \wedge u + \alpha\ e_3 \wedge (\alpha\ e_3 \wedge r) \\ &= \frac{du}{dt} + 2\alpha\ e_3 \wedge u + \alpha\ e_3 \wedge (\alpha\ e_3 \wedge r) \end{aligned} \tag{9}$$

Le terme ($2\alpha\ e_3 \wedge u$) représente l'accélération de Coriolis, tandis que ($\alpha\ e_3 \wedge (\alpha\ e_3 \wedge r)$) représente l'accélération centrifuge(c'est la composante qui fuit le centre de l'accélération du corps) et on peut l'écrire comme un terme gradient :

$$\alpha\ e_3 \wedge (\alpha\ e_3 \wedge r) = \nabla(\frac{1}{2}|\alpha\ e_3 \wedge r|^2)$$

donc, il peut être regroupé avec le gradient de pression et celui de la gravitation.

Maintenant, si on remplace l'expression de $(\frac{du_a}{dt})_a$ obtenue par (9) dans l'équation de Navier-Stokes et en tenant compte du fait que :

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(t,x)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + [u(t,x).\nabla]u(t,x)$$

On aura l'équation suivante du mouvement du fluide dans un repère relatif :

$$(NS_c)\begin{cases} \partial_t u + u.\nabla u - \nu\Delta u + 2\alpha\ e_3 \wedge u = -\nabla p \\ div\ u = 0 \\ u\ |_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

qu'on l'appelle système de Navier-Stokes avec *"une force de Coriolis"*

2 Cadre fonctionnel et outils mathématiques

Avant d'énoncer les résultats d'existence et d'unicité, définissons les espaces avec lesquels on va travailler, comme on l'a mentionné dans l'introduction, la force de Coriolis crée une anisotropie dans le comportement du fluide donc on aura besoin d'espaces qui prennent en considération cette anisotropie.
La définition de ces espaces nécessite une décomposition dyadique anisotrope des espaces de Fourier.
L'idée de base consiste à échantillonner les fréquences à l'aide d'un découpage de leurs espaces en couronnes de taille 2^k où k décrit l'ensemble des entiers naturels.
L'intérêt de cette technique réside dans le comportement vis à vis de la dérivation des distributions tempérées dont la Transformée de Fourier est à support compact. Si le support de $\widehat{u}$ est inclu dans une boule de centre zéro et de rayon λ alors une dérivation coûte **au plus** λ, si le support de $\widehat{u}$ est inclu dans une couronne de centre zéro et de petit rayon $r_1\lambda$ et de grand rayon $r_2\lambda$ noté $C(0, r_1\lambda, r_2\lambda)$ alors une dérivation coûte **exactement** λ.

2.1 La théorie de Littlewood-Paley anisotrope

L'outil de base dans les démonstrations sera la théorie de Littlewood-Paley anisotrope qui consiste à faire un découpage dyadique dans les fréquences verticales.
On désigne par C la couronne de centre zéro, de petit rayon $\dfrac{3}{4}$ et grand rayon $\dfrac{8}{3}$. On fixe ψ et ϕ deux fonctions régulières à support compact appartenant respectivement à $\mathcal{D}(B(0, \dfrac{4}{3}))$ et $\mathcal{D}(C)$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : \sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi(2^{-j}t) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R} : \psi(t) + \sum_{j\geqslant 0} \phi(2^{-j}t) = 1$$

Si :

- $|j - j'| \geqslant 2 \quad$ alors $\quad supp(\phi_j) \cap supp(\phi_{j'}) = \emptyset$
- $j \geqslant 1 \Rightarrow supp(\psi) \cap supp(\phi(2^{-j})) = \emptyset$
- $\tilde{C} = B(0, \dfrac{2}{3}) + C \quad$ alors $\tilde{C}$ est une couronne et on a :

$$|j - j'| \geqslant 5 \Rightarrow 2^j\tilde{C} \cap 2^{j'}C = \emptyset$$

On introduit les définitions des opérateurs de localisation (troncature) suivants :

Définition 1 *Pour toute distribution tempérée u on a :*

$$u = \sum_{j,k \geq -1} \Delta_j^h \Delta_k^v u$$

$$\forall j \geqslant 0 : \quad \Delta_j u = \mathcal{F}^{-1}(\phi(\frac{\xi}{2^j})\widehat{u}(\xi)) \quad et \quad \mathcal{S}_j u = \sum_{j'=-1}^{j-1} \Delta_j u$$

$$\begin{gathered} \Delta_j^h u = \mathcal{F}^{-1}(\phi_j(2^{-j}|\xi_h|)\widehat{u}(\xi)) \quad pour \quad j \in \mathbb{Z} \\ \Delta_{-1}^h u = \mathcal{F}^{-1}(\psi|\xi_h|)\widehat{u}(\xi)) \\ \Delta_k^h u = 0 \quad \forall j \leqslant -2 \\ \Delta_k^v u = \mathcal{F}^{-1}(\phi_k(2^{-k}|\xi_3|)\widehat{u}(\xi)) \quad pour \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Delta_{-1}^v u = \mathcal{F}^{-1}(\psi|\xi_3|)\widehat{u}(\xi)) \\ \Delta_k^v u = 0 \quad \forall k \leqslant -2 \end{gathered}$$

Définissons maintenant l'espace de Sobolev anisotrope :

Définition 2 *Soient s et s' deux nombres réels et u une distribution tempérée :*

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{s,s'}} &= (\sum_{j,k \geqslant -1} 2^{2(js+s'k)} \|\Delta_k^v \Delta_j^h u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \int_{\mathbb{R}^3} (1+|\xi_h|^2)^s (1+|\xi_3|^2)^{s'} |\widehat{u}(\xi_h,\xi_3)|^2 d\xi_h d\xi 3 \end{aligned}$$

L'espace $H^{s,s'}$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ par la norme citée au-dessus et c'est un Hilbert si et seulement si $s < 1$

Définition 3 *L'espace de Lebesgue anisotrope noté par $L_h^p(L_v^q)$ désigne l'espace $L^p(\mathbb{R}_h, L^q(\mathbb{R}_v))$ qui est muni de la norme :*

$$\|f\|_{L_h^p(L_v^q)} := \|\|f\|_{L^q(\mathbb{R}_v)}\|_{L^p(\mathbb{R}_h)} = \left(\int_{\mathbb{R}_h} \left(\int_{\mathbb{R}_v} |f(x_h,x_3)|^q dx_3\right)^{\frac{p}{q}} dx_h\right)^{\frac{1}{p}}$$

Définition 4 *L'espace de Sobolev homogène qu'on note par $\dot{H}^s$ est défini par la norme suivante :*

$$\|u\|_{\dot{H}^s} := \||.|^s|\widehat{u}(.)|\|_{L^2} \quad avec \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$$

Lemme 1 ***:Inégalité de Bernstein anisotrope***
Soit u une fonction avec supp$(\mathcal{F}_v u) \subset \mathbb{R}^2_h \times 2^k\mathcal{C}$, $\mathcal{F}_v$ est la Transformée de Fourier verticale et $\mathcal{C}$ est la couronne dyadique.
Soient $p \geq 1$ et $q \geq q' \geq 1$ des nombres réels :

- $\|u\|_{L^p_h(L^q_v)} \leq C2^{kd(\frac{1}{q'}-\frac{1}{q})}\|u\|_{L^p_h(L^{q'}_v)}$ *, d est la dimension de l'espace.*
- $\|\partial^\alpha u\|_{L^p_h(L^q_v)} \leq C2^{k|\alpha|}\|u\|_{L^p_h(L^{q'}_v)}$

Lemme 2 ***: Inégalité de convolution de Young***
Soient $p, p', p'', q, q', q'' \geq 1$ si : $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p''}$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q'} + \dfrac{1}{q''}$ alors on a :

$$\|u * v\|_{L^p_h(L^q_v)} \leq \|u\|_{L^{p'}_h(L^{q'}_v)}\|v\|_{L^{p''}_h(L^{q''}_v)}$$

Lemme 3 ***:Inégalité de Cauchy Schwartz***
Soient $p, p', p'', q, q', q'' \geq 1$ si : $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p''}$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q'} + \dfrac{1}{q''}$ alors on a :

$$\|uv\|_{L^p_h(L^q_v)} \leq \|u\|_{L^{p'}_h(L^{q'}_v)}\|v\|_{L^{p''}_h(L^{q''}_v)}$$

Lemme 4 ***:Grönwall***
Soit $K \geq 0$ et soient g, h deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ à valeurs positives et vérifiant l'inégalité :

$$\forall t \in [a, b], \quad h(t) \leq K + \int_0^t g(s)h(s)\, ds$$

$$\textit{alors}, \quad \forall t \in [a, b], \quad h(t) \leq K\ \exp(\int_0^t g(s)\, ds)$$

Lemme 5 ***:Inégalité de Hardy Littlewood-Sobolev***
Soient $n \in \mathbb{N}, 0 < \lambda < n, p > 1$ et $r > 1$ reliés par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{\lambda}{n} + \dfrac{1}{r} = 2$
alors il existe une constante C et un triplet (n, p, λ) telle que :
$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\forall h \in L^r(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}}^n f(x)|x-y|^{-\lambda}h(y)dx\, dy| \leq C(n, p, \lambda)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$$

3 Équations de Navier-Stokes isotrope :

L'écoulement d'un fluide homogène, visqueux et incompressible est géré par les équations de Navier-Stokes :

$$(NS)\begin{cases} \partial_t u + u.\nabla u - \nu\Delta u = -\nabla p \\ \text{div } u = 0 \\ u\mid_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

où $\Delta = \sum\limits_{i=0}^{3} \dfrac{\partial_i^2}{\partial x_i^2}$ et ν est la viscosité.

Lorsqu'on analyse les équations de Navier-Stokes, on remarque deux phénomènes qui interviennent :
Le transport qui est représenté par le champ de vitesse u au point $x \in \mathbb{R}^3$ et $t \in \mathbb{R}^+$ et la diffusion $\nu\Delta$ qui tend à régulariser la solution. Parallèlement à ces deux phénomènes, le gradient de pression ∇p a pour rôle la création d'une recirculation afin de conserver la condition de divergence nulle sur u

$$\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0.$$

3.1 Calcul de la pression :

Appliquons l'opérateur de divergence à (NS) et en utilisant le fait que u est de divergence nulle on a :

$$\text{div }(u.\nabla u) = -\Delta p$$

et donc : $-\nabla p = \sum\limits_{i,j} \nabla\partial_i\partial_j\Delta^{-1}(u_i u_j)$ où $\nabla\partial_i\partial_j\Delta^{-1}$ est un opérateur non-local(pseudo-différentiel)

3.2 égalité d'énergie :

Soit u une solution régulière de (NS), faisant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$(\partial_t u, u)_{L^2} + (u.\nabla u, u)_{L^2} - \nu(\Delta u, u)_{L^2} = -(\nabla p, u)_{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla u\|_{L^2}^2 + (u.\nabla u, u)_{L^2} = -(\nabla p, u)_{L^2}$$

En utilisant les deux annulations de J.Leray pour le terme de pression et le terme $(u.\nabla u, u)_{L^2}$ on a :

$$-(\nabla p, u)_{L^2} = (p, \operatorname{div} u)_{L^2} = 0$$

$$\text{et} \qquad (u.\nabla u, u)_{L^2} = \sum_{i,j} \int u_j(\partial_j u_k)u_k\, dx = \frac{1}{2}\sum_j \int u_j\partial_j|u|^2 dx$$

ce qui, après une intégration par partie donne :

$$(u.\nabla u, u)_{L^2} = -\frac{1}{2}\int \operatorname{div} u|u|^2 dx = 0$$

et on obtient finalement,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla u\|_{L^2}^2 = 0$$

Intégrant en temps :

$$\forall t \geq 0 : \|u\|_{L^2}^2 + 2\nu\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 dt' = \|u(0)\|_{L^2}^2$$

Nous déduisons que l'application $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2}$ est décroissante.

3.3 Solution faible :

On dit qu'un champ de vecteurs u dans l'espace $L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^2))$ est une solution faible de (NS) associée à la distribution donnée initiale u_0 , si pour tout champ de vecteur ϕ dans $C^\infty([0,T], \mathbb{R}^3)$ à support compact en espace de divergence nulle on a :

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} u(-\partial_t\phi - \nu\Delta\phi) - u_j u_i \partial_j\phi\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x)\phi(0,x)\, dx$$

3.4 Existence globale de la solution :

Théorème 1 *Soit u_0 un champ de vecteur de divergence nulle dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ alors il existe au moins une solution faible de (NS) pour tout temps $T \geqslant 0$.*

Preuve 1 *On a quatre étapes de démonstration :*

- *Résolution globale d'un système approché :*

  Soit J_n un opérateur de troncature de fréquence qu'on nomme aussi opérateur de régularisation :

  $$\forall n \in \mathbb{N} : \; J_n u = \mathcal{F}^{-1}(1_{|\xi|\leqslant\eta}\widehat{u}) = \begin{cases} \widehat{u}(\xi) & si \quad |\xi| \leqslant \eta \\ 0 & si \quad |\xi| > \eta \end{cases}$$

  Cet opérateur est en effet régularisant puisque l'égalité de Plancherel permet d'écrire facilement,

$$\exists C>0,\ \forall n\in\mathbb{N}\ \|J_nu\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}\leqslant C(n)\|u\|_{L^2}^2$$

D'autre part, on a par le théorème de Lebesgue pour tout $u\in\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ *:*

$$\lim_{n\to\infty}\|J_nu-u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)}=0$$

On définit le système approché comme suit :

$$(NS_n)\begin{cases}\partial_t u_n+J_n div\,(J_nu_n\otimes J_nu_n)-\nu\Delta J_nu_n & =-\partial_i\partial_j\partial_k J_n(J_nu_n^iJ_nu_n^j)\\ div\ u_n=0 & \\ u_n\mid_{t=0}=J_nu_0 & \end{cases}$$

qui est en fait une équation différentielle ordinaire dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^3)$

- *Globalisation* $T_n^*=+\infty$ *:*

$$\partial_t u_n+J_n div\,(J_nu_n\otimes J_nu_n)-\nu\Delta J_nu_n=-\nabla J_np_n \qquad (10)$$

J_nu_n *vérifie* (10) $\Rightarrow u_n=J_nu_n$ *(par unicité en Conditions limites)*

$$\Rightarrow u_n\in C^1([0,T_n^*),C^\infty(R^N))$$

$\forall u_n\in L_n^2(\mathbb{R}^3)$ *avec* $L_n^2(\mathbb{R}^3)=\{u\in L^2(\mathbb{R}^3),J_nu=u\}$ *on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t u_n.u_ndt+\int_{\mathbb{R}^3}J_n(u_n.\nabla u_n).u_ndx-\nu\int_{\mathbb{R}^3}\Delta u_n.u_ndx=-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla p_n.u_ndx$$

On remarque que :

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t u_nu_n\,dt=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$

2. $\displaystyle-\int_{\mathbb{R}^3}\nabla p_n\,.u_n\,dx=-\int_{\mathbb{R}^3}p_n.\,div\,u_n\,dx=0$ *, puisque* $div\,u_n=0$

3. $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}J_n(u_n.\nabla u_n).u_n\,dx&=\int_{\mathbb{R}^3}(u_n.\nabla u_n).J_nu_n\,dx=\int_{\mathbb{R}^3}(u_n.\nabla u_n).u_n\,dx\\&=\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^j\partial_{x_i}u_n^ku_n^k\,dx=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^3}u_n^j\partial_{x_i}(u_n^k)^2\,dx\\&=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\partial_{x_i}u_n^i(u_n^\delta)^2=-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}div|u|^2\,dx=0\end{aligned}$$

donc,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|^2_{L^2_n(\mathbb{R}^3)} + \nu\|\nabla u_n(t)\|^2_{L^2_n(\mathbb{R}^3)} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \|u_n(t)\|^2_{L^2_n(\mathbb{R}^3)} + 2\nu\int_0^t \|\nabla u_n(t')\|^2_{L^2_n(\mathbb{R}^3)}\, dt' = \|u_n(0)\|^2_{L^2_n(\mathbb{R}^3)}$$

$$= \|J_n u_0\| \leq \|u_0\|^2_{L^2_n(\mathbb{R}^3)}$$

$$\Rightarrow \qquad \|u_n(t)\|^2_{L^2_n(\mathbb{R}^3)} \leq \|u_0\|^2_{L^2_n(\mathbb{R}^3)} \quad \forall t \in [0, T_n^*] \Rightarrow \boxed{T_n^* = +\infty}$$

- *Borne uniforme sur les solutions :*

  u_n *est bornée dans* $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$

  ∇u_n *est bornée dans* $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$

- *Compacité et passage à la limite (construction de la solution faible) :*

  $u_n(t,x)$ *suite bornée dans* $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$ *et* ∇u_n *suite bornée dans* $L^2([0,T], H^1(\mathbb{R}^3))$

  On va localiser notre espace pour qu'on puisse extraire une sous suite convergente :

  Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ *:*
  $u_n(t,x)\chi(x)$ *suite bornée dans* $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], H^1(\mathbb{R}^3))$

  On a besoin des lemmes suivants :

  Lemme 6 *:* $L^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow H^{-\frac{3}{2}-\eta}(\mathbb{R}^3)$.

  Lemme 7 *:* $\partial_t u_n$ *est bornée dans* $L^2([0,T], H^{-\frac{3}{2}-\eta}(\mathbb{R}^3))$.

  Preuve 7 :
  Soit l'équation de (NS_n) *:*

  $$\partial_t u_n = \nu\Delta u_n - u_n\nabla u_n - \nabla\pi_n$$

  $u_n(t,x)$ *est bornée dans* $L^2([0,T], H^1(\mathbb{R}^3))$
  $\Delta u_n(t,x)$ *est bornée dans* $L^2([0,T], H^{-1}(\mathbb{R}^3))$
  $u_n(t,x).\nabla u_n(t,x)$ *est bornée dans* $L^2([0,T], H^{-\frac{3}{2}-\eta}(\mathbb{R}^3))$

  $\Rightarrow u_n\nabla u_n$ *est bornée dans* $L^2([0,T], H^{-\frac{3}{2}-\eta}(\mathbb{R}^3))$

  En appliquant l'opérateur de divergence sur l'équation on aura :

  $$-\Delta\pi_n = div\,(u_n.\nabla u_n) \Rightarrow -\nabla\pi_n = -(-\Delta^{-1}\nabla\, div(u_n.\nabla u_n))$$

où $(-\Delta^{-1}\nabla)$ *est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre zéro borné*

$$\|A(D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

et $(u_n.\nabla u_n)$ *est bornée dans* $L^2([0,T], H^{-\frac{3}{2}-\eta}(\mathbb{R}^3))$

Cela déduit que :

$$\partial_t u_n = \nu\Delta u_n - u_n\nabla u_n - \nabla\pi_n \text{ est dans } L^2([0,T], H^{-\frac{3}{2}-\eta}(\mathbb{R}^3))$$
$$\Rightarrow (\partial_t u_n) \text{ bornée dans } L^2([0,T], H^{-\frac{3}{2}-\eta}(\mathbb{R}^3))$$

Lemme 8 *:*

1. $u_n(t,x)$ *est équi-uniformément continue dans* $L^\infty([0,T], H^{-\frac{3}{2}-\eta}(\mathbb{R}^3))$
2. $u_n(t,x)\chi(x)$ *est équi-uniformement continue dans* $L^\infty([0,T], H^{-\frac{3}{2}-\eta})$

Preuve 8 :

$$\|u_n(t) - u_n(t')\|_{H^{\frac{3}{2}-\eta}} = \|\int_{t'}^t \partial_\tau u_n(\tau)\, d\tau\|_{H^{\frac{3}{2}-\eta}} \leq \int_{t'}^t \|\partial_\tau u_n(\tau)\, d\tau\|_{H^{\frac{3}{2}-\eta}}$$

$$\leq \underbrace{\left(\int_{t'}^t \|\partial_\tau u_n(\tau)\, d\tau\|^2_{H^{\frac{3}{2}-\eta}}\right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq M\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}} \left(\int_{t'}^t 1\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq M\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.|t-t'|^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow u_n$ *est équi-uniformement continue dans* $H^{-\frac{3}{2}-\eta}$

$u_n(t,x)\chi(x)$ *est une fonction de* $C([0,T], H^{-\frac{3}{2}-\eta}(\mathbb{R}^3))$
sachant que :
$H^{-\frac{3}{2}-\eta} \overset{i}{\hookrightarrow} H^{-\frac{3}{2}-2\eta}$ *avec* i *injection compact (Théorème de Rellich).*
$u_n(t,x)\chi(x)$ *est équi-uniformément continue dans* $C([0,T], H^{-\frac{3}{2}-2\eta}(\mathbb{R}^3))$
et le théorème d'Arzela-Ascoli implique que :

$\exists u_{n_j}$ *tel que :* $\chi u_{n_j} \to \chi v$ *dans* $C([0,T], H^{-\frac{3}{2}-\eta}(\mathbb{R}^3))$
u_{n_j} *bornée dans* $C([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$
$\Rightarrow \chi u_{n_j} \to \chi v$ *dans* $C([0,T], H^{-\sigma}(\mathbb{R}^3))$ *où* $\sigma \in (0, -\dfrac{3}{2} - 2\eta)$
χu_{n_j} *bornée dans* $L^2([0,T], H^1(\mathbb{R}^3))$
$\chi u_{n_j} \to \chi v$ *dans* $C([0,T], H^{-\sigma}(\mathbb{R}^3)) \Rightarrow \chi u_{n_j} \to \chi v$ *dans* $L^4([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$

et donc finalement :
$\chi(u_{n_j} \otimes u_{n_j}) \to \chi v \otimes \chi v$ *dans* $L^1([0,T] \times \mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathcal{D}'$

Proposition 1 $u(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ *vérifie l'équation suivante :*

$$\partial_t u + div\,(u \otimes u) - \nu \Delta u = -\nabla p \quad dans\ \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$$

Preuve 1 :
En effet, $\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$:
$\displaystyle\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} u(t,x)(-\partial_t \phi - \nu \Delta \phi)\, dx\, dt - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} (u \otimes u) \nabla \phi\, dx\, dt =$
$\displaystyle\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} p\ div\, \phi\, dx\, dt = 0 \quad puisque\ (div\ \phi = 0)$

On sait que :
$\partial_t u_n + div\ J_n(u_n \otimes u_n) - \nu \Delta u_n = -\nabla \pi_n$

$\Rightarrow \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$:
$$\underbrace{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} u_n(t,x)(-\partial_t \phi - \nu \Delta \phi)\, dx\, dt}_{I_1} - \underbrace{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} (u_n \otimes u_n) \nabla J_n \phi\, dx\, dt}_{I_2} = 0$$

Puisque $\quad u_n \underset{L^2_{Loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)}{\longrightarrow} u \quad$ *alors :*
$$I_1 \longrightarrow \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} u(t,x)(-\partial_t \phi - \nu \Delta \phi)\, dx\, dt$$
$$I_2 = \underbrace{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} (u_n \otimes u_n) \nabla \phi\, dx\, dt}_{I_3} + \underbrace{\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} (u_n \otimes u_n) \nabla (I - J_n) \phi\, dx\, dt}_{I_4}$$
$$I_3 \underset{L^2_{Loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)}{\longrightarrow} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} (u \otimes u) \nabla \phi\, dx\, dt$$
et par le théorème de Plancherel : $\quad \|(I - J_n)\nabla \phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \underset{L^2}{\longrightarrow} 0$
comme $u_n \otimes u_n$ *est bornée dans* $L^2_{loc} \Rightarrow I_4 \longrightarrow 0$
donc,
$$J_n(u_n \otimes u_n) \underset{L^1_{Loc}}{\longrightarrow} u \otimes u$$

3.5 L'inégalité d'énergie :

Pour montrer que u est une solution, il suffit qu'elle vérifie l'inégalité d'énergie :
on sait que pour tout $t \geq 0$ on a :
$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \lim_{n \to \infty} inf \|u_n(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$
et de même :
$$\int_0^t \|\nabla u(t')\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, dt' \leq \lim_{n \to \infty} inf \int_0^t \|\nabla u_n(t')\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, dt'$$

4 Équations de Navier-Stokes anisotropes

Soit le système de Navier Stokes suivant avec une viscosité anisotrope(elle dépend de la direction) :

$$(NS_a)\begin{cases} \partial_t u + u.\nabla u - \nu_h \Delta_h u - \nu_v \partial_3^2 u = -\nabla p \\ \text{div } u = 0 \\ u\mid_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

où $\Delta_h = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$, ν_h est la viscosité horizontale et ν_v désigne la viscosité verticale.

Ce système a été étudié pour la première fois par J.Leray dans le cas où ν_h et ν_v sont strictement positives et la donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ il a prouvé que le système (NS_a) admet une solution faible globale(théorème cité dans la partie 3), ensuite H.Fujita et T.Kato ont prouvé que si la donnée initiale $u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ (espace de sobolev homogène) alors il existe une solution locale en temps, par ailleurs, si $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ est suffisamment petite en respectant le minimum de (ν_h, ν_v) alors (NS_a) est globalement bien posé.

Dans le cas où la viscosité verticale est nulle ou bien elle converge vers zéro, le résultat a été prouvé par J.Y.Chemin et al, ils ont démontré l'existence locale en temps de la solution lorsque la donnée initiale est dans l'espace anisotrope $H^{0,\frac{1}{2}+\eta}(\mathbb{R}^3)$.
En effet, on note que l'espace homogène $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ est bien adapté au système (NS_a) dans le sens de **l'invariance d'échelle** qu'on définit comme suit :
Si u est une solution de l'équation (NS_a) avec la donnée initiale u_0 alors :
$u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est aussi une solution de l'équation avec :

$$u_{0,\lambda} = \lambda u_0(\lambda x) \text{ et } \|u_{0,\lambda}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} = \|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)}$$

Cette approche a été introduite par Fujita et Kato

4.1 Énoncé du résultat

Ces résultats sont mentionnés dans l'article de J.Y.Chemin et al

Théorème 2 (Existence) *Soient $s_0 > \dfrac{1}{2}$ un nombre réel, $u_0 \in H^{0,s_0}$, alors il existe un temps positif et une solution u de (NS_a) définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^3$ telle que :*

$$u \in L^\infty([0,T], H^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2([0,T], H^{1,s_0}(\mathbb{R}^3))$$

De plus, s'il existe une constante C telle que $\|u_0\|_{H^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)} \leq C\nu$ alors on peut choisir $T = +\infty$

Théorème 3 (Unicité) *Soient $s_0 > \dfrac{1}{2}, s \geq \dfrac{3}{2}$ deux nombres réels et soit u_0 une donnée initiale dans $H^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)$, alors il existe au plus une solution u de (NS_a) dans l'espace :*

$$L^\infty(\mathbb{R}^+, H^{0,s}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H^{1,s}(\mathbb{R}^3))$$

On note par T^* le temps maximal d'existence, si T^* est fini alors :

$$\int_0^{T^*} \|u\|^4_{H^{\frac{1}{2},s_0}(\mathbb{R}^3)} dt + \int_0^{T^*} \|u\|^2_{H^{1,s_0}(\mathbb{R}^3)} dt = +\infty.$$

Avant de commencer la démonstration des deux théorèmes, rappelons-nous qu'on n'est plus dans des espaces de Sobolev isotrope cela veut dire que la règle du produit suivante n'est plus convenable :

$$\forall s, t < \frac{d}{2}, s + t > 0 \quad \|uv\|_{\dot{H}^{s+t-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C_{s,t} \|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)} \|v\|_{\dot{H}^t(\mathbb{R}^3)}$$

on doit alors introduire le lemme suivant :

Lemme 9 *Soient $\sigma < 1, \sigma' < 1, s_0 > \dfrac{1}{2}, s_0 > s$ des nombres réels tels que $\sigma + \sigma' > 0$ et $s + s_0 > 0$, soient u, v deux distributions tempérées alors :*

$\exists\, C$ *tel que* $\|uv\|_{H^{\sigma+\sigma'-1,s}(\mathbb{R}^3)} \leq C(\|u\|_{H^{\sigma,s_0}} \|v\|_{H^{\sigma',s}} + \|u\|_{H^{\sigma,s}} \|v\|_{H^{\sigma',s_0}})$

Preuve 9 :

L'outil de base de la démonstration est la théorie de Littlewood-Paley anisotrope :

$$uv = T^h_u v + T^h_v u + R^h(u, v)$$

avec

$$T^h_u v \overset{déf}{=} \sum_j S^h_j u \Delta^h_j v \quad et \quad R^h(u, v) \overset{déf}{=} \sum_j \sum_{i\in\{0,\pm 1\}} \Delta^h_j u \Delta^h_{j-i} v$$

$$uv = \sum_j S^h_{j-1} u.\Delta^h_j v + \sum_j S^h_{j-1} v.\Delta^h_j u + \sum_{\substack{j \\ i\in\{0,\pm 1\}}} \Delta^h_j u.\Delta^h_{j+i} v$$

Appliquant le para-produit de Bony dans la direction verticale, on aura neuf termes à estimer ici, on va prendre les trois premiers et les autres seront estimés par un calcul semblable.

- $\| \sum\limits_{j,k} S_{k-1}^v S_{j-1}^h u . \Delta_k^v . \Delta_j^h v \|_{L^2} \leq \sum\limits_{j,k} \| S_{k-1}^v S_{j-1}^h u \|_{L_h^\infty(L_v^\infty)} . \| \Delta_k^v . \Delta_j^h v \|_{L_h^2(L_v^2)}$

  et puisque on sait que :

  $\forall s_0 > \dfrac{1}{2} : H^{s_0} \hookrightarrow L^\infty$ *et* $\forall s' > s : H^s \hookrightarrow H^{s'}$ *alors*

  $$\leq \sum_j \| S_{j-1}^h u \|_{L_h^\infty(H_v^{s_0})} . \| \Delta_j^h v \|_{L_h^2(H_v^s)} \overset{Bernstein}{\leq} 2^{j(1-\sigma)} c_j \| u \|_{H^{\sigma, s_0}} . 2^{-j\sigma'} \| v \|_{H^{\sigma', s}}$$

  $$\leq 2^{-j(\sigma+\sigma'-1)} c_j \| u \|_{H^{\sigma, s_0}} . 2^{-j\sigma'} \| v \|_{H^{\sigma', s}}$$

  avec $c_j \in l_j^2$ *et* $\sum\limits_{j \in \mathbb{Z}} c_j \leq 1$

- $\| \sum\limits_{j,k} S_{k-1}^v \Delta_j^h v . \Delta_k^v . S_{j-1}^h u \|_{L^2} \leq \sum\limits_{j,k} \| S_{k-1}^v \Delta_j^h v \|_{L_h^\infty(L_v^\infty)} . \| \Delta_k^v . S_{j-1}^h u \|_{L_h^2(L_v^2)}$

  $\leq \sum\limits_j \| \Delta_j^h v \|_{L_h^\infty(H_v^{s_0})} . \| S_{j-1}^h u \|_{L_h^2(H_v^s)}$

  $\overset{Bernstein}{\leq} 2^{-j(\sigma+\sigma'-1)} c_j \| v \|_{H^{\sigma, s_0}} . \| u \|_{H^{\sigma', s}}$

- $\| \sum\limits_{\substack{j \\ i \in \{0, \pm 1\}}} \Delta_k^v S_{j-1}^h u . \Delta_{k+i}^v \Delta_j^h v \|_{L^2} \overset{Bernstein}{\leq} 2^{\frac{j}{2}} \sum\limits_{j,k} \| \Delta_k^v S_{j-1}^h u . \Delta_{k+i}^v \Delta_j^h v \|_{L^1}$

  $\leq 2^{\frac{j}{2}} \sum\limits_{j,k} \| \Delta_k^v S_{j-1}^h u \|_{L^2} . \| \Delta_{k+i}^v \Delta_j^h v \|_{L^2}$

  $\leq 2^{\frac{j}{2}} \sum\limits_j \| S_{j-1}^h u \|_{L_v^2(L_h^\infty)} . \| \Delta_j^h v \|_{L_v^2(L_h^2)}$

  $\overset{Bernstein}{\leq} c_j 2^{-j(\sigma+\sigma'-\frac{1}{2})} \| u \|_{H^{\sigma, s_0}} . \| v \|_{H^{\sigma', s}}$

et on a la preuve du lemme.

4.2 Estimation d'énergie anisotrope

On va beaucoup utiliser le lemme suivant pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système (NS_a) :

Lemme 10 $\forall s_0 > \dfrac{1}{2}$ *et* $s \geq s_0$ *il existe une constante* C *telle que pour n'importe quel champ de vecteur* u *et* v *de divergence nulle on a :*

$$| (\Delta_k^v(u.\nabla v), \Delta_k^v v)_{L^2} | \leq C d_k 2^{-2ks} \| v \|_{H^{\frac{1}{2}, s}} (\| u \|_{H^{\frac{1}{2}, s_0}} \| \nabla_h v \|_{H^{0,s}} + \| u \|_{H^{\frac{1}{2}, s}} \| \nabla_h v \|_{H^{0, s_0}}$$
$$+ \| \nabla_h u \|_{H^{0, s_0}} \| v \|_{H^{\frac{1}{2}, s}} + \| \nabla_h u \|_{H^{0,s}} | v \|_{H^{\frac{1}{2}, s_0}})$$

Preuve 10 :
Définissons $\Delta_k^v(u.\nabla v)$ *comme étant la somme de deux termes qui vont être estimés par deux manières différentes :*

$$\Delta_k^v(u.\nabla v) = \Delta_k^v(u_h.\nabla_h v) + \Delta_k^v(u_3\partial_3 v)$$

Commençons par le premier terme : on va utiliser un calcul similaire à celui qui conduisait au lemme (9) *.*

$$\begin{aligned}\|\Delta_k^v(u_h.\nabla_h v)\|_{L^2(\mathbb{R}_v,H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))} &\leq \sum_{i=1}^{2} \|\Delta_k^v(T^v_{u_i}.\partial_i v) + \Delta_k^v(T^{u_i}_{\partial_i v}.\partial_i v) + \Delta_k^v(R(u,v))\|_{L^2(\mathbb{R}_v,H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))} \\ &\leq \sum_{k'} \|S^v_{k'}u_h\|_{L^\infty(\mathbb{R}_v,H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}.\|\Delta^v_{k'}\nabla_h v\|_{L^2(\mathbb{R}_v,L^2(\mathbb{R}^2))} \\ &+ \sum_{k'} \|S^v_{k'}\nabla_h v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_v,H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}.\|\Delta^v_{k'}u_h\|_{L^2(\mathbb{R}_v,L^2(\mathbb{R}^2))} \\ &+ \sum_{|k-k'|\leq N_0} \|\Delta^v_{k'}u_h\|_{L^\infty(\mathbb{R}_v,H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}.\|\Delta^v_{k'}\nabla_h v\|_{L^2(\mathbb{R}_v,L^2(\mathbb{R}^2))}\end{aligned}$$

utilisons le fait que :

$$\|\Delta_k^v u\|_{L^2(\mathbb{R}_v,L^2(\mathbb{R}^2))} \leq c_k 2^{-ks}\|u\|_{H^{0,s}(\mathbb{R}^3)}$$

et

$$\forall s_0 > \frac{1}{2}\ ,\ \sigma \in \mathbb{R}\ , \exists\ C \text{ tel que : } \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_v,H^\sigma(\mathbb{R}^2))} \leq C\ \|u\|_{H^{\sigma,s_0}}$$

on aura :

$$\begin{aligned}\leq C\sum_{k'} 2^{-k's}c_{k'}\|u_h\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h v\|_{H^{0,s}} + C\sum_{k'} 2^{-k's}c_{k'}\|\nabla_h v\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|u_h\|_{H^{0,s}} \\ + \sum_{k'} 2^{-k's}c_{k'}\|u_h\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h v\|_{H^{0,s}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\leq C2^{-ks}\underbrace{\sum_{k'} 2^{-s(k+k')}c_{k'}}_{\tilde{c}_k}\|u_h\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h v\|_{H^{0,s}} + C2^{-ks}\tilde{c}_k\|\nabla_h v\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|u_h\|_{H^{0,s}} \\ + C2^{-ks}\tilde{c}_k\|u_h\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h v\|_{H^{0,s}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |(\Delta_k^v(u_h.\nabla_h v), \Delta_k^v v)|_L^2 \leq \tilde{c}_k 2^{-2ks}\|v\|_{H^{\frac{1}{2},s}}(\|u\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h v\|_{H^{0,s}} + \|u\|_{H^{0,s}}.\|\nabla_h v\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}})$$

Pour le deuxième terme, on va aussi l'écrire comme une somme :

$$\Delta_k^v(u_3\partial_3 v) = u_3\partial_3\Delta_k^v v + [\Delta_k^v, u_3]\partial_3 v$$

où $[\Delta_k^v, u_3]\partial_3 v$ *est le commutateur.*

$\Delta_k^v(u_3\partial_3 v) = A_k^v + B_k^v$ *avec :*

$A_k^v = \Delta_k^v \sum_{k'\geq k-N_0} S_{k'+2}^v(\partial_3 v)\Delta_{k'}^v u_3$, $B_k^v = \Delta_k^v \sum_{|k'-k|\leq N_0} S_{k'-1}^v u_3\partial_3(\Delta_{k'}^v u_3)$

il est clair que :

$$|(A_k^v, v)_{L^2(\mathbb{R}^3)}| \leq Cc_k 2^{-2ks}\|v\|_{H^{\frac{1}{2},s}}.\|A_k^v\|_{L^2(\mathbb{R}_v)}$$

avec l'inégalité de Bernstein et la loi du produit on a que :

$$\begin{aligned}
\|A_k^v\|_{L^2(\mathbb{R}_v,H^{-\frac{1}{2}})} &\leq C2^{\frac{k}{2}} \sum_{k'\geq k-N_0} \|S_{k'+2}\partial_3 v\|_{L^2(\mathbb{R}_v,H^{-\frac{1}{2}})}.\|\Delta_{k'}^v u_3\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C2^{\frac{k}{2}} \sum_{k'\geq k-N_0} 2^{k'}2^{-k's}\|v\|_{H^{\frac{1}{2},s}}.\|\Delta_k^v u_3\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leq C2^{\frac{k}{2}} \sum_{k'\geq k-N_0} 2^{k'(1-s)}\|v\|_{H^{\frac{1}{2},s}}.\|\Delta_k^v u_3\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

u *est de divergence nulle :* $\partial_3 u_3 = -div_h\, u_h$

$$\|\Delta_k^v u_3\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \overset{Bernstein}{\leq} C2^{-k'}\|\Delta_{k'}^v\partial_3 u_3\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq 2^{-k'}\|\Delta_{k'}^v div_h u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Donc $\forall s > \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\|A_k^v\|_{L^2(\mathbb{R}_v,H^{-\frac{1}{2}})} &\leq C2^{\frac{k}{2}} \sum k'2^{k'(1-s)}2^{-k'}\|v\|_{H^{\frac{1}{2},s}}.2^{-k's_0}\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}} \\
&\leq C2^{\frac{k}{2}} \sum_{k'} 2^{k'(1-s)}2^{-k'(1-s_0)}c_{k'}\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}}.\|v\|_{H^{\frac{1}{2},s}} \\
&\leq C2^{-k(s+s_0-\frac{1}{2})}\tilde{c}_k\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}}.\|v\|_{H^{\frac{1}{2},s}}
\end{aligned}$$

Maintenant estimons le terme B_k^v :

$$(B_k^v, v)_{L^2} = (S_k^v u_3\partial_3 v, v)_{L^2} + R(u,v)$$

avec $R(a,b) = \sum_{|k-k'|\leq N_0}([\Delta_k^v, S_{k'-1}^v u_3]\partial_3\Delta_{k'}^v v, \Delta_{k'}^v v)_{L^2} + \sum_{|k-k'|\leq N_0}((S_k^v - S_{k'-1}^v)u_3\partial_3\Delta_{k'}^v v, \Delta_{k'}^v v)_{L^2}$

$$(S_k^v u_3\partial_3 v, \Delta_{k'}^v v)_{L^2} \overset{IPP}{=} -\frac{1}{2}(S_k^v(\partial_3 u_3)v, \Delta_{k'}^v v)_{L^2}$$

u est de divergence nulle :

$$\partial_3 u_3 = -div_h u_h$$
$$\Rightarrow (B_k^v, \Delta_{k'}^v v)_{L^2} = (vS_k^v(div_h u_h), \Delta_{k'}^v v)_{L^2} + R(a,b)$$

Le terme $(vS_k^v(div_h u_h), \Delta_{k'}^v v)_{L^2}$ *va être estimé exactement comme* $\Delta_k^v(u_h.\nabla_h v)$

Pour estimer $([\Delta_k^v, S_{k'-1}^v u_3]\partial_3 \Delta_{k'}^v v, \Delta_{k'}^v v)_{L^2}$ *on a :*

$\forall f :\ ([\Delta_k^v, S_{k'-1}^v u_3]f)(x_h, x_v) =$
$2^k \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} h(2^k y_3)(S_{k'-1}^v u_3(x_h, x_3) - S_{k'-1}^v u_3(x_3, x_h - y_3)).f(x_h, x_h - y_3)\, dy_3$

Appliquons la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}
&([\Delta_k^v, S_{k'-1}^v u_3]f)(x_h, x_3) = \\
&-2^{-k}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^3} 2^k h_k(2^k y_3)(2^k y_3)(S_{k'-1}^v \partial_3 u_3)(x_h, x_3+t(x_3-y_3)).f(x_h, x_3-y_3)dy_3 dt \\
&= -2^{-k}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^3} h'(2^k y_3)(S_{k'-1}^v \partial_3 u_3)(x_h, x_3+t(x_3-y_3)).f(x_h, x_3-y_3)\, dy_3\, dt \\
&= 2^{-k}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^3} h'(2^k y_3)(S_{k'-1}^v div\ u_h)(x_h, x_3+t(x_3-y_3)).f(x_h, x_3-y_3)\, dy_3\, dt
\end{aligned}$$

et par la loi du produit de Sobolev :

$$\|([\Delta_k^v, S_{k'-1}^v u_3]f)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)} \le C2^{-k}\|S_{k'}^v div_h u_h\|_{L^\infty(\mathbb{R}_v, L^2(\mathbb{R}))}.\|f\|_{L^2(\mathbb{R}, H^{\frac{1}{2}})}$$

Donc on a :

$$([\Delta_k^v, S_{k'-1}^v u_3]\partial_3 \Delta_{k'}^v v, \Delta_{k'}^v v)_{L^2} \le$$
$$C2^{k'-k}\|S_{k'-1}^v div_h u_h\|_{L^\infty(\mathbb{R}_v, L^2(\mathbb{R}^2))}\|\Delta_k^v v\|_{L^2(\mathbb{R}_v, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}\|\Delta_{k'}^v v\|_{L^2(\mathbb{R}_v, H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2))}$$

Si on prend en compte que $|k'-k| \le N_0$ *et que* $\forall s_0 > \dfrac{1}{2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\exists\, C$ *tel que :*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_v, H^\sigma(\mathbb{R}^2))} \le C\ \|u\|_{H^{\sigma,s_0}}$$

On trouve :

$$([\Delta_k^v, S_{k'-1}^v u_3]\partial_3 \Delta_{k'}^v v, \Delta_{k'}^v v)_{L^2} \le C2^{-2ks}\tilde{c}_k\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}}.\|v\|^2_{H^{\frac{1}{2},s}}$$

Le terme restant $((S_k^v - S_{k'-1}^v)u_3\partial_3\Delta_{k'}^v v, \Delta_{k'}^v v)_{L^2}$ *va être estimé comme le terme* A_k^v *, et on a la preuve du lemme.*

4.3 Démonstration des théorèmes

La donnée initiale u_0 est de régularité L^2 en variables horizontales et $H^{\frac{1}{2}+\eta}$ en variables verticales. D'autre part pour des viscosités positives, le problème de (NS_a) a été prouvé par J-Y Chemin B.Desjardins I.Gallagher et E.Grenier et l'unicité par D.Iftimie. Avec cette régularité, on obtient un temps d'existence court pour une donnée initiale grande et une existence globale pour une donnée initiale petite.
La preuve des théorèmes est reliée au lemme 10 , de ce dernier on va déduire la partie globale du théorème.

Preuve de l'existence :
En utilisant l'estimation d'énergie L^2 et appliquant Δ_k^v on a :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta_k^v u(t)\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla_h(\Delta_k^v u(t))\|_{L^2}^2 \leq (\Delta_k^v(u.\nabla u), \Delta_k^v u)_{L^2}$$

*appliquant le lemme*10 *avec* $s = s_0$ *et* $u = v$ *sur le membre de droite on aura :*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta_k^v u(t)\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla_h(\Delta_k^v u(t))\|_{L^2}^2 \leq Cc_k 2^{-2ks_0}\|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}^2.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}}$$

On multiplie l'inégalité par 2^{2ks_0} *et on prend la somme sur* k *:*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H^{0,s_0}}^2 + \nu\|\nabla_h u(t)\|_{H^{0,s_0}}^2 \leq C\|u\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}^2.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}}$$

Et avec l'inégalité d'interpolation suivante :

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}^2 \leq \|u\|_{H^{0,s_0}}.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}}$$

on en déduit que :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H^{0,s_0}}^2 + \nu\|\nabla_h u(t)\|_{H^{0,s_0}}^2 \leq C\|u\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}}^2$$

il est évident que si $\|u_0\|_{H^{0,s_0}}$ *est suffisamment petite alors la fonction* $\|u\|_{H^{0,s_0}}^2$ *est décroissante et plus précisément si :*

$$\|u\|_{H^{0,s_0}} \leq \frac{\nu}{2C}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{H^{0,s_0}}^2 + \frac{\nu}{2}\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}}^2 \leq 0$$

On intègre en temps :

$$\|u(t)\|^2_{H^{0,s_0}} + \nu \int_0^t \|\nabla_h u(t')\|^2_{H^{0,s_0}}\, dt \leq \|u_0\|^2_{H^{0,s_0}}$$

Pour la preuve locale du théorème, on considère différemment les hautes et les basses fréquences verticales.
Les hautes fréquences sont traitées par le lemme suivant :

Lemme 11 *Soit $s_0 > \frac{1}{2}$, $\exists\, C$ tel que $\forall u$ solution régulière de (NS_a) sur $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ et $\forall N$ un entier on a :*

$$\|(I - S^v_N)u\|_{L^\infty_T(H^{0,s_0})} + 2\nu \|\nabla_h (I - S^v_N)u\|_{L^2_T(H^{0,s_0})} \leq C\|(I - S^v_N)u_0\|^2_{H^{0,s_0}}$$
$$+ C\int_0^T \|u(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u(t)\|_{H^{0,s_0}}$$

Preuve 11 : On note par u_k le terme $\Delta^v_k u$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_k(t)\|^2_{L^2} + \nu\|\nabla_h u_k(t)\|^2_{L^2} \leq Cc_k 2^{-2ks_0}\|u(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u(t)\|_{H^{0,s_0}}$$

On multiplie l'inégalité par 2^{2ks_0} et on prend la somme sur k

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{k\geq N-1} 2^{2ks_0}\|u_k(t)\|^2_{L^2} + \nu \sum_{k\geq N-1} 2^{2ks_0}\|\nabla_h u_k(t)\|^2_{L^2} \leq C\|u(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u(t)\|_{H^{0,s_0}}$$

on intègre sur $[0,T]$

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\Big(\sum_{k\geq N-1} 2^{2ks_0}\|u_k(t)\|^2_{L^2}\Big)\, dt + 2\nu\int_0^T \sum_{k\geq N-1} 2^{2ks_0}\|\nabla_h u_k(t)\|^2_{L^2}\, dt$$
$$\leq C\int_0^T \|u(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u(t)\|_{H^{0,s_0}}$$

Sachant que : $(I - S^v_N u) = \sum_{k\geq N-1} \Delta^v_k u$

alors,

$$\sum_{k\geq N-1} 2^{2ks_0}\|(I - S^v_N)u(t)\|^2_{H^{0,s_0}} + 2\nu\int_0^T \|\nabla_h (I - S^v_N)u\|^2_{H^{0,s_0}}\, dt$$
$$\leq C\|(I - S^v_N)u_0\|^2_{H^{0,s_0}} + C\int_0^T \|u(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u(t)\|_{H^{0,s_0}}$$

et le lemme est prouvé.

Il nous reste les basses fréquences verticales et les hautes fréquences horizontales qui vont être traitées par le lemme suivant :

Lemme 12 *soient $s_0 > \dfrac{1}{2}$ et M, N deux nombres entiers $M \geq N$, on définit $u_{M,N} = (I - S_M^h)S_N^v u$ alors :*
$\exists\, C$ tel que :

$$\|u_{M,N}\|^2_{L^\infty_T(H^{0,s_0})} + 2\nu\|\nabla_h u_{M,N}\|^2_{L^2_T(H^{0,s_0})} \leq \|u_{M,N}(0)\|^2_{H^{0,s_0}}$$
$$+C\int_0^T \|u(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u(t)\|_{H^{0,s_0}}\,dt$$

Preuve 12 :
prenons l'estimation d'énergie dans L^2 :
$\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|u_{M,N}\|^2_{L^2} + \nu\|\nabla_h u_{M,N}\|^2_{L^2} = (A^h_{M,N}, u_{M,N})_{L^2} + (B^v_{M,N}, u_{M,N})_{L^2}$

avec :

$$A^h_{M,N} = (I - S^h_M)S^v_N(u_h.\nabla_h u) \text{ et } B^h_{M,N} = (I - S^h_M)S^v_N(u_3.\partial_3 u)$$

l'estimation de $A^h_{M,N}$:

En utilisant la loi du produit de Sobolev :

$$\|A^h_{M,N}(.,x_3)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C\|u_h(.,x_3)\|_{H^{\frac{1}{2}}}.\|\nabla_h u(.,x_3)\|_{L^2}$$

$s_0 > \dfrac{1}{2}$:

$$\int_{\mathbb{R}_v}\|A^h_{M,N}\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}} \leq C\int_{\mathbb{R}_v}\|u_h\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}}.\|\nabla_h u\|^2_{L^2} \leq C\|u_h\|^2_{L^2(\mathbb{R}_v,H^{\frac{1}{2}})}.\|\nabla_h u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_v,L^2)}$$

donc :

$$(A^h_{M,N}, u_{M,N})_{L^2} \leq C\|u_h\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}}$$

l'estimation de $B^v_{M,N}$:

Le fait que u est de divergence nulle, on pourra écrire le terme $B^v_{M,N}$ comme suit :

$$B^h_{M,N} = (I - S^h_M)S^v_N(\partial_3(u_3 u) + u\, div_h\, u_h)$$

Le terme $(I - S^h_M)S^v_N(u\, div_h\, u_h)$ sera estimé exactement comme $A^h_{M,N}$:

$$((I - S^h_M)S^v_N(u\, div_h\, u_h), u_{M,N})_{L^2} \leq \|u\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|div_h u\|_{H^{0,s_0}}$$
$$\leq C\|u\|^2_{\frac{1}{2},s_0}.\|\nabla_h u\|_{0,s_0}$$

Pour le terme restant $(I - S^h_M)S^v_N\partial_3(u_3 u)$:

d'après l'analyse de Fourier, on observe que :

$$(I - S^h_M) = 2^{-M}(I - S^h_M)(\chi_1(D)\partial_1 + \chi_2(D)\partial_2)$$

avec χ_1 et χ_2 deux fonctions homogènes de degré 0

en utilisant cette analyse et l'inégalité de Bernstein on trouve que :

$$\begin{aligned}((I - S^h_M)S^v_N(u\, div_h\, u_h), u_{M,N})_{L^2} &\leq C2^{N-M}\|u_3 u\|_{L^2}.\|\nabla_h u_{M,N}\|_{L^2} \\ &\leq C\|u\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}}\end{aligned}$$

donc $((A^h_{M,N} + B^v_{M,N}), u_{M,N})_{L^2} \leq C\|u\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\|u_{M,N}(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla_h u_{M,N}(t)\|^2_{L^2} \leq C\|u\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}$

<u>La conclusion de la partie locale du théorème :</u>

Soit l'estimation d'énergie L^2 habituelle :

$$\|u(t)\|^2_{L^2} + 2\nu\int_0^t \|\nabla_h u(t')\|^2_{L^2}\, dt' \leq \|u_0\|^2_{L^2}$$

$$\begin{aligned}2\nu\int_0^t \|\nabla_h S^v_N S^h_M u(t')\|^2_{H^{0,s_0}}\, dt' &\leq C2^{2Ns_0}\int_0^t \|\nabla_h S^h_M u(t')\|^2_{L^2}\, dt \leq C2^{2Ns_0}2^{2M}\int_0^t \|u(t')\|^2_{L^2}\, dt' \\ &\leq C2^{2M}2^{2Ns_0}T\|u_0\|^2_{L^2}\end{aligned}$$

Appliquons les lemmes (11) , (12) et l'inégalité d'interpolation :

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{L^4_T(H^{\frac{1}{2},s_0})} + 2\nu\|\nabla_h u\|^2_{L^2_T(H^{0,s_0})} \leq C(&\|(I - S^v_N)u_0\|^2_{H^{0,s_0}} + \|(S^v_N(I - S^h_M))u_0\|^2_{H^{0,s_0}} \\ &+ \int_0^t \|u(t')\|^2_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u(t')\|^2_{H^{0,s_0}}\, dt' + 2^{2M}2^{2Ns_0}T\|u_0\|^2_{L^2})\end{aligned}$$

utilisons l'inégalité d'interpolation :

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{L^4_T(H^{\frac{1}{2},s_0})} + \nu\|\nabla_h u\|^2_{L^2_T(H^{0,s_0})} \leq C\left(\|(I - S^v_N)u_0\|^2_{H^{0,s_0}} + \|(S^v_N(I - S^h_M))u_0\|^2_{H^{0,s_0}}\right) \\ + 2^{2M}2^{2Ns_0}T\|u_0\|^2_{L^2} + \frac{C}{\nu}\|u\|^4_{L^4_T(H^{\frac{1}{2},s_0})}\end{aligned}$$

Choisissons :
un entier N tel que $\|(I - S^v_N)u_0\|^2_{H^{0,s_0}} \leq \eta$

un entier $M \geq N$ tel que : $\|(S^v_N(I - S^h_M))u_0\|^2_{H^{0,s_0}} \leq \eta$

un temps $T_0 > 0$ tel que : $2^{2M}2^{2Ns_0}T\|u_0\|^2_{L^2} \leq \eta$

On obtient pour n'importe quel $T \leq T_0$:

$$\|u\|^2_{L^4_T(H^{\frac{1}{2},s_0})} + \nu\|\nabla_h u\|^2_{L^2_T(H^{0,s_0})} \leq C\eta + \frac{C}{\nu}\|u\|_{L^4_T(H^{\frac{1}{2},s_0})}$$

Finalement,
$\forall \eta > 0$ et $\tilde{T} > 0$:

$$\|u\|^2_{L^4_T(H^{\frac{1}{2},s_0})} + \nu\|\nabla_h u\|^2_{L^2_T(H^{0,s_0})} \leq \eta$$

Preuve d'unicité :
On considère $u_0 \in H^{0,s}$, on a d'après le lemme (10) que :

$$\forall s > s_0 : \ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_k\|^2_{L^2} + \nu\|\nabla_h u_k\|^2_{L^2} \leq Cc_k 2^{-2ks}\|u\|_{H^{\frac{1}{2},s}}(\|u\|_{H^{\frac{1}{2},s}}.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}} + \|u\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s}})$$

On multiplie par 2^{2ks} et en prenant la somme :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{H^{0,s}} + \nu\|\nabla_h u\|^2_{H^{0,s}} &\leq C\|u\|_{H^{\frac{1}{2},s}}\left(\|u\|_{H^{\frac{1}{2},s}}.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}} + \|u\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s}}\right)\\ &\leq \|u\|^2_{H^{\frac{1}{2},s}}.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s_0}} + \|u\|_{H^{\frac{1}{2},s}}.\|u\|_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|\nabla_h u\|_{H^{0,s}}\\ &\leq \frac{C}{\nu^2}\|u\|^4_{H^{\frac{1}{2},s_0}}.\|u\|^2_{H^{0,s}} + \frac{C}{\nu}\|\nabla_h u\|^2_{H^{0,s_0}}.\|u\|^2_{H^{0,s}}\end{aligned}$$

Intégrons en temps et utilisons l'inégalité de Grönwall :
$$\|u\|^2_{L^\infty_T(H^{0,s})} + 2\nu\|\nabla_h u\|^2_{L^2_T(H^{0,s})} \leq \exp\left(\frac{C}{\nu^2}\int_0^T \|u(t)\|^4_{H^{\frac{1}{2},s_0}}\,dt + \frac{C}{\nu}\int_0^T \|\nabla_h u(t)\|^2_{H^{0,s_0}}\,dt\right)$$
et donc la durée de vie de la solution est contrôlée par :

$$\frac{C}{\nu^2}\int_0^T \|u(t)\|^4_{H^{\frac{1}{2},s_0}}\,dt + \frac{C}{\nu}\int_0^T \|\nabla_h u(t)\|^2_{H^{0,s_0}}\,dt = +\infty$$

Maintenant, prouvons l'unicité de la solution pour un $s > \dfrac{3}{2}$:
Soient u_1 et u_2 deux solutions de (NS_a) avec la donnée initiale $u_0 \in H^{0,s}$ tel que :

$$u_1 \text{ et } u_2 \in L^\infty([0,T], H^{0,s}) \cap L^2([0,T], H^{1,s})$$

On définit : $w = u_1 - u_2$ on a alors :

$$\partial_t w - \nu\Delta_h w + u_1.\nabla w + w.\nabla u_2 = -\nabla p$$

En utilisant le lemme (10) et l'inégalité d'interpolation, on va estimer les termes croisés

$$
\begin{aligned}
(u_1.\nabla w, w)_{H^{0,s-1}} &\leq C\left(\|\nabla_h u_1\|_{H^{0,s-1}}.\|w\|^2_{H^{\frac{1}{2},s-1}} + \|u_1\|_{H^{\frac{1}{2},s-1}}.\|w\|_{H^{\frac{1}{2},s-1}}.\|\nabla_h w\|_{H^{0,s-1}}\right) \\
&\leq C\left(\|\nabla_h u_1\|_{H^{0,s-1}}.\|w\|_{H^{0,s-1}}.\|\nabla_h w\|_{H^{0,s-1}}. + \|u_1\|_{H^{\frac{1}{2},s-1}}.\|w\|^{\frac{1}{2}}_{H^{0,s-1}}.\|\nabla_h w\|^{\frac{3}{2}}_{H^{0,s-1}}\right) \\
&\leq \frac{\nu}{C}\|\nabla_h w\|^2_{H^{0,s-1}} + \frac{C}{\nu}\left(\|\nabla_h u_1\|^2_{H^{\frac{1}{2},s-1}} + \frac{1}{\nu^2}\|u_1\|^4_{H^{\frac{1}{2},s-1}}\right)\|w\|_{H^{0,s-1}}
\end{aligned}
$$

et on peut écrire grâce au lemme (10) :

$$
(\Delta_k^v(w_h.\nabla_h u_2), \Delta_k^v w) \leq C 2^{-2k(1-s)} c_k \|w\|^2_{H^{\frac{1}{2},s-1}}.\|\nabla_h u_2\|_{H^{0,s-1}}
$$

et

$$
(\Delta_k^v(w_v.\partial_v u_2), \Delta_k^v w) \leq C 2^{-2k(1-s)} c_k \|w\|_{H^{\frac{1}{2},s-1}}.\|w\|_{H^{0,s-1}}.\|u_2\|_{H^{\frac{1}{2},s-1}}
$$

D'où ;

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|w\|^2_{H^{0,s-1}} + \nu\|\nabla_h w\|^2_{H^{0,s-1}} \leq \frac{\nu}{C}\|\nabla_h w\|^2_{H^{0,s-1}} &+ \frac{C}{\nu}(\|\nabla_h u_1\|^2_{H^{\frac{1}{2},s-1}} \\
&+ \|\nabla_h u_1\|^2_{H^{\frac{1}{2},s-1}} + \frac{1}{\nu^2}(\|u_1\|^4_{H^{\frac{1}{2},s-1}} + \|u_2\|^4_{H^{\frac{1}{2},s-1}}))\|w\|^2_{H^{0,s-1}}
\end{aligned}
$$

intégrons en temps et appliquons l'inégalité de Grönwall :

$$
\begin{aligned}
\|w\|^2_{L^\infty_T(H^{0,s-1})} \leq \|w(0)\|^2_{H^{0,s-1}} \exp(&\int_0^t \frac{C}{\nu}(\|\nabla_h u_1\|^2_{H^{\frac{1}{2},s-1}} + \|\nabla_h u_1\|^2_{H^{\frac{1}{2},s-1}} \\
&+ \frac{1}{\nu^2}(\|u_1\|^4_{H^{\frac{1}{2},s-1}} + \|u_2\|^4_{H^{\frac{1}{2},s-1}})\|w\|^2_{H^{0,s-1}}\, dt')
\end{aligned}
$$

Finalement,
si $u_1(0) = u_2(0) \Rightarrow w(0) = 0 \Rightarrow \|w(t)\| = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$

5 Fluides en rotation rapide

Le système de Navier-Stokes-Coriolis apparaît lorsqu'on étudie par exemple l'évolution temporelle des courants océaniques dans le référentiel terrestre en rotation.
On s'intéresse au cas où la viscosité verticale qui dépend de ε (nombre de Rossby) est nulle ou bien elle converge vers zéro et la viscosité horizontale strictement positive. On remarque dans ce cas, que le manque de régularité dans la direction verticale nous empêche d'utiliser la théorie de Leray pour les solutions faibles.
On veut étudier l'existence globale et l'unicité de la solution du système suivant lorsque ε est assez petit :

$$(FR_\varepsilon)\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon.\nabla u^\varepsilon - \nu_h \Delta_h u^\varepsilon - \nu_v \partial_3^2 u^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} e_3 \wedge u^\varepsilon = -\nabla p \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ div\ u^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon \end{cases}$$

Remarque : Le terme de Corilois "$\frac{1}{\varepsilon} e_3 \wedge u^\varepsilon$" ne contribue pas dans les estimations d'énergie

5.1 Cas de $\mathbb{R}^3$ tout entier

5.1.1 Existence globale de la solution

Avant d'énoncer le résultat d'existence globale de la solution, introduisons l'opérateur de Leray :

Définition 5 *L'opérateur de Leray $\mathcal{P}$ est le projecteur orthogonal de $(L^2(\mathbb{R}^3))^3$ dans H_{div} l'espace des champs à divergence nulle.*

$$\mathcal{P}\, u = u - \nabla \frac{1}{\Delta}(\nabla.u)$$

soit le problème suivant : $\begin{cases} \partial_t u + \dfrac{1}{\varepsilon} L\, u = -\nabla p \\ u(0) = u_0 \end{cases}$ avec $L\, u = u \times e_3$

Appliquons l'opérateur de Leray sur le système :
$\partial_t u + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{P}(u \times e_3) = 0 \quad (\mathcal{P}\, u = 0 \Leftrightarrow \exists q$ tel que $u = \nabla q)$
ensuite par la transformée de Fourier on a :

$$\partial_t \widehat{u} + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{P}(\xi)(\widehat{u} \times e_3) = 0 \qquad \text{où} \quad \mathcal{P}(\xi) = I - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}$$

Les valeurs propres de la matrice $A = \mathcal{P}(\xi).\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont $\lambda = \pm i\dfrac{\xi_3}{|\xi|}$
Si on pose $u = P\,v$ où P est la matrice de passage on a :

$$\begin{cases} \partial_t P\,v + \dfrac{1}{\varepsilon} AP\,v = 0 \\ P\,v(0) = u_0 \end{cases}$$

On multiplie par l'inverse de la matrice de passage P^{-1} :

$$\begin{cases} \partial_t v + \dfrac{1}{\varepsilon} P^{-1}AP\,v = 0 \\ v(0) = P^{-1}u_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_t v + \dfrac{1}{\varepsilon} D\,v = 0 \\ v(0) = P^{-1}u_0 \end{cases}$$

où D est la matrice diagonalisable.

$\widehat{u}(t,\xi) = \mathrm{e}^{\pm i \frac{t}{\varepsilon} \frac{\xi_3}{|\xi|}^2} \widehat{u}_\pm$ avec $\widehat{u}_\pm = (\widehat{u}, \varphi_\pm)$ et $\varphi_\pm$ sont les vecteurs propres.

et donc la solution unique de système est :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{ix\xi \pm i \frac{t}{\varepsilon} \frac{\xi_3}{|\xi|}^2} \widehat{u}_\pm(\xi)\, d\xi$$

Théorème 4 *Soient* $s > \dfrac{3}{2}$, $u_0 \in H^{0,s}$ *donnée initiale,* $\nu_h > 0$ *et* $\nu_v \geq 0$ *des nombres réels.*
Alors il existe ε_0 *nombre réel positif dépendant seulement de* ν_h *et* u_0 *tel que pour chaque* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, *le système*

$$(FR_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon.\nabla u^\varepsilon - \nu_h \Delta_h u^\varepsilon - \nu_v \partial_3^2 u^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} e_3 \wedge u^\varepsilon = -\nabla p \\ div\ u^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon \end{cases}$$

a une unique solution globale dans l'espace $L^\infty([0,T], H^{0,s}) \cap L^2([0,T], H^{1,s})$

Comme on l'a déjà mentionné au début de cette partie, l'existence de la solution faible de Leray est inconnue, l'idée de base est de prouver l'existence globale des solutions fortes pour des données grandes en mettant en évidence l'effet dispersif (de type Strichartz) des ondes générées par le fluide en mouvement

5.1.2 Inégalité de dispersion anisotrope

Ce type d'estimations montre que les solutions dispersent en temps dans les normes $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p > 2$ et donc conduisant des effets régularisants, ces estimations vont nous aider à démontrer l'existence globale de la solution.

Lemme 13 *il existe une constante C tel que : $\forall f$ une fonction on a :*

$$\|\Delta_j^h \Delta_k^v A_{FR}(t,\theta;\tilde{\theta})\|_{L_h^\infty(L_v^2)} \leq C\min(1, \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}}\, 2^{|j-k|})2^{2j}\, \mathrm{e}^{-c\theta 2^{2j}}\|f\|_{L_h^1(L_v^2)}$$

Preuve 13 :
On définit :

$$I_{jk}(t,\theta,x_h,\xi_3) = \varphi(2^{-k}\xi_3)\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{ix_h\cdot\xi_h + i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\theta|\xi_h|^2}\varphi(2^{-j}|\xi_h|)\, d\xi_h \text{ et}$$
$$A_{FR_\varepsilon} = \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\theta|\xi_h|^2-\tilde{\theta}\xi_3^2}\widehat{f}(\xi))$$

On désigne par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ la transformée de Fourier et son inverse, $\mathcal{F}_v$ et $\mathcal{F}_h$ sont les Fourier vertical et horizontal.

$$A_{FR_\varepsilon} = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\theta|\xi_h|^2-\tilde{\theta}\xi_3^2}\widehat{f}(\xi)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\theta|\xi_h|^2-\tilde{\theta}\xi_3^2}\right) * f$$

$$\begin{aligned}A_{FR_\varepsilon} = \mathcal{F}_v\mathcal{F}_h^{-1}(\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\theta|\xi_h|^2-\tilde{\theta}\xi_3^2}\widehat{f}(\xi)) &= \mathcal{F}_v^{-1}(\mathcal{F}_h^{-1}(\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\theta|\xi_h|^2-\tilde{\theta}\xi_3^2}) * \mathcal{F}_h^{-1}(\mathcal{F}_h\mathcal{F}_v f))\\ &= \mathcal{F}_v^{-1}(\mathcal{F}_h^{-1}(\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\theta|\xi_h|^2-\tilde{\theta}\xi_3^2}) * \mathcal{F}_v f)\end{aligned}$$

on remarque que :

$$\mathcal{F}_h^{-1}\left(\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\theta|\xi_h|^2-\tilde{\theta}\xi_3^2}\right) = \mathrm{e}^{-\tilde{\theta}\xi_3^2}I_{jk}$$

en utilisant le Théorème de Plancherel :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_v^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\tilde{\theta}\xi_3^2}I_{jk} * \mathcal{F}_v f\right)\|_{L_h^\infty(L_v^2)} &= \|(\mathrm{e}^{-\tilde{\theta}\xi_3^2}I_{jk} * \mathcal{F}_v f)\|_{L_h^\infty(L_v^2)}\\ &= \|\|\int_{\mathbb{R}_h^2} \mathrm{e}^{-\tilde{\theta}\xi_3^2}I_{jk}(x_h-y_h,\xi_3)\mathcal{F}_v f(y_h,\xi_3)\, dy_h\|_{L_v^2}\|_{L_h^\infty}\\ &\leq \|\int_{\mathbb{R}_h^2}\|\mathrm{e}^{-\tilde{\theta}\xi_3^2}I_{jk}(x_h-y_h,\xi_3)\mathcal{F}_v f(y_h,\xi_3)\|_{L_{\xi_3}^2}\, dy_h\|_{L_h^\infty}\\ &\leq \|\int_{\mathbb{R}_h^2}\sup_{\xi_3\in[2^k,2^{k+1}]}\mathrm{e}^{-\tilde{\theta}\xi_3^2}I_{jk}(x_h-y_h,\xi_3)\|\mathcal{F}_v f(y_h,\xi_3)\|_{L_{\xi_3}^2}\, dy_h\|_{L_h^\infty}\\ &\overset{Plancherel}{\leq} \|\int_{\mathbb{R}_h^2}\sup_{\xi_3\in[2^k,2^{k+1}]}\mathrm{e}^{-\tilde{\theta}\xi_3^2}I_{jk}(x_h-y_h,\xi_3)\|f(y_h,\xi_3)\|_{L_{\xi_3}^2}\, dy_h\|_{L_h^\infty}\end{aligned}$$

Sachant que $\xi_3^2 \geq 2^{2k}$ et en appliquant l'inégalité de convolution de Young on aura :

$$\|\mathcal{F}_v^{-1}(\mathrm{e}^{-\tilde{\theta}\xi_3^2}I_{jk} * \mathcal{F}_v f)\|_{L_h^\infty(L_v^2)} \leq C\mathrm{e}^{-c\tilde{\theta}2^{2k}}\|I_{jk}\|_{L_v^\infty(L_h^\infty)}.\|f\|_{L_h^1(L_v^2)}$$

<u>estimant le terme $I_{jk}(t,\theta,.,.)$ en $L^\infty_h(L^\infty_v)$:</u>

On peut écrire $\quad I_{jk}(t,\theta,x_h,\xi_3)=2^{2k}\tilde I(t,2^{2k}\theta,2^kx_h,2^{-k}\xi_3)\quad$ avec
$\tilde I(t,2^{2k}\theta,2^kx_h,2^{-k}\xi_3)=\varphi(\mu_3)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2_h}\mathrm{e}^{-ix'.\mu'+i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\mu_3}{|\mu|}-\eta|\mu_h|^2}\varphi(2^{k-j}|\mu_h|)\,d\mu_h$
Soit : $\Phi(\mu_1,\mu_3)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\mu_3}{|\mu|}-\eta|\mu_h|^2}\varphi(|\mu_h|)\,d\mu_2$
Faisant une intégration par partie :
Soit l'opérateur différentiel suivant :

$$\mathcal{L}u=\frac{1}{1+\frac{t}{\varepsilon}\alpha^2}\,(u-i\alpha\partial_{\mu_2}u)\quad\text{avec}\quad\alpha(\mu)=\partial_{\mu_2}\left(\frac{\mu_3}{|\mu|}\right)$$

on a après un simple calcul que :

$$\mathcal{L}(\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\mu_3}{|\mu|}})=\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\mu_3}{|\mu|}}$$

donc,
$\Phi(\mu_1,\mu_3)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\mu_3}{|\mu|}}\right)\mathrm{e}^{-\eta|\mu_h|^2}\varphi(2^{k-j}|\mu_h|)d\mu_2=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\mu_3}{|\mu|}}\ {}^t\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-\eta|\mu_h|^2}\varphi\left(2^{k-j}|\mu_h|\right)\right)d\mu_2$
L'opérateur ${}^t\mathcal{L}$ est défini comme suit :

$${}^t\mathcal{L}(u)=\left(\frac{1}{1+\frac{t}{\varepsilon}\alpha^2}-i(\partial_{\mu_2}\alpha)\frac{1}{\frac{t}{\varepsilon}\alpha^2}(1+\frac{t}{\varepsilon}\alpha^2)^2\right)u(\mu)-\frac{i\alpha}{1+\frac{t}{\varepsilon}\alpha^2}\partial_{\mu_2}u(\mu)$$

$$|{}^t\mathcal{L}(u)(\mathrm{e}^{-\eta|\mu_h|^2}\varphi(2^{k-j}|\mu_h|))|\leq\frac{C\min(2^{k-j},1)}{1+\frac{t}{\varepsilon}\mu_2\mu_3}\mathrm{e}^{-\eta|\mu_h|^2}$$

μ est placé dans une couronne $1\leq\mu\leq2$ cela nous permet d'écrire :

$$1\leq2^{k-j}|\mu_h|\leq2\Rightarrow2^{j-k}\leq2.2^{j-k}|\mu_h|$$

$$\begin{aligned}|\tilde I_{jk}(t,\eta,x',\mu_3)|&\leq|\varphi(\mu_3)|\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{|\mu_2|\leq2^{j-k}}\frac{C\min(2^{k-j},1)}{1+\frac{t}{\varepsilon}\mu_2\mu_3}\mathrm{e}^{-\eta|\mu_h|^2}\,d\mu_2\right)\,d\mu_1\\&\leq C|\varphi(\mu_3)|\mathrm{e}^{-\eta c}\min(2^{j-k},1)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{|\mu_2|\leq2^{j-k}}\frac{1}{1+\frac{t}{\varepsilon}\mu_2\mu_3}\right)\,d\mu_1\end{aligned}$$

On fait un changement de variables :

$$\alpha=\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\sqrt t}\,\mu_2\,\mu_3\Rightarrow d\alpha=\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\sqrt t}\,\mu_3\,d\mu_2\Rightarrow d\mu_2=\frac{\varepsilon^{\frac12}}{\sqrt t}\mu_3^{-1}d\alpha$$

$$|\tilde{I}_{jk}(t,\eta,x',\mu_3)| \leq C|\varphi(\mu_3)|\mathrm{e}^{-\eta c}\min(2^{j-k},1)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{|\mu_2|\leq 2^{j-k}}\frac{1}{1+\alpha^2}\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}}\,\mu_3^{-1}\,d\,\alpha\right)d\mu_1$$
$$\leq C|\varphi(\mu_3)\mu_3^{-1}|\mathrm{e}^{-\eta c}\min(2^{j-k},1)\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{|\mu_2|\leq 2^{j-k}}\frac{1}{1+\alpha^2}\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}}\,d\,\alpha\right)d\mu_1$$
$$\leq C|\varphi(\mu_3)\mu_3^{-1}|\;\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\eta c}}{\sqrt{t}}\;\min(2^{j-k},1)$$

$$\Rightarrow \|\tilde{I}_{jk}(t,\eta,x',\mu_3)\|_{L^\infty_v(L^\infty_h)} \leq C\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\eta c}}{\sqrt{t}}\min(2^{j-k},1)\|\varphi(\mu_3)\mu_3^{-1}\|_{L^\infty} \leq C\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\eta c}}{\sqrt{t}}\min(2^{j-k},1)$$

Et donc finalement,

$$\|\Delta_j^h\Delta_k^v A_{FR}(t,\theta)f\|_{L^\infty_h(L^2_v)} \leq C\mathrm{e}^{-c\tilde{\theta}2^{2k}}\mathrm{e}^{-c\theta 2^{2j}}\;\min(\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}2^{j-k}}{\sqrt{t}},1)\|f\|_{L^1_h(L^2_v)}$$

5.1.3 Dualité

Théorème 5 *Pour n'importe quel champ de vecteur $f, \forall p \in [1,\infty]$:*

$$\|\Delta_j^h\Delta_k^v A_{FR_\varepsilon}f\|_{L^p_T(L^\infty_h(L^2_v))} \leq C2^{j(1-\frac{2}{p})}\min(1,(\varepsilon 2^{2j})^{\frac{1}{4p}}2^{\frac{1}{2p}|j-k|})\|\Delta_j^h\Delta_k^v f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Preuve 5 :
Afin de calculer la norme souhaitée, nous allons introduire l'espace suivant :

$$\mathcal{B} = \{\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \|\Psi\|_{L^\infty_T(L^1_h(L^2_v))}\}$$

Les arguments de dualité sont basés sur les estimations anisotropes. Le lemme précédent (13) nous permet d'écrire les égalités standards suivantes :

$$\|\Delta_j^h\Delta_k^v A_{FR_\varepsilon}f\|_{L^1_T(L^\infty_h(L^2_v))} = \sup_{\Psi\in\mathcal{B}}\int_{\mathbb{R}_+}\langle\Delta_j A_{FR_\varepsilon}(t)f,\Psi(t)\rangle\,dt$$
$$= \sup_{\Psi\in\mathcal{B}}(2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3}\varphi(2^{-j}|\xi|)\mathrm{e}^{-i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\nu t|\xi_h|^2-\nu_v t\xi_3^2}\widehat{f}(\xi)\widehat{\Psi}(t,\xi)\,dt\,d\xi$$
$$= sup_{\Psi\in\mathcal{B}}(2\pi)^{-3}\sum_{k\leq j}\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3}\widehat{f}_{jk}(\xi)\widehat{\Psi}(t,\xi)\mathrm{e}^{-i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\nu t|\xi_h|^2-\nu_v t\xi_3^2}\,dt\,d\xi$$

en posant $f_{jk} = \Delta_j^h\Delta_k^v f$ et $\Psi_{jk} = \Delta_j^h\Delta_k^v\Psi$

$$\|\Delta_j A_{FR_\varepsilon}f\|_{L^1_T(L^\infty_h(L^2_v))} \leq \sup_{\Psi\in\mathcal{B}}(2\pi)^{-3}\sum_{k\leq j}\int_{\mathbb{R}_+}(\int_{\mathbb{R}^3}\widehat{f}_{jk}(\xi)\widehat{\Psi}_{jk}(j,\xi)\mathrm{e}^{-i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\nu t|\xi_h|^2-\nu_v t\xi_3^2}\,d\xi)\,dt$$

faisons un Cauchy Schwartz :

$$\leq \sup_{\Psi\in\mathcal{B}}(2\pi)^{-3}\sum_{k\leq j}\int_{\mathbb{R}_+}\left[(\int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{f}_{jk}|^2\,d\xi)^{\frac{1}{2}}.(\int_{\mathbb{R}^3}|\widehat{\Psi}_{jk}(t,\xi)\mathrm{e}^{-i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\nu t|\xi_h|^2-\nu_v t\xi_3^2}|\,d\xi)^{\frac{1}{2}}\right]dt$$

$$\leq \sup_{\Psi\in\mathcal{B}}(2\pi)^{-3}\sum_{k\leq j}\|f_{jk}\|_{L^2}\|\int_{\mathbb{R}_+}\widehat{\Psi}_{jk}(t,\xi)\mathrm{e}^{-i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\nu t|\xi_h|^2-\nu_v t\xi_3^2}\,dt\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

estimons le terme : $\|\int_{\mathbb{R}_+}\widehat{\Psi}_{jk}(t,\xi)\mathrm{e}^{-i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\nu t|\xi_h|^2-\nu_v t\xi_3^2}\,dt\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$

$$=\int_{\mathbb{R}^2_+}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\nu t|\xi_h|^2-\nu_v t\xi_3^2}\widehat{\Psi}_{jk}(t,\xi)\mathrm{e}^{i\frac{s}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\nu s|\xi_h|^2-\nu_v s\xi_3^2}\widehat{\Psi}(s,\xi)\,dt\,ds\,d\xi$$

$$=\int_{\mathbb{R}^2_+}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{-i(t-s)\frac{\xi_3}{\varepsilon|\xi|}-\nu(t+s)|\xi_h|^2-\nu_v(t+s)\xi_3^2}\widehat{\Psi}_{jk}(t,\xi)\overline{\widehat{\Psi}}_{jk}(s,\xi)\,dt\,ds\,d\xi$$

on applique la formule de Plancherel et le théorème de Fubini :

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^3}(\int_{\mathbb{R}^3}\underbrace{\mathrm{e}^{ix_h.\xi_h}\mathrm{e}^{-i(t-s)\frac{\xi_3}{\varepsilon|\xi|}-\nu(t+s)|\xi_h|^2}}_{I}\mathrm{e}^{-\nu_v(t+s)\xi_3^2}\Psi(t,\xi)\,d\xi)\overline{\Psi}(s,\xi)\,dx\,ds\,dt$$

D'après le lemme (13) :

$$\leq\int_0^\infty\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\nu(t+s)\xi_3^2}\|I\|_{L^\infty_h(L^\infty_v)}.\|\Psi(t,.)\|_{L^1_h(L^2_v)}.\|\Psi(s,.)\|_{L^1_h(L^2_v)}\,ds\,dt$$

$$\leq\int_0^\infty\int_0^\infty\|\Psi(t,.)\|_{L^1_h(L^2_v)}.\|\Psi(s,.)\|_{L^1_h(L^2_v)}2^{2j}\mathrm{e}^{-\nu(t+s)2^{2j}}\min(1,\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}2^{|j-k|}}{|t-s|^{\frac{1}{2}}})\,ds\,dt$$

$$\leq\|\Psi(t,.)\|_{L^\infty_T(L^1_h(L^2_v))}.\|\Psi(s,.)\|_{L^\infty_T(L^1_h(L^2_v))}\int_0^\infty\int_0^\infty 2^{2j}\mathrm{e}^{-\nu(t+s)2^{2j}}\min(1,\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}2^{|j-k|}}{|t-s|^{\frac{1}{2}}})dsdt$$

$$\leq\|\Psi(t,.)\|_{L^\infty_T(L^1_h(L^2_v))}.\|\Psi(s,.)\|_{L^\infty_T(L^1_h(L^2_v))}2^{-2j}\min(1,(\varepsilon 2^{2j})^{\frac{1}{2}})\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\nu(t+s)}}{|t-s|^{\frac{1}{2}}}dsdt$$

Par l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev :

$$\leq C\|\Psi(t,.)\|_{L^\infty_T(L^1_h(L^2_v))}.\|\Psi(s,.)\|_{L^\infty_T(L^1_h(L^2_v))}2^{-2j}\min(1,(\varepsilon 2^{2j})^{\frac{1}{2}}2^{|j-k|})$$

Donc,

$$\|\int_{\mathbb{R}_+}\widehat{\Psi}_{jk}(t,\xi)\mathrm{e}^{-i\frac{t}{\varepsilon}\frac{\xi_3}{|\xi|}-\nu t|\xi_h|^2-\nu_v t\xi_3^2}\,dt\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq C2^{-2j}\min(1,(\varepsilon 2^{2j})^{\frac{1}{4}}2^{\frac{|j-k|}{2}})$$
$$\Rightarrow\|\Delta^h_j\Delta^v_k A_{FR_\varepsilon}f\|_{L^1_T(L^\infty_h(L^2_v))}\leq C2^{-j}\min(1,(\varepsilon 2^{2j})^{\frac{1}{4}}2^{\frac{|j-k|}{2}})\|\Delta^h_j\Delta^v_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

et avec une interpolation entre L^1 et L^p on trouve finalement,

$$\|\Delta^h_j\Delta^v_k A_{FR_\varepsilon}f\|_{L^p_T(L^\infty_h(L^2_v))}\leq C2^{-j(1-\frac{2}{p})}\min(1,(\varepsilon 2^{2j})^{\frac{1}{4p}}2^{\frac{|j-k|}{2p}})\|\Delta^h_j\Delta^v_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

Puisque les éléments du noyau de l'opérateur $L\,u$ sont des vecteurs bidimensionnels avec trois composantes et puisque les ondes inertielles apparaissent dans un fluide en rotation, il est naturel qu'on introduise la solution $\overline{u}$ du système bidimensionnel et w^ε la solution du système linéaire des ondes libres associées à (FR_ε)

Théorème 6 *Soient* $u_0^\varepsilon = \overline{u}_0 + w_0^\varepsilon$ *où* $\overline{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}_h^2)$ *est un champ de vecteurs bidimensionnel avec trois composantes et* $w_0^\varepsilon \in H^{0,s}$ *avec* $s > \dfrac{1}{2}$.
On suppose que les deux champs de vecteurs sont de divergence nulle.
Alors $\exists\ \varepsilon_0$ *tel que, pour* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *il existe une unique solution globale u du système* (FR_ε) *:*

$$u^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^{0,s}) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H^{1,s})$$

De plus lorsque $\varepsilon \to 0$, $u^\varepsilon - \overline{u} - w^\varepsilon \to 0$ *dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+, H^{0,s}) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H^{1,s})$ *et* $w^\varepsilon \to 0$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^+, L_h^\infty L_v^2)$

5.2 Cas d'un domaine périodique

Quoique le terme de rotation n'ait pas de contribution dans les estimations d'énergie, il a des effets importants comme l'ont montré Babin, Mahlov et Nicolaenko lorsqu'ils ont étudié les système visqueux et non visqueux dans des domaines périodiques résonants ou non-résonants. La différence dans ce cas, est qu'on n'a pas l'effet dispersif pour la solution linéaire des ondes libres. Ces dernières ne disparaissent pas mais demeurent longtemps. La méthode utilisée pour filtrer ces ondes, est celle de Schochet avec un groupe d'isométrie.

Par la suite, on va étudier le système de Navier-Stokes-Coriolis dans le cas des conditions aux limites périodiques. On s'intéresse plus précisément au comportement des solutions du système (FR_ε) à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$:

$$(FR_\varepsilon)\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon.\nabla u^\varepsilon - \nu_h \Delta_h u^\varepsilon - \nu_v \partial_3^2 u^\varepsilon + \dfrac{1}{\varepsilon} e_3 \wedge u^\varepsilon = -\nabla p \quad \text{dans } \mathcal{T}^3 \\ div\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathcal{T}^3 \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon \end{cases}$$

où $\mathcal{T}^3 = \prod_{i=1}^{3} [0, 2\pi a_i)$ est le tore dans $\mathbb{R}^3$ de grandeur $2\pi a_i$ dans la direction x_i avec a_i sont des nombres réels strictement positifs.

Afin de filtrer les oscillations, on introduit le semi-groupe de Poincaré $\mathcal{L}(t)$. La solution filtrée v^ε est définie comme suit : $v^\varepsilon = \mathcal{L}(\dfrac{-t}{\varepsilon})u^\varepsilon$, ce champ de vecteur est borné dans le même espace que v^ε par contre $\partial_t v^\varepsilon$ est borné dans un espace différent.
$\mathcal{L}(t)$ est le groupe d'opérateurs engendrés par PL où L est un opérateur antisymétrique nommé "perturbation oscillante"qui veut dire que :

$\forall s \in \mathbb{R}, \forall u_0 \in H^s$ le système : $\begin{cases} \partial_t u + PL\, u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{T}^3 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$

admet une unique solution globale $u(t) = \mathcal{L}(t)u_0$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \|\mathcal{L}(t)u_0\|_{H^s} = \|{}^t\mathcal{L}u_0\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$$

Le fait que L soit antisymétrique, nous permet d'avoir la propriété suivante qui est essentielle pour avoir l'existence de la solution du système (FR_ε) :

$$\forall u \quad \int_{\mathcal{T}^3} Lu\,.u = 0$$

On va montrer que le système filtré $(\tilde{FR_\varepsilon})$:

$$(\tilde{FR_\varepsilon}) \begin{cases} \partial_t v^\varepsilon - \nu\Delta v^\varepsilon + \mathcal{Q}^\varepsilon(v^\varepsilon, v^\varepsilon) = 0 \\ div\ v^\varepsilon = 0 \\ v^\varepsilon|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

est composé de deux systèmes :
Le premier est le Navier-Stokes bidimensionnel qui est globalement bien posé(J.Leray) :

$$(NS_{2D,3C}) \begin{cases} \partial_t \overline{u} + \overline{u}.\nabla_h \overline{u} - \nu_h \Delta_h \overline{u} = -\nabla p \\ \partial_3 \overline{u} = 0 \\ div_h\ \overline{u} = 0 \\ \overline{u}|_{t=0} = \overline{u}_0 = \int_0^{2\pi a_3} u_0\ dx_3 \end{cases}$$

où $\overline{u}$ est la partie bidimensionnelle de la limite de u c'est-à-dire la moyenne verticale.

L'autre système concerne un reste noté par u_{osc} défini par : $u_{osc} = \overline{u} + u$

$$(S_{osc}) \begin{cases} \partial_t u_{osc} - \nu_h \Delta_h u_{osc} + \mathcal{Q}(2\overline{u} + u_{osc}, u_{osc}) = 0 \\ div\ u_{osc} = 0 \\ u_{osc}|_{t=0} = u_{0,osc} := u_0 - \int_0^{2\pi a_3} u_0\ dx_3 \end{cases}$$

où $\mathcal{Q}$ est une forme bilinéaire définie par :

$$\mathcal{Q}(u,v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}(\frac{-t}{\varepsilon}) q(\mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})u, \mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})v)$$

et $q(u,v) = A_{ij}(D)(u_i u_j)$, $A_{ij}(D)$ est un multiplicateur de Fourier de premier ordre
Puisque $\forall (a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, pour presque tout $a_3 \in \mathbb{R}_+^*$ on a que **pour presque** tous les tores :

$$\mathcal{Q}(u_{osc}, u_{osc}) = 0$$

alors le système (S_{osc}) devient : $(S_{osc}) \begin{cases} \partial_t u_{osc} - \nu_h \Delta_h u_{osc} + 2\mathcal{Q}(\overline{u}, u_{osc}) = 0 \\ div\ u_{osc} = 0 \\ u_{osc}|_{t=0} = u_{0,osc} := u_0 - \int_0^{2\pi a_3} u_0\, dx_3 \end{cases}$

Le fait que $\partial_t u^\varepsilon$ ne soit pas borné, empêche la prise directe de la limite de l'équation, donc avant de prendre la limite en ε , on diagonalise le champ de vecteur $v^\varepsilon = \mathcal{L}(\frac{-t}{\varepsilon})u^\varepsilon$. Cette diagonalisation consiste une séparation de v^ε en un vecteur bidimensionnel et un reste oscillatoire :

$$u^\varepsilon = \overline{u}^\varepsilon + \overline{u}_{osc} \quad \text{avec } \overline{u}^\varepsilon = \int_0^{2\pi a_3} u^\varepsilon\, dx_3$$

Une fois le système diagonalisé, on peut prendre la limite en ε autrement dit étudier les résonances de l'opérateur PL

Définition 6 *On dit que le tore* $\mathcal{T}^3 = \prod_{i=1}^{3}[0, 2\pi a_i)$ *est un domaine non-résonant si l'ensemble des résonances vérifie :*

$$K \subset \{(k, m, n) \in \mathbb{Z}^9 \text{ tel que } k + m = n \quad \text{et} \quad k_3 m_3 n_3 = 0\}$$

L'ensemble K est défini comme suit :

$$K = \{(k, m, n) \in \mathbb{Z}^9 \text{ tel que } \frac{k_3}{|k|} \pm \frac{m_3}{|m|} \pm \frac{n_3}{|n|} = 0 \text{ avec } k + m = n\}$$

Les ondes oscillatoires ont une loi de dispersion $\lambda(k) = \pm i\frac{k_3}{|k|}$ donc elles s'interfèrent entre elles d'après la loi :

$$\lambda(n) = \pm\lambda(k) \pm \lambda(m)$$

Le tore non-résonant signifie qu'on n'a pas d'interférences purement tridimensionnelles.

5.2.1 Diagonalisation

On va intégrer v^ε sur $[0, 2\pi a_3)$
On pose $v^\varepsilon = \mathcal{L}(\frac{-t}{\varepsilon})u^\varepsilon$ on rappelle que v^ε est la suite des solutions filtrées.

v^ε satisfait le système suivant : $(\tilde{FR_\varepsilon}) \begin{cases} \partial_t v^\varepsilon - \nu\Delta v^\varepsilon + \mathcal{Q}^\varepsilon(v^\varepsilon, v^\varepsilon) = 0 \\ div\ v^\varepsilon = 0 \\ v^\varepsilon|_{t=0} = v_0 \end{cases}$

où $\mathcal{Q}^\varepsilon(v^\varepsilon, v^\varepsilon) = \mathcal{L}(\frac{-t}{\varepsilon})(\mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})v^\varepsilon.\nabla\mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})v^\varepsilon)$

Posons $v^\varepsilon = \overline{u}^\varepsilon + u^\varepsilon_{osc}$, l'intégration du système $(\tilde{FR_\varepsilon})$ sur la variable verticale nous donne :

$$(\overline{FR_\varepsilon}) \begin{cases} \partial_t \overline{u}^\varepsilon - \nu_h \Delta_h \overline{u}^\varepsilon + \overline{\mathcal{Q}}^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = 0 \\ \partial_3 \overline{u}^\varepsilon = 0 \\ div_h\, \overline{u}^\varepsilon = 0 \\ \overline{u}^\varepsilon|_{t=0} = \overline{u}_0 = \displaystyle\int_0^{2\pi a_3} u_0\, dx_3 \end{cases}$$

et le reste u^ε_{osc} satisfait :

$$(FR_{\varepsilon,osc}) \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon_{osc} - \nu_h \Delta_h u^\varepsilon_{osc} + \mathcal{Q}^\varepsilon_{osc}(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = 0 \\ div\, u^\varepsilon_{osc} = 0 \\ u^\varepsilon_{osc}|_{t=0} = u_{0,osc} \end{cases}$$

En Fourier le système $(\overline{FR_\varepsilon})$ est la projection du système $(\tilde{FR_\varepsilon})$ sur l'espace $\{\xi$ tel que $\xi_3 = 0\}$ et le système $(FR_{\varepsilon,osc})$ est la projection du système $(\tilde{FR_\varepsilon})$ sur l'espace $\{\xi$ tel que $\xi_3 \neq 0\}$

5.2.2 Limite

Il s'agit de prendre la limite en ε des termes quadratiques.
On considère la limite $\mathcal{Q}(u,u) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{Q}^\varepsilon(u,u)$ dans $\mathcal{D}'$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{Q}^\varepsilon(u,u) =$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}^{-1} \sum_{(k,m,n)\in K} \sum_{(a,b,c)} \mathrm{e}^{-i\frac{t}{\varepsilon}(\lambda^a(k)+\lambda^b(m)+\lambda^c(n))} u^{a,j}(k) m_j u^{a,b}(m,n)$$

$\lambda^{\pm}(n)$ sont les valeurs propres de PL et K est l'ensemble des résonances.
Le calcul qu'on suit dans les termes quadratiques, est introduit par Babin, Mahlov et Nicolaenko, l'ensemble des résonances k peut s'écrire comme étant l'union de 4 ensembles :

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$$

$K_1 = \{(k,m,n) \quad \frac{k_3}{|k|} + \frac{m_3}{|m|} + \frac{n_3}{|n|} = 0 \text{ et } k + m = n\}$
$K_2 = \{(k,m,n) \quad \frac{k_3}{|k|} - \frac{m_3}{|m|} + \frac{n_3}{|n|} = 0 \text{ et } k + m = n\}$
$K_3 = \{(k,m,n) \quad \frac{k_3}{|k|} - \frac{m_3}{|m|} - \frac{n_3}{|n|} = 0 \text{ et } k + m = n\}$

$K_4 = \{(k,m,n) \quad \frac{k_3}{|k|} + \frac{m_3}{|m|} - \frac{n_3}{|n|} = 0 \text{ et } k+m=n\}$
Avant de commencer l'étude de ces ensembles dans les deux cas qui nous intéressent correspondant aux deux équations $(FR_{\varepsilon,osc})$ et $(\overline{FR_\varepsilon})$, étudions les plus précisément :

Lemme 14 *L'identité suivante est vraie :*

$$K \cap \{(k,m,n) \text{ tel que } k_3m_3n_3 = 0\} = K_{14} \cup K_{24} \cup K_{34} \cup K_{2D}$$

avec $K_{2D} = \{k_3 = m_3 = n_3 = 0\}$ *et* $K_{ij} = K_i \cap K_j - K_{2D}$

Dans ce qui suit, $\mathcal{K}$ représente l'ensemble des triplets (k,m,n) présents dans la sommation après que la limite soit prise, c'est-à-dire dont la contribution à la limite est non nulle et on a que $\mathcal{K} \subset K$

Lemme 15 *l'ensemble* K_{14} *ne contribue pas aux résonances :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}^{-1} \sum_{(k,m,n)\in K_{14}} \sum_{(a,b,c)} \mathrm{e}^{-i\frac{t}{\varepsilon}(\lambda^a(k)+\lambda^b(m)+\lambda^c(n))} u^{a,j}(k) m_j u^{a,b}(m,n) = 0$$

Limite du système $(\overline{FR_\varepsilon})$:

Proposition 2 *La limite de* $(\overline{FR_\varepsilon})$ *est l'équation de Navier-Stokes bidimensionnelle :*

$$(NS_{2D,3C}) \begin{cases} \partial_t \overline{u} + \overline{u}.\nabla_h \overline{u} - \nu_h \Delta_h \overline{u} = -\nabla p \\ \partial_3 \overline{u} = 0 \\ div_h\, \overline{u} = 0 \\ \overline{u}|_{t=0} = \overline{u}_0 = \displaystyle\int_0^{2\pi a_3} u_0 \, dx_3 \end{cases}$$

La preuve de cette proposition consiste en l'étude du terme $\overline{\mathcal{Q}}^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon)$ dans le cas $n_3 = 0$, donc l'ensemble des résonances satisfait :

$$\mathcal{K} \subset K \cap \{(k,m,n) \text{ tel que } n_3 = 0 \text{ et} k+m=n\}$$

$\mathcal{K} \subset K_{2D}$ ce qui veut dire que les seuls termes de $\overline{\mathcal{Q}}^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon)$ qui ne conduisent pas à une limite égale à zéro sont bilinéaires en $\overline{u}^\varepsilon$ plus précisément :
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mathcal{Q}^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \overline{\mathcal{Q}}^\varepsilon(\overline{u}^\varepsilon, \overline{u}^\varepsilon)$, mais pour chaque champ de vecteur u qui ne dépend pas de la 3^{eme} variable, on a clairement que $\mathcal{L}u = u$ donc la limite de $\overline{\mathcal{Q}}^\varepsilon(\overline{u}^\varepsilon, \overline{u}^\varepsilon)$ dans $\mathcal{D}'$ est simplement $P(\overline{u}.\nabla\overline{u})$

Limite du système $(FR_{\varepsilon,osc})$ **:**

Proposition 3 *On définit* $u_{osc} = u - \overline{u}$ *avec* $u = \lim_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}$
Pour presque toutes les valeurs de a_3 *, la limite de l'équation de* $(FR_{\varepsilon,osc})$ *est linéaire sur* u_{osc} *:*

$$(S_{osc}) \begin{cases} \partial_t u_{osc} - \nu_h \Delta_h u_{osc} + 2\mathcal{Q}(\overline{u}, u_{osc}) = 0 \\ div\ u_{osc} = 0 \\ u_{osc}|_{t=0} = u_{0,osc} := u_0 - \int_0^{2\pi a_3} u_0 \, dx_3 \end{cases}$$

Cette proposition nous permettra de trouver un temps fini pour l'existence de la solution du système limite. Les valeurs admissibles de a_3 sont dites non-résonantes, et le lemme suivant met en évidence le rôle joué par la variable a_3 dans la définition du domaine non-résonant.

Lemme 16 $\forall (a_1, a_2)$ *deux nombres réels, il existe un ensemble complémentaire de* $\mathbb{R}$ *de mesure nulle pour lequel, pour chaque valeur de* a_3 *la condition suivante est satisfaite :*

$$K \subset \{(k, m, n) \in \mathbb{Z}^9 \quad tel\ que \quad k_3 m_3 n_3 = 0 \quad et \quad k + m = n\}$$

On note que le domaine non-résonant dépend de a_1, a_2 mais son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est de mesure nulle pour tout (a_1, a_2)
Preuve 16 :
On définit pour un paramètre $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ la fonction :

$$w^p(a, b, c) = a \pm b \pm c$$

On veut montrer que si a_1 et a_2 sont fixés arbitrairement, alors pour presque tout a_3 le produit :

$$\prod_{p=1}^{4} w^p\left(\frac{k_3}{a_3|k|}, \frac{m_3}{a_3|m|}, \frac{n_3}{a_3|n|}\right) \neq 0 \qquad \forall k, m, n$$

avec, $\quad m + k = n$ et $|n|^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{n_i^2}{a_i^2}$
On pose $x = \frac{1}{a_3}$, d'après Babin, Mahlov et Nicolaenko on peut écrire le produit comme un polynôme en x dès qu'on définit :

$$a = k_3 |m||n| \quad b = m_3 |n||k| \quad c = n_3 |k||m|$$

donc on aura :

$$a_3^4|k|^4|m|^4|n|^4 \prod_{p=1}^{4} w^p(a,b,c) = (a^2-b^2-c^2) - 4a^2b^2$$

avec :

$$\begin{aligned} a^2 &= k_3^2(|m'|^2 + x^2m_3^2)(|n'|^2 + x^2n_3^2) \\ b^2 &= m_3^2(|n'|^2 + x^2n_3^2)(|k'|^2 + x^2k_3^2) \\ c^2 &= n_3^2(|k'|^2 + x^2k_3^2)(|m'|^2 + x^2m_3^2) \end{aligned}$$

$k_3m_3n_3$ est supposé non nul, alors si on met k', m', n' des valeurs arbitraires fixées, on a considéré en fait un polynôme en x d'ordre 4 et de coefficient dominant non nul $k_3m_3n_3$ donc il a, au plus 4 solutions. Puisque k', m', n' varient dans un ensemble dénombrable, il existe un nombre dénombrable de x de telle sorte que le produit :

$$\prod_{p=1}^{4} w^p\left(\frac{k_3}{a_3|k|}, \frac{m_3}{a_3|m|}, \frac{n_3}{a_3|n|}\right) = 0 \qquad (11)$$

ce qui veut dire que, $\forall(a_1, a_2)$ et $\forall(k, m, n)$ tel que, on a (11) l'ensemble de a_3 est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$

5.2.3 Existence globale de la solution

Théorème 7 *Quand a_1 et a_2 sont fixés, alors pour presque tout a_3 le résultat suivant est vrai :*
si $u_0 \in H^s(\mathcal{T}^3)$ avec $s \geq \frac{1}{2}$ et si la force f est dans

$$L^\infty(\mathbb{R}^+, H^{s-2}(\mathcal{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H^{s-1}(\mathcal{T}^3))$$

avec $\partial_t f \in L^2(\mathbb{R}^+, H^{s-3}(\mathcal{T}^3))$ alors :
$\forall\varepsilon \ll 1$ positif, le système (FR_ε) avec la donnée initiale est globalement bien posée dans :

$$C^0(\mathbb{R}^+, H^s(\mathcal{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H^{s+1}(\mathcal{T}^3))$$

Par ailleurs, si u^ε est une solution de (FR_ε) et u est une solution du système limite $(NS_{2D,3C}, S_{osc})$ alors $u^\varepsilon - \mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})u = o(1)$ dans $C^0(\mathbb{R}^+, H^s(\mathcal{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H^{s+1}(\mathcal{T}^3))$

Pour prouver ce théorème, on doit vérifier que les équations de $(NS_{2D,3C}), (S_{osc})$ sont globalement bien posées, ce qui est donné par la proposition suivante :

Proposition 4 *si $u_0 \in H^s, s \geq \frac{1}{2}$ alors la solution du système limite $(NS_{2D,3C}), (S_{osc})$ est définie dans :*

$$C^0(\mathbb{R}^+, H^s(\mathcal{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H^{s+1}(\mathcal{T}^3))$$

Preuve 4 :
Pour l'équation de $(NS_{2D,3C})$, elle est globalement bien posée (J.Leray)et le fait que le champ de vecteur avec lequel on travaille, a trois composantes plutôt que deux, ne change rien dans la preuve classique.
Concernant la partie restante :
L'absence du terme quadratique en u_{osc} nous permet d'avoir le résultat par un calcul simple d'estimation d'énergie dans H^s .
Notons que $(\mathcal{Q}(\overline{u}, u_{osc}), (P\Delta)^s u_{osc}) = 0$ prouvé par Babin, Mahlov et Nicolaenko et donc on a l'estimation suivante :

$$\tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{osc}\|_{H^s}^2 + \nu\|u_{osc}\|_{H^{s+1}}^2 = 0$$

et donc on trouve que :

$$\forall t \geq 0 \quad \|u_{osc}\|_{L^\infty([0,T],H^s)}^2 + 2\nu\|u_{osc}\|_{L^2([0,T],H^{s+1})}^2 = \|u_{0,osc}\|_{H^s}^2$$

6 Remerciemants

Au terme de ce modeste travail je suis heureuses de trouver l'occasion d'exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur Marius Paicu mon directeur de mémoire qui s'est toujours montré à l'écoute et disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire.
J'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents, tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenues et encouragées au cours de la réalisation de ce mémoire.

7 Bibliographie

Références

[1] Chemin Jean-Yves, Desjardins Benoît, Gallagher Isabelle, Grenier Emmanuel *Fluids with anisotropic viscosity*, Paris (1999).

[2] Gallagher Isabelle , *Etude Mathématique de quelques problèmes de mécanique des fluides*, Paris (1998).

[3] A.Babin, A.Mahalov, B.Nicolaenko, *Regularity and Integrability of 3D Euler ans Navier-Stokes Equations for Rotating fluids*, Asymptotic Analysis,(1997).

[4] A.Babin, A.Mahalov, B.Nicolaenko, *Global Splitting, Integrability and Regularity of 3D Euler ans Navier-Stokes Equations for uniformly Rotating fluids*, European Journal of Mechanics,(1996).