Espaces de Lorentz et Navier–Stokes : le problème des solutions auto-similaires de Leray.

Pierre Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET
Département de Mathématiques
Université d'Evry
Bd F. Mitterrand, 91025 Evry Cedex, France
e-mail: lemarie@maths.univ-evry.fr

Résumé : Nous donnons une preuve élémentaire de la non-existence de solutions auto-similaires de Leray d'énergie localement finie au voisinage du point d'explosion, en réécrivant la preuve de Tsai à l'aide des espaces de Lorentz.

Abstract : We prove that there exists no non-trivial self-similar Leray soution with locally bounded energy in the neighbourhood of the blow-up point. We just rewrite Tsai's proof with help of Lorentz spaces.

L'étude des équations de Navier–Stokes sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{c}\partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \vec{\nabla}.(\vec{u}\otimes\vec{u}) - \vec{\nabla}p \\ \vec{\nabla}.\vec{u} = 0\end{array}\right. \tag{1}$$

est pour l'essentiel menée dans la cadre des solutions faibles de Leray [LER 34] ou des solutions milds de Kato [FUJK 64] [KAT 84]. L'inconnue auxiliaire p est la pression, dont le rôle est de maintenir la divergence de $\vec{u}$ égale à 0.

Le résultat classique de Leray exprime l'existence en tout temps d'une solution faible de ces équations associée à une donnée initiale de carré intégrable :

Théorème 1 : (Leray [LER 34])
Soit $\vec{u}_0 \in (L^2(\mathbb{R}^3))^3$ *telle que* $\vec{\nabla}.\vec{u}_0 = 0$. *Alors il existe une solution (au sens des distributions)* $\vec{u}$ *des équations de Navier–Stokes sur* $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ *telle que* $\vec{u} \in L^\infty((0,\infty),(L^2)^3) \cap L^2((0,\infty),(\dot{H}^1)^3)$ *et* $\lim_{t\to 0^+}\|\vec{u}-\vec{u}_0\|_2 = 0$. *De plus, on peut imposer à cette solution* $\vec{u}$ *de vérifier l'inégalité d'énergie de Leray*

$$\forall t>0 \quad \|\vec{u}(t,.)\|_2^2 + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}|^2\,dx\,ds \le \|\vec{u}_0\|_2^2 \tag{2}$$

Ni l'unicité ni la régularité de ces solutions faibles n'ont pu encore être établies.

En 1934, Leray [LER 34] proposa l'étude des solutions auto-similaires des équations de Navier–Stokes pour essayer d'exhiber des solutions qui développent une singularité en temps fini. Ces solutions auto-similaires avec explosion au temps T^* sont données sur $[0,T^*[\times\mathbb{R}^3$ par la formule $\vec{u}(t,x) = \lambda(t)\vec{U}(\lambda(t)x)$ avec $\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2a(T^*-t)}}$ (où la constante a est strictement positive).

Ce n'est que récemment que le problème de l'existence ou non de solutions auto-similaires non triviales a été résolu. En 1996, Nečas, Ružička et Šverák [NECRS 96] ont montré que la seule solution $\vec{U} \in (L^3(\mathbb{R}^3))^3$ était la solution triviale $\vec{U} = 0$. (On remarquera que si la solution auto-similaire $\vec{u}$ est une solution faible de Leray - avec $\vec{u} \in L^\infty((0,T^*),(L^2)^3) \cap L^2((0,T^*),(\dot{H}^1)^3)$, alors $\vec{U} \in (H^1)^3 \subset (L^3)^3$.) Ce résultat a ensuite été étendu par Tsai [TSA 98] au cas $\vec{U} \in (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^3))^3$ ainsi qu'au cas des solutions $\vec{u}$ dont on contrôle localement l'énergie au voisinage du point d'explosion :

Théorème 2 : (Tsai [TSA 98])

Soit $T^*>0$ et soit $\vec u \in (\mathcal{D}'(]0,T[\times \mathbb{R}^3))^3$ telle que :
(A) $\vec u$ est solution des équations de Navier–Stokes sur $]0,T^*[\times\mathbb{R}^3$:

$$\exists p \in \mathcal{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^3) \ \left\{ \begin{array}{c} \partial_t \vec u = \Delta \vec u - \vec\nabla.(\vec u\otimes\vec u) - \vec\nabla p \\ \vec\nabla.\vec u = 0 \end{array} \right.$$

(B) p et $\vec u$ sont auto-similaires :

$$\exists \vec U \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3))^3 \ \exists p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \ \left\{ \begin{array}{l} \vec u(t,x) = \lambda(t)\vec U(\lambda(t)x) \\ p(t,x) = \lambda(t)^2 P(\lambda(t)x) \end{array} \right.$$

avec $\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2a(T^*-t)}}$ où a est une constante strictement positive
(C) l'énergie de $\vec u$ est contrôlée au voisinage de $t=T^*$ et $x=0$: il existe $T_0<T^*$ et $r_0>0$ tels que

$$\sup_{T_0<t<T^*} \int_{|x|<r_0} |\vec u(t,x)|^2 \, dx < \infty \ \ et \ \int_{T_0}^{T^*}\int_{|x|<r_0} |\vec\nabla\otimes\vec u(t,x)|^2 \, dx\, dt < \infty$$

alors $\vec u = 0$.

Le but de ce texte est de donner une démonstration "élémentaire" des résultats de Tsai, en évitant tout recours à la théorie de Caffarelli, Kohn et Nirenberg [CAFKN 82] mais en utilisant massivement les espaces de Lorentz $L^{p,q}$.

1. Le lemme d'Yves Meyer.

Mon attention sur le rôle des espaces de Lorentz dans l'étude des équations de Navier–Stokes remonte à la démonstration par Yves Meyer du théorème d'unicité L^3 que j'avais obtenu avec Furioli et Terraneo :

Théorème 3 : (Unicité L^3 [FURLT 00])

Si $\vec u$ et $\vec v$ sont deux solutions (au sens des distributions) des équations de Navier-Stokes sur $]0,T[\times\mathbb{R}^3$ telles que $\vec u \in \mathcal{C}([0,T),(L^3)^3)$, $\vec v\in\mathcal{C}([0,T),(L^3)^3)$ et $\vec u = \vec v$ en $t=0$, alors $\vec u=\vec v$ sur $[0,T[$ tout entier.

La démonstration que j'en avais donnée en 1997 avec Furioli et Terraneo dans [FURLT 00] se basait sur les espaces de Besov et l'utilisation des paraproduits (dans la lignée du livre de Cannone [CAN 95]). Peu après, Meyer [MEY 99] proposa une démonstration plus simple en utilisant l'espace $L^{3,\infty}$ de Lorentz.

Nous allons utiliser dans la suite à plusieurs reprises le lemme d'Yves Meyer, qui était l'outil principal de sa démonstration du théorème d'unicité. Pour $1<p<\infty$, on convient d'appeler $L^\infty(]0,\infty[,L^{p,\infty})$ l'espace des fonctions mesurables (pour la mesure de Lebesgue) sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^3$ telles que pour presque tout $t>0$ on a $f(t,.)\in L^{p,\infty}(\mathbb{R}^3)$ et telle que $t\mapsto \|f(t,.)\|_{L^{p,\infty}}$ soit une fonction essentiellement bornée. Le lemme d'Yves Meyer était alors le suivant :

Lemme 1 : (Lemme d'Yves Meyer [MEY 99])

Soient $p\in]1,3[$ et $1/q = 1/p - 1/3$. Alors :

$$\forall f \in L^\infty(]0,\infty[,L^{p,\infty}) \quad \int_0^\infty \sqrt{-\Delta}e^{\tau\Delta} f(\tau,.)\, d\tau \in L^{q,\infty}.$$

Nous allons donner deux démonstrations du lemme 1, en nous basant sur des propriétés d'interpolation élémentaires des espaces de Lorentz.

2. Propriétés élémentaires d'interpolation.

Si deux espaces de Banach A_0 et A_1 continument plongés dans un autre espace de Banach A_2, $A_0 \cap A_1 = \{a \in A_2 \ / \ a \in A_0 \text{ et } a \in A_1\}$ et $A_0 + A_1 = \{a \in A_2 \ / \ \exists a_0 \in A_0 \ \exists a_1 \in A_1 \ a = a_0 + a_1\}$ sont bien définis. Ils sont normés par $\|a\|_{A_0 \cap A_1} = \max(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1})$ et $\|a\|_{A_0+A_1} = \min_{a=a_0+a_1} \|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}$. On vérifie facilement que ce sont des espaces de Banach et que l'on a les injections continues $A_0 \cap A_1 \subset A_i \subset A_0 + A_1$ pour $i = 0$ et $i = 1$.

Si B est un espace de Banach et si T est un opérateur linéaire de B dans $A_0 \cap A_1$, alors T est continu de B dans A_0 et de B dans A_1 si et seulement si T est continu de B dans $A_0 \cap A_1$. De même, si B est un espace de Banach et si T est un opérateur linéaire de de $A_0 + A_1$ dans B, alors T est continu de A_0 dans B et de A_1 dans B si et seulement si T est continu de $A_0 + A_1$ dans B.

Définition 1 : (Espaces d'interpolation d'exposant θ)

Soient deux espaces de Banach A_0 et A_1 (continument plongés dans un autre espace de Banach). Soit $\theta \in [0,1]$. Un espace de Banach X est un espace d'interpolation de A_0 et de A_1 d'exposant θ s'il vérifie les trois conditions suivantes :
i) $A_0 \cap A_1 \subset X \subset A_0 + A_1$ (injections continues)
ii) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout espace de Banach B et tout opérateur linéaire continu T de B dans $A_0 \cap A_1$, les normes d'opérateurs de T vérifient

$$\|T\|_{\mathcal{L}(B,X)} \leq C \|T\|_{\mathcal{L}(B,A_0)}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}(B,A_1)}^{\theta}$$

iii) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout espace de Banach B et tout opérateur linéaire continu T de $A_0 + A_1$ dans B, les normes d'opérateurs de T vérifient

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,B)} \leq C \|T\|_{\mathcal{L}(A_0,B)}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}(A_1,B)}^{\theta}$$

Dans ce qui suit, on suppose toujours A_0 et A_1 continument plongés dans un autre espace de Banach. On a alors le résultat élémentaire suivant :

Lemme 2 : (Minimalité de $[A_0, A_1]_{\theta,1}$)

Pour $0 < \theta < 1$, on définit l'espace

$$[A_0, A_1]_{\theta,1} = \{a \in A_0 + A_1 \ / \ \exists (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in (A_0 \cap A_1)^{\mathbb{Z}} \left\{ \begin{array}{c} a = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\theta} \|a_j\|_{A_0} < \infty \\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(1-\theta)} \|a_j\|_{A_1} < \infty \end{array} \right. \}$$

muni de la norme

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,1}} = \min_{a=\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j} \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\theta} \|a_j\|_{A_0} + \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(1-\theta)} \|a_j\|_{A_1}.$$

Alors pour un espace de Banach X tel que $A_0 \cap A_1 \subset X$ (injection continue), les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
(A) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout espace de Banach B et tout opérateur linéaire continu T de B dans $A_0 \cap A_1$, les normes d'opérateurs de T vérifient

$$\|T\|_{\mathcal{L}(B,X)} \leq C \|T\|_{\mathcal{L}(B,A_0)}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}(B,A_1)}^{\theta}$$

(B) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $a \in A_0 \cap A_1$ on a

$$\|a\|_X \leq C \|a\|_{A_0}^{1-\theta} \|a\|_{A_1}^{\theta}$$

(C) $[A_0, A_1]_{\theta,1} \subset X$ (injection continue)

L'équivalence des propriétés (B) et (C) dans le lemme 2 provient de la décomposition atomique de $[A_0, A_1]_{\theta,1}$:

Lemme 3 : (atomes de $[A_0, A_1]_{\theta,1}$)
$a \in [A_0, A_1]_{\theta,1}$ si et seulement si a peut se décomposer en

$$a = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n a_n \ \textit{avec} \ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|_{A_0}^{1-\theta} \|a_n\|_{A_1}^{\theta} \leq 1 \ \textit{et} \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < \infty.$$

De plus, la norme $\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,1}}$ est équivalente à

$$\min(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \ / \ a = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n a_n, \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|_{A_0}^{1-\theta} \|a_n\|_{A_1}^{\theta} \leq 1).$$

L'intérêt des décompositions atomiques est le suivant :

Lemme 4 : (décompositions atomiques)
Soit E un espace de Banach et soit $\mathcal{A}$ une partie de la boule-unité fermée de E.
L'espace atomique engendré par $\mathcal{A}$ est l'espace F défini par $a \in F$ si et seulement si $a \in E$ et a peut se décomposer en $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n a_n$ avec $a_n \in \mathcal{A}$ pour tout n et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < \infty$. F est normé par

$$\|a\|_F = \min(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \ / \ a = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n a_n, a_n \in \mathcal{A}).$$

Alors F est un espace de Banach, F s'injecte continument dans E (on a plus précisément $\|a\|_E \leq \|a\|_F$). De plus, si B est un espace de Banach et si T est une application linéaire définie sur l'espace des combinaisons linéaires finies des éléments de $\mathcal{A}$ à valeurs dans B, alors T s'étend en une aplication linéaire continue de F dans B si et seulement si $\sup_{a\in\mathcal{A}} \|T(a)\|_B < \infty$.
Si E est séparable, alors l'espace $L^1(\mathbb{R}, F)$ des fonctions à valeurs dans F et intégrables au sens de Bochner admet une décomposition atomique basée sur $\mathcal{A}$:

$$L^1(\mathbb{R}, F) = \{\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \chi_n(t) a_n \ / \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| < \infty, \ a_n \in \mathcal{A} \ \textit{et} \ \int_{\mathbb{R}} |\chi_n(t)| \, dt \leq 1\}$$

et

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R},F)} \approx \min\big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \ / \ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \chi_n(t) a_n \ \textit{p.p.} \ \big)$$

Un autre résultat élémentaire d'interpolation utile est le suivant :

Lemme 5 : (Maximalité de $[A_0, A_1]_{\theta,\infty}$)
Pour $0 < \theta < 1$, on définit l'espace

$$[A_0, A_1]_{\theta,\infty} = \{a \in A_0 + A_1 \ / \ \exists (a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in (A_0 \cap A_1)^{\mathbb{Z}} \left\{ \begin{array}{c} a = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\theta} \|a_j\|_{A_0} < \infty \\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(1-\theta)} \|a_j\|_{A_1} < \infty \end{array} \right\}$$

muni de la norme

$$\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,1}} = \min_{a=\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j} \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j\theta} \|a_j\|_{A_0} + \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{j(1-\theta)} \|a_j\|_{A_1}.$$

Alors pour un espace de Banach X tel que $X \subset A_0 + A_1$ (injection continue), les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout espace de Banach B et tout opérateur linéaire continu T de $A_0 + A_1$ dans B, les normes d'opérateurs de T vérifient

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,B)} \leq C\|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(A_0,B)}\|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(A_1,B)}$$

(B) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $a \in X$ et tout $\lambda > 0$ il existe $a_0 \in A_0$ et $A_1 \in A_1$ tels que

$$a = a_0 + a_1,\ \|a_0\|_{A_0} \leq C\|a\|_X \lambda^{1-\theta},\ \|a_1\|_{A_1} \leq C\|a\|_X \lambda^{-\theta}$$

(C) $X \subset [A_0, A_1]_{\theta,\infty}$ (injection continue)

L'équivalence des propriétés (B) et (C) dans le lemme 5 provient de la propriété de meilleure approximation des éléments de $[A_0, A_1]_{\theta,\infty}$:

Lemme 6 : (meilleure approximation)
$a \in [A_0, A_1]_{\theta,1}$ si et seulement si a peut se décomposer pour tout $\lambda > 0$ en $a = a_\lambda + b_\lambda$ avec $\sup_{\lambda>0} \|a_\lambda\|_{A_0}\lambda^{1-\theta} + \|b_\lambda\|_{A_1}\lambda^{-\theta} < \infty$. De plus, la norme $\|a\|_{[A_0,A_1]_{\theta,\infty}}$ est équivalente à

$$\sup_{\lambda>0} \min_{a=a_0+a_1} \|a_0\|_{A_0}\lambda^{1-\theta} + \|a_1\|_{A_1}\lambda^{-\theta}.$$

3. Le lemme de Meyer : première preuve.

La preuve la plus simple du lemme 1 est basée sur le résultat classique d'interpolation [BERL 76] [LEM 02] :

Lemme 7 : ($L^{p,\infty}$ comme espace d'interpolation)
$L^{3/2,\infty} = [L^1, L^2]_{2/3,\infty}$ et $L^{3,\infty} = [L^2, L^\infty]_{1/3,\infty}$

Nous utiliserons alors comme seuls ingrédients les estimations $L^p \to L^q$ pour le noyau de la chaleur :

Lemme 8 : (Noyau de la chaleur)
L'opérateur $e^{\Delta/2}$ est un opérateur de convolution avec un noyau appartenant à $L^1 \cap L^\infty$. L'opérateur $\sqrt{-\Delta}e^{\Delta/2}$ est un opérateur de convolution avec un noyau appartenant à L^1. En particulier, $\sqrt{-\Delta}e^{\Delta}$ est continu de L^p dans L^q pour tous $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et compte tenu de l'homogénéité des normes L^p et L^q on a, pour tous $1 \leq p \leq q \leq \infty$,

$$\sup_{s>0} \|\sqrt{-\Delta}e^{s\Delta}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^3),L^q(\mathbb{R}^3))} s^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} < \infty. \tag{3}$$

Démonstration du lemme 1 :
On applique (3) à $q = 2$ pour $p = 1$ et $p = 2$: on a $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}f\|_2 \leq C\|f\|_1 s^{-5/4}$ et $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}f\|_2 \leq C\|f\|_2 s^{-1/2}$, d'où par interpolation $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}f\|_2 \leq C\|f\|_{L^{3/2,\infty}} s^{-3/4}$. De même, en appliquant (3) à $q = \infty$ pour $p = 1$ et $p = 2$, on a $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}f\|_\infty \leq C\|f\|_1 s^{-2}$ et $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}f\|_\infty \leq C\|f\|_2 s^{-5/4}$, d'où $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}f\|_\infty \leq C\|f\|_{L^{3/2,\infty}} s^{-3/2}$.
On estime alors facilement $\int_0^\infty e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}f\ ds$: pour $A > 0$, on écrit

$$\int_0^A \|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_{L^{3,1}}\ ds \leq C\int_0^A \|f(s,.)\|_{L^{3/2,\infty}} s^{-3/4}\ ds \leq 4CA^{1/4}\|f\|_{L^\infty_t L^{3/2,\infty}_x}$$

et

$$\int_A^\infty \|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_{L^{3,1}}\ ds \leq C\int_A^\infty \|f(s,.)\|_{L^{3/2,\infty}} s^{-3/2}\ ds \leq 2CA^{-1/2}\|f\|_{L^\infty_t L^{3/2,\infty}_x}.$$

Comme ces inégalités sont valables pour tout A, on obtient bien $\int_0^\infty e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}f\ ds \in [L^2, L^\infty]_{1/3,\infty} = L^{3,\infty}$.
$\square$

4. Le lemme de Meyer : deuxième preuve.

Une autre preuve du lemme 1 se fait par dualité à partir des résultat classiques d'interpolation [BERL 76] [LEM 02] :

Lemme 9 : ($L^{p,\infty}$ comme espace dual)
i) $L^{3/2,1} = [L^1, L^2]_{2/3,1}$ *et* $L^{3,1} = [L^2, L^\infty]_{1/3,1}$
ii) $L^{3/2,\infty} = (L^{3,1})'$ *et* $L^{3,\infty} = (L^{3/2,1})'$.

Pour prouver le lemme 1, nous définissons $F = \int_0^\infty e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}f\ ds$. Pour prouver $F \in L^{3,\infty}$, nous utilisons la décomposition atomique de $L^{3/2,1} = [L^1, L^2]_{2/3,1}$ et nous chechons à prouver l'existence d'une constante C_F telle que

$$\forall g \in L^1 \cap L^2\ |\int Fg\ dx| \leq C_F\|g\|_1^{1/3}\|g\|_2^{2/3}.$$

Par ailleurs, l'opérateur $e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}$ est auto-adjoint et la dualité $L^{3,1}, L^{3/2,\infty}$ permet d'écrire

$$|\int Fg\ dx| \leq C\|f\|_{L_t^\infty L_x^{3/2,\infty}} \int_0^\infty \|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_{L^{3,1}}\ ds$$

. Ainsi, le lemme 1 est clairement une conséquence du lemme suivant :

Lemme 10 :
Il existe une constante C telle que

$$\forall g \in L^1 \cap L^2\ \int_0^\infty \|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_{L^{3,1}}\ ds \leq C\|g\|_1^{1/3}\|g\|_2^{2/3}.$$

Démonstration du lemme 10 :
Nous utilisons à nouveau les estimations $L^p \to L^q$ pour le noyau de la chaleur. On applique (3) à $p = 1$ pour $q = 2$ et $q = \infty$: on a $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_2 \leq C\|g\|_1 s^{-5/4}$ et $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_\infty \leq C\|g\|_1 s^{-2}$, d'où par interpolation $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_{L^{3,1}} \leq C\|g\|_1 s^{-3/2}$. De même, en appliquant (3) à $p = 2$ pour $q = 2$ et $q = \infty$, on a $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_2 \leq C\|g\|_2 s^{-1/2}$ et $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_\infty \leq C\|g\|_2 s^{-5/4}$, d'où $\|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_{L^{3,1}} \leq C\|g\|_2 s^{-3/4}$.
On estime alors facilement $\int_0^\infty \|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_{L^{3,1}}\ ds$: pour $A > 0$, on écrit

$$\|\int_0^A e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}f\ ds\|_2 \leq C\int_0^A \|g\|_2 s^{-3/4}\ ds = 4CA^{1/4}\|g\|_2$$

et

$$\|\int_A^\infty e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}f\ ds\|_\infty \leq C\int_A^\infty \|g\|_1 s^{-3/2}\ ds = 2CA^{-1/2}\|g\|_1.$$

On conclut en choisissant $A = \left(\frac{\|g\|_1}{\|g\|_2}\right)^{4/3}$. $\square$

Par la décomposition atomique de $L^{3/2,1}$ et de $L_t^1 L_x^{3/2,1}$, le lemme 10 se réécrit en :

Lemme 11 : (Version duale du lemme de Yves Meyer)
Il existe une constante C telle que
i) pour tout $g \in L^{3/2,1}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\int_0^\infty \|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_{L^{3,1}}\ ds \leq C\|g\|_{L^{3/2,1}}$$

ii) pour tout $g \in L^1([0,+\infty[, L^{3/2,1}(\mathbb{R}^3))$, on a

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\sqrt{-\Delta}g(s,.)\ ds \in L^1([0,+\infty[, L^{3/2,1}(\mathbb{R}^3))$$

et

$$\int_0^\infty \| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\sqrt{-\Delta}g(s,.)\ ds\|_{L^{3,1}}\ dt \leq C\|g\|_{L^1_t L^{3/2,1}_x}$$

Par une preuve exactement similaire, on obtient également ce lemme qui nous sera très utile :

Lemme 12 :
Il existe une constante C telle que
i) pour tout $g \in L^{3,1}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\int_0^\infty \|e^{s\Delta}\sqrt{-\Delta}g\|_\infty\ ds \leq C\|g\|_{L^{3,1}}$$

ii) pour tout $g \in L^1([0,+\infty[, L^{3,1}(\mathbb{R}^3))$, on a

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta}\sqrt{-\Delta}g(s,.)\ ds \in L^1([0,+\infty[, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^3))$$

et

$$\int_0^\infty \| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\sqrt{-\Delta}g(s,.)\ ds\|_\infty\ dt \leq C\|g\|_{L^1_t L^{3,1}_x}$$

5. Solutions auto-similaires et principe du maximum.

Les preuves de Nečas, Ružička et Šverák [NECRS 96] et de Tsai [TSA 98] reposent sur le principe du maximum de Hopf. Nous allons énoncer le résultat de non-existence dans un cadre particulier, qui se démontrera immédiatement par le principe du maximum, puis dans les sections suivantes on montrera comment se ramener au cas particulier.

On considère donc une solution auto-similaire des équations de Navier–Stokes (1). Nous nous plaçons a priori dans le cadre de solutions faibles : nous demandons que $\vec{u}$ soit un champ de vecteurs localement de carré intégrable sur $]0,T^*[\times\mathbb{R}^3$ et qu'il existe une distribution $p \in \mathcal{D}'((0,T^*)\times\mathbb{R}^3)$ telle que, au sens des distributions, on ait

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \vec{\nabla}.(\vec{u}\otimes\vec{u}) - \vec{\nabla}p \\ \vec{\nabla}.\vec{u} = 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

Dire que $\vec{u}$ est une solution auto-similaire de Leray, c'est demander que $\vec{u}$ soit de la forme

$$\vec{u}(t,x) = \lambda(t)\vec{U}(\lambda(t)x) \text{ with } \lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2a(T^*-t)}} \tag{5}$$

pour une constante $a > 0$ et un champ de vecteurs $\vec{U} \in (L^2_{loc}(\mathbb{R}^3))^3$. (4) et (5) donnent une équation sur p : $\vec{\nabla}p(t,x) = \lambda(t)^3\vec{Q}(\lambda(t)x)$ où $\vec{Q} = \Delta\vec{U} - \vec{\nabla}.\vec{U}\otimes\vec{U}\ - a\vec{U} - a(\vec{X}.\vec{\nabla})\vec{U}$. Cela entraîne que p est de la forme $p(t,x) = \lambda(t)^2P(\lambda(t)x) + q(t)$ pour deux distributions $P \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ et $q \in \mathcal{D}'((0,T^*))$. Nous pouvons supposer $q = 0$, puisque seul le gradient (en x) de p intervient dans l'équation (4).

Finalement, on voit que les solutions auto-similaires $(\vec{u}, p)$ sont données par les équations

$$(6)\qquad \begin{cases} \vec{u}(t,x) = \lambda(t)\vec{U}(\lambda(t)x) \\ p(t,x) = \lambda(t)^2 P(\lambda(t)x) \\ \\ \Delta\vec{U} = a\vec{U} + a(\vec{X}.\vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla}.\vec{U}\otimes\vec{U} + \vec{\nabla}P \\ \vec{\nabla}.\vec{U} = 0 \end{cases}$$

Le théorème fondamental de [NECRS 96] et de [TSA 98] est alors :

Théorème 3 : (Solutions auto-similaires régulières à croissance lente)

Soient $\vec{U} \in (\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3))^3$ et $P \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ des solutions des équations de Leray :

$$\begin{cases} \Delta\vec{U} = a\vec{U} + a(\vec{X}.\vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla}.\vec{U}\otimes\vec{U} + \vec{\nabla}P \\ \vec{\nabla}.\vec{U} = 0 \end{cases}$$

avec $a > 0$. Si $\vec{U}$ et P vérifient de plus $\lim_{x\to\infty} \frac{|\vec{U}(x)|}{|x|} = 0$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{|P(x)|}{|x|^2} = 0$ alors $\vec{U}$ est constante.

Démonstration : La démonstration repose sur l'introduction de la fonction $\Pi = \frac{1}{2}|\vec{U}|^2 + P + a\vec{X}.\vec{U}$ et de l'opérateur différentiel $\mathcal{L}f = \Delta f - (\vec{U} + a\vec{X}).\vec{\nabla}f$.

Étape n° 1 : $\mathcal{L}\Pi \geq 0$.

On commence par remarquer que $(\vec{X}.\vec{\nabla})\vec{U}$ est de divergence nulle puisqu'on a $\vec{\nabla}.\big((\vec{X}.\vec{\nabla})\vec{U}\big) = \vec{\nabla}.\vec{U} + (\vec{X}.\vec{\nabla})(\vec{\nabla}.\vec{U})$. Cela permet d'écrire

$$\Delta P = -\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \partial_j\partial_k(U_jU_k) = -\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \partial_jU_k\partial_kU_j$$

(en prenant la divergence des équations de Leray). Par ailleurs, $\Delta(\vec{X}.\vec{U}) = \vec{X}.\Delta\vec{U} + 2\vec{\nabla}.\vec{U} = \vec{X}.\Delta\vec{U}$ et $\Delta(\frac{1}{2}|\vec{U}|)^2 = \vec{U}.\Delta\vec{U} + |\vec{\nabla}\otimes\vec{U}|^2$. Cela donne $\Delta\Pi = |\vec{\nabla}\otimes\vec{U}|^2 - \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\partial_jU_k\partial_kU_j + (\vec{U} + a\vec{X}).\Delta\vec{U}$. Enfin, on calcule facilement

$$(\vec{U} + a\vec{X}).\vec{\nabla}\Pi = (\vec{U} + a\vec{X}).\big(\vec{\nabla}P + a\vec{U} + ((\vec{U} + a\vec{X}).\vec{\nabla})\vec{U}\big) = (\vec{U} + a\vec{X}).\Delta\vec{U}$$

et donc

$$(7)\qquad \mathcal{L}\Pi = |\vec{\nabla}\otimes\vec{U}|^2 - \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\partial_jU_k\partial_kU_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}|\partial_jU_k - \partial_kU_j|^2 \geq 0.$$

Étape n° 2 : Le principe du maximum.

Le principe du maximum de Hopf est démontré ensuite dans une variante qui correspond à notre problème :

Lemme 13 : (Principe du maximum)

Soient Π, $b_1, \ldots, b_3$ des fonctions à valeurs réelles telles que $\Pi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ et, pour $j = 1\ldots,3$, $b_j \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ avec $\lim_{x\to\infty}\frac{|b_j(x)|}{|x|} = 0$. Soient $a > 0$, $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_3)$ et soit $\vec{X}$ le champ de vecteur identité sur $\mathbb{R}^3$: $\vec{X}(x) = (x_1, \ldots, x_3)$. Sous les hypothèses

$$\Delta\Pi - (\vec{b} + a\vec{X}).\vec{\nabla}\Pi \geq 0 \ \ et\ \lim_{x\to\infty}\frac{|\Pi(x)|}{|x|^2} = 0,$$

Π *est constante.*

Démonstration du lemme 13 : On définit l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$ par $\mathcal{L}f = \Delta f - (\vec{b} + a\vec{X}).\vec{\nabla} f$. On a donc pour hypothèse que $\mathcal{L}\Pi \geq 0$.

Supposons que Π ne soit pas constante : pour deux points X_0 et X_1 on a $\Pi(X_0) < \Pi(X_1)$. Soient alors R_0 et R_1 deux réels strictement positifs tels que $R_0 < |X_0 - X_1| < R_1$ où R_1 est choisi assez grand pour garantir que $aR_1^2 > 6$ et que, losrque $|x - X_0| \geq R_1$, on a $|\vec{b}(x) + a\vec{X}_0| \leq a|x - X_0|/2$ et où R_0 est choisi assez petit pour garantir que, losrque $|x - X_0| \leq R_0$, on a $\Pi(x) \leq (\Pi(X_0) + \Pi(X_1))/2$. On considère alors la fonction $V(x) = \Pi(x) + \alpha(e^{-\beta|x-X_0|^2} - \gamma|x - X_0|^2)$, où les nombres réels strictement positifs α, β et γ sont choisi de la manière suivante :
i) on choisit en premier lieu β suffisamment grand pour garantir que la fonction $\phi_\beta(x) = e^{-\beta|x-X_0|^2}$ vérifie $\mathcal{L}\phi_\beta > 0$ lorsque $|x - X_0| \geq R_0$. Un tel choix est toujour possible :

$$\mathcal{L}\phi_\beta = e^{-\beta|x-X_0|^2}\beta((4\beta + 2a)|x - X_0|^2 - 6 + 2(\vec{b} + a\vec{X}_0).(\vec{X} - \vec{X}_0));$$

comme $|\vec{b}(x)|$ peut se majorer par $C(R_0)|x - X_0|$ pour $|x - X_0| \geq R_0$, il nous suffit de choisir $\beta > 0$ avec $4\beta + 2a > C(R_0) + 6R_0^{-2} + a|X_0|R_0^{-1}$.
ii) on choisit ensuite γ suffisamment petit pour garantir que la fonction $\psi(x) = |x - X_0|^2$ vérifie l'inégalité $\gamma \sup_{R_0 \leq |x-X_0| \leq R_1} |\mathcal{L}\psi(x)| < \min_{R_0 \leq |x-X_0| \leq R_1} \mathcal{L}\phi_\beta(x)$.
iii) finalement, on choisit ensuite α suffisamment petit pour garantir que

$$\alpha \sup_{|x-X_0| \leq R_1} |\phi_\beta(x) - \gamma\psi(x)| < (\Pi(X_1) - \Pi(X_0))/4.$$

La fonction V est de classe $\mathcal{C}^2$; de plus, $V(x) \sim -\alpha\gamma|x|^2$ quand $x \to \infty$, donc V atteint son maximum en un point X_2 ; en ce point, on a nécessairement $\vec{\nabla} V(X_2) = 0$ et $\Delta V(X_2) \leq 0$, et donc $\mathcal{L}V(X_2) \leq 0$. Or
• $|X_2 - X_0| \leq R_0$ est impossible : losque $|x - X_0| \leq R_0$, on a $V(x) \leq \Pi(X_0) + \frac{3}{4}(\Pi(X_1) - \Pi(X_0)) < V(X_1)$.
• $R_0 \leq |X_2 - X_0| \leq R_1$ est impossible : pour $R_0 \leq |x - X_0| \leq R_1$, on a $\gamma|\mathcal{L}\psi(x)| < \mathcal{L}\phi_\beta(x)$ et $\mathcal{L}\Pi(x) \geq 0$, d'où $\mathcal{L}V(x) > 0$.
• $R_1 \leq |X_2 - X_0|$ est impossible : pour $|x - X_0| \geq R_1$, on a $\mathcal{L}\phi_\beta(x) > 0$, $\mathcal{L}\Pi(x) \geq 0$ et $\mathcal{L}\psi(x) = 6 - 2(\vec{b} + a\vec{X}_0).(\vec{X} - \vec{X}_0) - 2a|x - X_0|^2 \leq 6 - a|x - X_0|^2 < 0$, d'où $\mathcal{L}V(x) > 0$.

Donc, Π doit être constante. □

Étape n° 3 : Fin de la démonstration.

Le lemme 13 donne donc que la fonction Π est constante et donc que $\mathcal{L}\Pi = 0$. L'égalité (7) donne alors que $\partial_j U_k = \partial_k U_j$ pour $j, k \in \{1, \ldots, 3\}$; comme $\vec{U}$ est à divergence nulle, on a donc $\vec{U} = \vec{\nabla} F$ pour une fonction harmonique F. Ainsi, pour $1 \leq j \leq 3$, U_j est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}^3$ qui est $o(|x|)$ à l'infini ; en particulier, U_j est une distribution tempérée harmonique, donc un polynôme harmonique, et sa trop faible croissance à l'infini entraîne alors qu'elle est constante. □

6. Le premier théorème de Tsai.

Nous pouvons maintenant démontrer le premier théorème de Tsai [TSA 98] :

Théorème 4 : (Solutions auto-similaires bornées)

Si $\vec{u} = \lambda(t)\vec{U}(\lambda(t)x)$ est une solution auto-similaire de Leray des équations de Navier–Stokes avec $\vec{U} \in (\mathcal{C}_0)^3$, alors $\vec{u} = 0$.

Démonstration : Du fait que $\vec{u}$ s'annule à l'infini, nous savons [FURLT 00] [LEM 02] que nous pouvons utiliser le projecteur de Leray $\mathbb{P}$ pour calculer la pression p en fonction de $\vec{u}$: $\vec{u}$ est solution des équations de Navier–Stokes :

$$(8) \qquad \begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P}\vec{\nabla}.(\vec{u} \otimes \vec{u}) \\ \vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \end{cases}$$

et p se calcule à partir de $\vec{\nabla} p = (Id - \mathbb{P})(\vec{\nabla}.\vec{u} \otimes \vec{u})$. Par ailleurs, le théorème de régularité de Serrin entraîne que toute solution bornée de (8) (c'est-à-dire toute solution $\vec{u} \in (L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^3))^3$) est de classe $\mathcal{C}^\infty$: pour tout $T_0 < T$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\vec{u} \in (L^\infty((T_0,T_1), B^{k,\infty}_\infty(\mathbb{R}^3)))^3$. En particulier, $\vec{U}$ est $\mathcal{C}^\infty$. Il reste à vérifier que P est régulière et reste $o(|x|^2)$ à l'infini. Par homogénéité, il suffit de montrer que, pour un certain t_0 fixé, $\vec{\nabla} p(t_0,x)$ est régulière et reste $o(|x|)$ à l'infini. On utilise pour cela la décomposition de Littlewood–Paley $Id = S_0 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j$. La partie haute fréquence de p se contrôle aisément : $(Id-\mathbb{P})(Id-S_0)$ envoie $B^{k,\infty}_\infty$ dans $B^{k,\infty}_\infty$, de sorte que $(Id - S_0)\vec{\nabla} p$ appartient à tous les espaces de Besov $B^{k,\infty}_\infty$, donc est régulière et bornée. Par ailleurs, $S_0\vec{\nabla} p(t_0,.)$ est régulière (sa transformée de Fourier est à support compact) et bornée : $\|(Id-\mathbb{P})\vec{\nabla} S_0(\vec{u}\otimes\vec{u})\|_\infty \leq C\|\vec{u}\|^2_\infty$.

On peut donc appliquer le théorème 3 et obtenir que $\vec{U}$ est constante. Comme $\vec{U}$ s'annule à l'infini, on a $\vec{U} = 0$. □

7. Le théorème de Nečas, Ružička et Šverák.

Nous démontrons maintenant le théorème de Nečas, Ružička et Šverák [NECRS 96] :

Théorème 5 : (solutions auto-similaires L^3)

Si $\vec{u} = \lambda(t)\vec{U}(\lambda(t)x)$ est une solution auto-similaire de Leray des équations de Navier–Stokes sur $]0,T^*[\times\mathbb{R}^3$ avec $\vec{U} \in (L^3)^3$, alors $\vec{u} = 0$.

Démonstration : Le résultat de Nečas, Ružička et Šverák est une conséquence directe du théorème de Tsai et des résultats de Furioli, Lemarié–Rieusset et Terraneo [FURLT 00] : $\vec{u}$ s'annule à l'infini au sens de [FURLT 00] et $\vec{u}$ est donc solution des équations de Navier–Stokes (8). De plus, il y a unicité pour le problème initial de Cauchy des solutions de (8) dans la classe $(\mathcal{C}([0,T],L^3))^3$; or l'algorithme de Kato [KAT 84] fournit pour un certain $T > 0$ une solution qui appartient à $(\mathcal{C}([0,T],L^3))^3 \cap (\mathcal{C}((0,T],\mathcal{C}_0))^3$. On a donc $\vec{U} \in (\mathcal{C}_0)^3$ et, par le théorème 3, $\vec{U} = 0$. □

8. Le second théorème de Tsai.

Si la solution auto-similaire $\vec{u}$ vérifie les conditions d'énergie de Leray $\vec{u} \in (L^\infty(]0,T^*[,L^2(\mathbb{R}^3)))^3 \cap (L^2(]0,T^*[,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)))^3$, on a en particulier que $\vec{u} \in (L^4((0,T^*),L^3(L^3)))^3$, et donc $\vec{U} \in (L^3)^3$, de sorte que le théorème 5 donne $\vec{u} = 0$.

Tsai [TSA 98] a prouvé que ce résultat restait vrai lorsqu'on supposait seulement un contrôle local de l'énergie de $\vec{u}$ au voisinage du point d'explosion $(T^*,0)$:

Théorème 6 : (Solutions auto-similaires d'énergie localement finie)

Soit $\vec{u}$ une solution auto-similaire des équations de Navier–Stokes sur $]0,T^*[\times\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \vec{u}(t,x) = \lambda(t)\vec{U}(\lambda(t)x) \\ p(t,x) = \lambda(t)^2 P(\lambda(t)x) \\ \\ \Delta\vec{U} = a\vec{U} + a(\vec{X}.\vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla}.\vec{U}\otimes\vec{U} + \vec{\nabla}P \\ \vec{\nabla}.\vec{U} = 0 \end{cases}$$

avec $\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2a(T^*-t)}}$ où a est une constante strictement positive. Si de plus, pour un $T_0 < T^*$ et un $r_0 > 0$, $\vec{u}$ satisfait les estimations d'énergie

$$\sup_{T_0<t<T^*} \int_{|x|<r_0} |\vec{u}(t,x)|^2 \, dx < \infty \text{ et } \int_{T_0}^{T^*} \int_{|x|<r_0} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(t,x)|^2 \, dx \, dt < \infty$$

alors $\vec{u} = 0$.

Démonstration : Rappelons qu'en définissant $\Pi = \frac{1}{2}|\vec{U}|^2 + P + a\vec{X}.\vec{U}$ et $\mathcal{L}f = \Delta f - (\vec{U} + a\vec{X}).\vec{\nabla} f$, on a

$$\mathcal{L}\Pi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}|\partial_j U_k - \partial_k U_j|^2 \geq 0.$$

La stratégie à suivre est alors claire : montrer que $\vec{U}$ est P sont régulières et estimer leur taux de croissance à l'infini, pour pouvoir appliquer le Théorème 3.

Étape n° 1 : Régularité de $\vec{U}$ et de P.

Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ vérifie $\Delta f \in H^\sigma_{loc}(\mathbb{R}^3)$ pour un $\sigma \in \mathbb{R}$, alors $f \in H^{\sigma+2}_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Or, les hypothèses sur $\vec{u}$ entraînent que $\vec{U} \in (H^1_{loc}(\mathbb{R}^3))^3$. On écrit alors

$$\begin{cases} \Delta P = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \partial_j\partial_k(U_j U_k) \\ \Delta\vec{U} = a\vec{U} + a(\vec{X}.\vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla}.\vec{U}\otimes\vec{U} + \vec{\nabla}P. \end{cases}$$

Il est facile de voir que, pour $s \geq 1$, le produit ponctuel envoie $H^s_{loc}(\mathbb{R}^3) \times H^s_{loc}(\mathbb{R}^3)$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3)$; donc, une estimation $\vec{U} \in (H^s_{loc}(\mathbb{R}^3))^3$ avec $s \geq 1$ implique que $P \in H^{s-\frac{1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ et finalement $\vec{U} \in (H^{s+\frac{1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^3))^3$. On en conclut que $\vec{U}$ est P sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Étape n° 2 : Estimations globales pour $\vec{U}$.

Soit $A = \sup_{T_0<t<T^*} \int_{B(0,r_0)} |\vec{u}(t,x)|^2\, dx$ et $B(t) = \int_t^{T^*}\int_{B(0,r_0)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,x)|^2\, dx\, ds$. Pour $t > T_0$, on a

$$\int_{B(0,r_0)} |\vec{u}(t,x)|^2\, dx = \lambda(t)^{-1}\int_{B(0,\lambda(t)r_0)} |\vec{U}(x)|^2\, dx$$

et donc $\int_{B(0,R)} |\vec{U}(x)|^2\, dx \leq \frac{AR}{r_0}$ pour $R > \lambda(T_0)r_0$. De même, on a

$$\begin{aligned} B(t) &= \int_t^{T^*} \lambda(s)\int_{B(0,\lambda(s)r_0)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{U}(x)|^2\, dx\, ds \\ &\geq (T^*-t)\lambda(t)\int_{B(0,\lambda(t)r_0)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{U}(x)|^2\, dx \end{aligned}$$

et donc $\int_{B(0,R)} |\vec{\nabla}\otimes\vec{U}(x)|^2\, dx \leq \frac{2aB(t)R}{r_0}$ pour $R > \lambda(T_0)r_0$ and $T^*-t = \frac{R^2}{2ar_0^2}$. Cela donne que $\|\vec{U}\|_{L^{6,2}(B(0,R)}$ est $o(\sqrt{R})$ quand R tend vers $+\infty$.

Étape n° 3 : Estimations globales pour P.

Montrons d'abord que la formule

$$P_0 = -\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\partial_k\partial_l(U_k U_l)$$

définit bien une fonction P_0. Pour étudier P_0 sur une boule $B(0,R)$, on fixe $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ égale à 1 sur $B(0,1)$ et à 0 en dehors de $B(0,2)$ et on définit, pour $R \geq 1$, $\omega_R(y) = \omega(\frac{y}{4R})$. Pour $x \in B(0,R)$, on peut écrire $P_0(x) = P_1(x) + P_2(x)$ avec $P_1 = \sum_{k=1}^3\sum_{l=1}^3 R_k R_l(\omega_R U_k U_l)$. Le noyau distribution de $\frac{1}{\Delta}\partial_k\partial_l$ est borné par $C|x-y|^{-3}$ en dehors de la diagonale $x = y$, de sorte que $|P_2(x)| \leq C\int_{|y|\geq 4R}\frac{1}{|x-y|^3}|\vec{U}(y)|^2\, dx \leq C'\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{4^nR\leq|y|\leq 4^{n+1}R}\frac{|\vec{U}(y)|^2}{4^{3n}R^3}\, dx \leq C''R^{-2}$. En particulier, $\|P_2\|_{L^{3,1}(B(0,R))} \leq CR^{-1}$.Par ailleurs, les transformations de Riesz sont continues sur $L^{3,1}$, et donc $\|P_1\|_{L^{3,1}} \leq C\|\omega_R|\vec{U}|^2\|_{L^{3,1}} \leq C'\|\vec{U}\|^2_{L^{6,2}(B(0,8R))} \leq C''\alpha(R)R$ avec $\lim_{R\to\infty}\alpha(R) = 0$. P_0 est donc bien définie et on a $\|P_0\|_{L^{3,1}(B(0,R))} = o(R)$.

En outre, $\partial_j P_0 = Q_1 + Q_2$ avec $Q_1 = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 R_k R_l(\omega_R \partial_j(U_k U_l))$. On a d'une part $\|Q_1\|_{L^{3/2,1}} \leq C\|\omega_R |\vec{U}|\ |\vec{\nabla}\otimes\vec{U}|\ \|_{L^{3/2,1}} \leq C' \|\vec{U}\|_{L^{6,2}(B(0,8R))}\ \|\vec{\nabla}\otimes\vec{U}\|^2_{L^2(B(0,8R))} \leq C''\beta(R)R$ avec $\lim_{R\to\infty}\beta(R) = 0$. D'autre part, pour $x \in B(0,R)$, on a

$$|Q_2(x)| \leq C \int_{|y|\geq 4R} \frac{1}{|x-y|^3} |\vec{U}(y)|\ |\vec{\nabla}\otimes\vec{U}(y)|\ dx \leq C' \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{4^n R\leq |y|\leq 4^{n+1}R} \frac{|\vec{U}(y)|\ |\vec{\nabla}\otimes\vec{U}(y)|}{4^{3n}R^3}\ dx \leq C'' R^{-2},$$

de sorte que $\|Q_2\|_{L^{3/2,1}(B(0,R))} \leq C$. On a donc $\|\vec{\nabla}P_0\|_{L^{3/2,1}(B(0,R))} = o(R)$.

Il reste à comparer P et P_0. On a $\Delta P = \Delta P_0$; de plus, P et P_0 sont des distributions tempérées. Donc, $P - P_0$ est un polynôme harmonique. Écrivons $\partial_j(P-P_0) = \sum_{|\alpha|\leq N} c_{\alpha,j} x^\alpha$. Pour $|\alpha| \leq N$, on considère $\varphi_\alpha \in \mathcal{D}$ telle que $\int x^\alpha \varphi_\alpha\ dx = 1$ et, pour $|\beta| \leq N$ avec $\beta \neq \alpha$, $\int x^\beta \varphi_\alpha\ dx = 0$ et on considère de plus une fonction $\psi_\alpha \in \mathcal{D}$ telle que $\psi_\alpha = 1$ sur un voisinage du support de φ_α. On a alors

$$\int \varphi_\alpha(\frac{x}{R})(\partial_j P(x) - \partial_j P_0(x))\ dx = c_{\alpha,j} R^{3+|\alpha|}.$$

Or on a les estimations

$$|\int \varphi_\alpha(\frac{x}{R})\partial_j P_0(x)\ dx| \leq \|\varphi_\alpha(\frac{x}{R})\|_{L^{3,\infty}} \|\psi_\alpha(\frac{x}{R})\vec{\nabla}P_0\|_{L^{3/2,1}} = o(R^2)$$

et

$$\begin{array}{rcl} |\int \varphi_\alpha(\frac{x}{R})\partial_j P(x)\ dx| & \leq & ((a+d)\|\varphi_\alpha(\frac{x}{R})\|_2 + \|\frac{1}{R^2}(\Delta\varphi_\alpha)(\frac{x}{R})\|_2)\|\psi_\alpha(\frac{x}{R})\vec{U}\|_2 \\ & & +\frac{1}{R}\|\vec{\nabla}\varphi_\alpha\|_\infty(\|\psi_\alpha(\frac{x}{R})\ |x|\ |\vec{U}|\|_1 + \|\psi_\alpha(\frac{x}{R})|\vec{U}|^2\|_1) \\ & = & O(R^2), \end{array}$$

ce qui entraîne $c_{\alpha,j} = 0$. Donc $P - P_0$ est constante, et nous pouvons supposer que $P = P_0$ (puisque seul le gradient de P intervient dans les équations de Leray).

Étape n° 4 : Estimations locales pour $\vec{U}$.

On pose $T = T^*/2$. On fixe $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, égale à 1 sur la boule $B(0,1)$ et à 0 en dehors de la boule $B(0,2)$, et on définit, pour $|x| \geq 1$, la fonction ω_x par $\omega_x(y) = \omega(\frac{y}{4|x|})$. Pour $|x| \geq 1$, on a

$$\begin{cases} \sup_{0\leq t\leq T} \|\vec{u}(t,y)\|_{L^{6,2}(B(0,8|x|))} \leq \alpha(x)|x|^{1/2} \\ \sup_{0\leq t\leq T} \|p(t,y)\|_{L^{3,1}(B(0,8|x|))} \leq \alpha(x)|x| \end{cases}$$

avec $\lim_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$. En écrivant

$$\begin{array}{rcl} \partial_t(\omega_x\vec{u}) = & & \Delta(\omega_x\vec{u}) - 2\sum_{j=1}^3 \partial_j((\partial_j\omega_x)\vec{u}) + (\Delta\omega_x)\vec{u} \\ & & -\vec{\nabla}.(\omega_x(\vec{u}\otimes\vec{u})) + (\vec{u}.\vec{\nabla}\omega_x)\vec{u} - \vec{\nabla}(\omega_x P) + P\vec{\nabla}\omega_x \end{array}$$

on obtient pour $t \in]0,T]$

$$\omega_x(y)\vec{u}(t,y) = e^{t\Delta}(\omega_x\vec{u}(0,.)) + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(\vec{\beta}_x(\tau,.) - \sum_{j=1}^3 \partial_j\vec{\gamma}_{j,x}(\tau,.))\ d\tau$$

avec $\vec{\beta}_x = (\Delta\omega_x)\vec{u} + (\vec{u}.\vec{\nabla}\omega_x)\vec{u} + P\vec{\nabla}\omega_x$ et $\vec{\gamma}_{j,x} = 2(\partial_j\omega_x)\vec{u} + \omega_x u_j\vec{u} + \omega_x P e_j$. Notons $B_x = B(0,8|x|)$. On a alors

$$\begin{cases} \|\vec{\beta}_x\|_{L^{3/2,1}} \leq C\big(\|\vec{u}\|_{L^{6,2}(B_x)}|x|^{-2}|x|^{3/2} + (\|\vec{u}\|^2_{L^{6,2}(B_x)} + \|P\|_{L^{3,1}(B_x)})|x|^{-1}|x|\big) \\ \|\vec{\gamma}_{j,x}\|_{L^{3,1}} \leq C\big(\|\vec{u}\|_{L^{6,2}(B_x)}|x|^{-1}|x|^{1/2} + \|\vec{u}\|^2_{L^{6,2}(B_x)} + \|P\|_{L^{3,1}(B_x)}\big) \end{cases}$$

Ainsi, $\sup_{0\leq t\leq T}\|\vec{\beta}_x(t,.)\|_{L^{3/2,1}} = o(|x|)$ et $\sup_{0\leq t\leq T}\|\vec{\gamma}_{j,x}(t,.)\|_{L^{3,1}} = o(|x|)$.

On utilise alors le Lemme 12. Comme $\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}$ envoie $L^{3/2,1}$ vers $L^{3,1}$, la fluctuation locale définie par $\vec{w}_x(t,y) = \omega_x(y)\vec{u}(t,y) - e^{t\Delta}(\omega_x\vec{u}(0,.))$ vérifie

$$\begin{array}{rcl} \int_0^T \|\vec{w}_x(t,y)\|_\infty \, dt & \leq & C\int_0^T \|\vec{\beta}_x(t,.)\|_{L^{3/2,1}} + \sum_{j=1}^3 \|\vec{\gamma}_{j,x}(t,.)\|_{L^{3,1}} \, dt \\ & \leq & CT \sup_{0<t<T} \|\vec{\beta}_x(t,.)\|_{L^{3/2,1}} + \sum_{j=1}^3 \|\vec{\gamma}_{j,x}(t,.)\|_{L^{3,1}} \\ & \leq & \beta_T(x)|x| \end{array}$$

avec $\lim_{x\to\infty} \beta_T(x) = 0$. La tendance locale $e^{t\Delta}(\omega_x\vec{u}(0,.))$ vérifie quant à elle

$$\int_0^T \|e^{t\Delta}(\omega_x\vec{u}(0,.))\|_\infty \, dt \leq CT^{1/4}\|\omega_x\vec{u}(0,.)\|_2 = o(|x|).$$

On a donc obtenu $\int_0^T \|\omega_x\vec{u}(t,.)\|_\infty \, dt = o(|x|)$. Sur $[0,T]$, $\lambda(0) \leq \lambda(t) \leq \lambda(T) = \sqrt{2}\lambda(0)$, et donc

$$|\vec{U}(\lambda(T)x)| = \frac{1}{\lambda(t)}|\vec{u}(t, \frac{\lambda(T)}{\lambda(t)}x)| \leq \frac{1}{\lambda(0)}|\omega_x(\frac{\lambda(T)}{\lambda(t)}x)\vec{u}(t, \frac{\lambda(T)}{\lambda(t)}x)|,$$

d'où $|\vec{U}(\lambda(T)x)| \leq \frac{1}{T\lambda(0)}\int_0^T \|\omega_x\vec{u}(t,.)\|_\infty \, dt = o(|x|)$. Or $\lambda(T)$ est une constante, et un simple changement de variable donne que $\lim_{x\to\infty} \frac{|\vec{U}(x)|}{|x|} = 0$.

Étape n° 5 : Estimations locales pour $\vec{\nabla} \otimes \vec{U}$.

On conserve les notations $T = T^*/2$ et $\omega_x(y) = \omega(\frac{y}{4|x|})$. On a, pour $t \in]0,T]$,

$$\partial_l\big(\omega_x(y)\vec{u}(t,y)\big) = \partial_l e^{t\Delta}(\omega_x\vec{u}(0,.)) + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\partial_l\vec{\delta}_x(\tau,.) \, d\tau$$

avec $\vec{\delta}_x = \vec{\beta}_x - \sum_{j=1}^3 \partial_j\vec{\gamma}_{j,x} = -(\Delta\omega_x)\vec{u} + (\vec{u}.\vec{\nabla}\omega_x)\vec{u} - (\vec{\nabla}\omega_x.\vec{u})\vec{u} - \omega_x(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} - \omega_x\vec{\nabla}P - 2\sum_{j=1}^3 \partial_j\omega_x\partial_j\vec{u}$. On note $B_x = B(0, 8|x|)$. On a

$$\begin{array}{rl} \|\vec{\delta}_x\|_{L^{3/2,1}} \leq & C\big(\|\vec{u}\|_{L^{6,2}(B_x)}|x|^{-2}|x|^{3/2} + \|\vec{u}\|^2_{L^{6,2}(B_x)}|x|^{-1}|x| \\ & +\|\vec{u}\|_{L^{6,2}(B_x)}\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2(B_x)} + \|\vec{\nabla}P\|_{L^{3/2,1}(B_x)} \\ & +\|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}\|_{L^2(B_x)}|x|^{-1}|x|^{1/2}\big). \end{array}$$

Cela donne $\sup_{0\leq t\leq T} \|\vec{\delta}_x(t,.)\|_{L^{3/2,1}} = o(|x|)$.

En utilisant le Lemme 11, on voit que la fluctuation locale définie par

$$\vec{w}_x(t,y) = \omega_x(y)\vec{u}(t,y) - e^{t\Delta}(\omega_x\vec{u}(0,.))$$

vérifie

$$\begin{array}{rcl} \int_0^T \|\partial_p\vec{w}_x(t,y)\|_{L^{3,1}} \, dt & \leq & C\int_0^T \|\vec{\delta}_x(t,.)\|_{L^{3/2,1}} \, dt \\ & \leq & CT\sup_{0<t<T} \|\vec{\delta}_x(t,.)\|_{L^{3/2,1}} \leq \delta_T(x)|x| \end{array}$$

avec $\lim_{x\to\infty} \delta_T(x) = 0$. Par ailleurs, $e^{t\Delta}$ envoie $\dot{H}^{-1}$ sur $L^{3,1}$ avec une norme d'opérateur $0(t^{-3/4})$, et donc

$$\int_0^T \|\partial_p e^{t\Delta}(\omega_x\vec{u}(0,.))\|_{L^{3,1}} \, dt \leq CT^{1/4}\|\omega_x\vec{u}(0,.)\|_2 = o(|x|).$$

On obtient donc $\int_0^T \|\partial_p\big(\omega_x\vec{u}(t,.)\big)\|_{L^{3,1}} \, dt = o(|x|)$. Or sur $[0,T] \times B(0,2|x|)$, on a

$$|\partial_p\vec{U}(\lambda(T)y)| = \frac{1}{\lambda(t)^2}|\partial_p\vec{u}(t, \frac{\lambda(T)}{\lambda(t)}y)| \leq \frac{1}{\lambda(0)^2}|\partial_p\big(\omega_x\vec{u}(t,.)\big)(\frac{\lambda(T)}{\lambda(t)}y)|,$$

et donc $\|\partial_p\vec{U}\|_{L^{3,1}(B(0,2\lambda(T)|x|))} \leq \frac{1}{T\lambda(0)^2}\int_0^T \lambda(t)\|\partial_p(\omega_x\vec{u}(t,.))\|_{L^{3,1}}\,dt = o(|x|)$. On a donc obtenu l'estimation $\lim_{R\to\infty}\frac{\|\vec{\nabla}\otimes\vec{U}\|_{L^{3,1}(B(0,R))}}{R} = 0$.

Étape n° 6 : Estimations locales pour P.

En écrivant $\omega_x P = \frac{1}{\Delta}(\Delta(\omega_x P)) = \frac{1}{\Delta}(-P\Delta\omega_x + \omega_x\Delta P + 2\vec{\nabla}.(P\vec{\nabla}\omega_x))$, on obtient

$$\|\omega_x P\|_\infty \leq C\|\Delta(\omega_x P)\|_{L^{3/2,1}} \leq C'(\|P\|_{L^{3,1}(B_x)}|x|^{-1} + \|\Delta P\|_{L^{3/2,1}(B_x)} + \|\vec{\nabla}P\|_{L^{3/2,1}(B_x)}|x|^{-1});$$

puisque $\Delta P = -\sum_{j=1}^3\sum_{k=1}^3 \partial_j U_k\partial_k U_j$, on a

$$\|\Delta P\|_{L^{3/2,1}(B_x)} \leq C\|\vec{\nabla}\otimes\vec{U}\|^2_{L^{3,1}(B_x)} = o(|x|^2)$$

et donc on a bien $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{|x|^2} = 0$.

Étape n° 7 : Fin de la démonstration.

On peut maintenant appliquer le théorème 3 et donc on obtient que $\vec{U}$ est constante. Or $\|\vec{U}\|_{L^2(B(0,R)}$ reste $O(\sqrt{R})$ lorsque R tend vers $+\infty$, ce qui implique que $\vec{U} = 0$. □

[BERL 76] BERGH, J. and LÖFSTRÖM, J., *Interpolation spaces*, Springer-Verlag, 1976.

[CAFKN 82] CAFFARELLI, L., KOHN, R., and NIRENBERG, L., Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 35 (1982), pp. 771–831.

[CAN 95] CANNONE, M., *Ondelettes, paraproduits et Navier–Stokes*, Diderot Editeur, Paris, 1995.

[FUJK 64] FUJITA, H. and KATO, T., On the Navier–Stokes initial value problem, I, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 16 (1964), pp. 269–315.

[FURLT 00] FURIOLI, G., LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G., and TERRANEO, E., Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces limites pour Navier–Stokes, *Revista Mat. Iberoamer.* 16 (2000) pp. 605–667.

[KAT 84] KATO, T., Strong L^p solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions, *Math. Zeit.* 187 (1984), pp. 471–480.

[LEM 02] LEMARIÉ-RIEUSSET, P.G., *Recent developments in the Navier–Stokes problem*, CRC Press, 2002.

[LER 34] LERAY, J., Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.* 63 (1934), pp. 193–248.

[LIOP 64] LIONS, J.L. and PEETRE, J., Sur une classe d'espaces d'interpolation, I.H.E.S., *Publ. Math.* 19 (1964), pp. 5–68.

[MEY 99] MEYER, Y., *Wavelets, paraproducts and Navier–Stokes equations*, Current developments in mathematics 1996, International Press, PO Box 38-2872, Cambridge, MA 02238-2872, 1999.

[NECRS 96] NEČAS, J., RUŽIČKA, M., and ŠVERÁK, V., On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations, *Acta Math.* 176 (1996), pp. 283-294.

[TSA 98] TSAI, T.-P., On Leray's self–similar solutions of the Navier–Stokes equations satisfying local energy estimates, *Arch. Rational Mech. Anal.* 143 (1998), pp. 29–51.