INTRODUCTION AUX CHAÎNES DE MARKOV

L3 Génie Biologique et Informatique – Second semestre 2013-2014

MIKAEL FALCONNET
mikael.falconnet@genopole.cnrs.fr

Table des matières

Chapitre 1

Probabilités sur un ensemble fini ou dénombrable

1.1 Univers, évènements et mesures de probabilité

On convient de représenter une *expérience aléatoire* $\mathscr{E}$, c'est à dire une expérience dont l'issue est soumise au hasard, par l'ensemble Ω de tous les résultats possibles à cette expérience. Cet ensemble est appelé *univers*, *espace des possibles* ou encore *espace d'états*. Un résultat possible de l'expérience $\mathscr{E}$ est classiquement noté ω.

Exemple I (Quelques exemples d'univers)**.**

- *L'univers pour le jeu de pile ou face est* $\Omega = \{\mathtt{P}, \mathtt{F}\}$.
- *L'univers pour le jeu de pile ou face répété deux fois est*

$$\Omega = \{(\mathtt{P}, \mathtt{P}), (\mathtt{P}, \mathtt{F}), (\mathtt{F}, \mathtt{P}), (\mathtt{F}, \mathtt{F})\}.$$

- *L'univers pour la durée de vie d'une ampoule électrique est* $\Omega = [0, +\infty[$.

Un *évènement aléatoire* A lié à l'expérience $\mathscr{E}$ est un sous-ensemble de Ω dont on peut dire au vu de l'expérience s'il est réalisé ou non.

Exemple II (Quelques exemples d'évènements)**.**

- *« Obtenir pile » lors d'un jeu de pile ou face.*
- *« Obtenir au moins un pile » lors de plusieurs lancers de pièce.*
- *« L'ampoule survit plus de 200 heures » lors de la durée de vie d'une ampoule électrique.*

Les évènements aléatoires étant des ensembles, nous allons rapidement rappeler les opérations élémentaires sur les ensembles afin de décrire la réalisation d'évènements.

Considérons un ensemble Ω, c'est à dire une collection d'objets appelés éléments de Ω. Une partie A de Ω est aussi un ensemble, appelé sous-ensemble de Ω. L'appartenance d'un élément ω au sous-ensemble A est notée $\omega \in A$, et $\omega \notin A$ signifie que le point ω n'appartient pas à A.

Rappelons les opérations élémentaires sur les parties d'un ensemble.

Intersection : l'intersection des ensembles A et B notée $A \cap B$ est l'ensemble des points appartenant à la fois à A et à B.

Réunion : la réunion de deux ensembles A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble des points appartenant à au moins l'un des deux ensembles.

Ensemble vide : l'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble ne contenant aucun élément.

Ensembles disjoints : les ensembles A et B sont dits disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

Complémentaire : le complémentaire de l'ensemble $A \subset \Omega$ dans Ω, noté A^c ou $\Omega \setminus A$, est l'ensemble des éléments n'appartenant pas à A. Les ensembles A et A^c sont disjoints.

Les opérations ensemblistes précédemment décrites s'interprètent de la manière suivante avec les évènements. Soient A et B deux évènements.

Non : la réalisation de l'évènement contraire à A est représenté par A^c : le résultat de l'expérience n'appartient pas à A.

Et : l'évènement « A et B sont réalisés » est représenté par $A \cap B$: le résultat de l'expérience se trouve à la fois dans A et dans B.

Ou : l'évènement « A ou B sont réalisés » est représenté par $A \cup B$: le résultat de l'expérience se trouve soit dans A soit dans B soit dans les deux.

Implication : le fait que la réalisation de l'évènement A entraîne la réalisation de B se traduit par $A \subset B$.

Incompatibilité : si $A \cap B = \emptyset$, A et B sont dits incompatibles. Un résultat de l'expérience ne peut être à la fois dans A et dans B.

Nous cherchons à définir, pour un ensemble possible de réalisations de l'expérience A, la vraisemblance accordée a priori à A (avant le résultat de l'expérience). Nous voulons donc associer à chaque évènement un nombre $\mathbb{P}(A)$ compris entre 0 et 1, qui représente la chance que cet évènement soit réalisé à la suite de l'expérience.

Définition 1.1. *Soit $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire d'univers Ω. On appelle* mesure de probabilité *sur Ω (ou plus simplement* probabilité*) une application $\mathbb{P}$ qui associe à tout évènement aléatoire A un nombre réel $\mathbb{P}(A)$ telle que*

(i) Pour tout A tel que $\mathbb{P}(A)$ existe, on a $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.

(ii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(iii) $A \cap B = \emptyset$ implique que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Si Ω est fini ou dénombrable, toute probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω est parfaitement déterminée par la donnée d'un ensemble de nombres $\{p(\omega) : \omega \in \Omega\}$ vérifiant

- $\forall \omega \in \Omega,\ p(\omega) \geqslant 0$.
- $\sum\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

On a alors $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p(\omega)$ et pour tout A, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$.

On note $|E|$ le cardinal d'un ensemble E. Si Ω est fini, la probabilité $\mathbb{P}$ définie sur Ω par

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|},$$

est appelée *probabilité uniforme* sur Ω. C'est la probabilité qui rend toutes les issues équiprobables. On a alors, pour tout évènement A

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

formule que l'on paraphrase souvent ainsi

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple III (Lancers de deux pièces)**.** *L'univers Ω associé au lancers de deux pièces est défini par*

$$\Omega = \{(\mathrm{P},\mathrm{P}),(\mathrm{P},\mathrm{F}),(\mathrm{F},\mathrm{P}),(\mathrm{F},\mathrm{F})\}.$$

Le cardinal de Ω est donc égal à quatre. Si l'on met la probabilité uniforme sur Ω, alors la probabilité de l'évènement A défini comme « obtenir au moins un pile » est donné par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\{(\mathrm{P},\mathrm{P}),(\mathrm{P},\mathrm{F}),(\mathrm{F},\mathrm{P})\}|}{4} = \frac{3}{4}.$$

1.2 Variables aléatoires, espérance, variance

Une *variable aléatoire* est une fonction dont la valeur dépend de l'issue d'une expérience aléatoire $\mathscr{E}$ d'univers Ω. On dit qu'une variable aléatoire X est *discrète* si elle prend un nombre de valeurs fini ou dénombrables. L'ensemble des issues ω sur lesquelles X prend une valeur fixée x forme l'évènement $\{\omega : X(\omega) = x\}$ que l'on note $[X = x]$. La probabilité de cet évènement est notée $\mathbb{P}(X = x)$.

La fonction $p_X : x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$ est appelée la *loi* de la variable aléatoire X. Si $\{x_1, x_2, \ldots\}$ est l'ensemble des valeurs possibles pour X, on a

$$p_X(x_i) \geqslant 0, \quad \sum_i p_X(x_i) = 1.$$

Exemple IV. *Soit S_2 le nombre de piles obtenus lors du lancer de deux pièces. L'ensemble des valeurs possibles pour S_2 est $\{0,1,2\}$. Si l'on munit l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$, il vient*

$$\mathbb{P}(S_2 = 0) = \mathbb{P}(\{(\mathrm{F},\mathrm{F})\}) = \frac{1}{4},$$

puis

$$\mathbb{P}(S_2 = 1) = \mathbb{P}(\{(\mathrm{P},\mathrm{F}),(\mathrm{F},\mathrm{P})\}) = \frac{1}{2},$$

et enfin

$$\mathbb{P}(S_2 = 2) = \mathbb{P}(\{(\mathrm{P},\mathrm{P})\}) = \frac{1}{4}.$$

On remarque qu'il est possible de réécrire l'évènement A de l'exemple III défini par « obtenir au moins un pile » comme l'évènement $[S_2 \geqslant 1]$. On retrouve alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(S_2 \geqslant 1) = \mathbb{P}(S_2 = 1) + \mathbb{P}(S_2 = 2) = \frac{3}{4}.$$

Exercice I. *On étudie le lancer de deux dés à six faces équilibrés*

1. *Quel est l'espace d'états Ω associé à cette expérience ? Donner son cardinal.*
2. *On munit Ω de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On définit la variable aléatoire X comme la somme des résultats de chaque dé. Déterminer la loi de X.*

Lorsqu'elle existe, on appelle *espérance* ou *moyenne* d'une variable aléatoire discrète X la quantité notée $\mathbb{E}(X)$ définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i).$$

L'espérance est toujours définie si X prend un nombre fini de valeurs, ou bien si X est à valeurs positives.

Exemple V. *Soit S_2 la variable aléatoire définie dans l'exemple IV. Il vient*

$$\mathbb{E}(S_2) = 0 \cdot \mathbb{P}(S_2 = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(S_2 = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(S_2 = 2) = 1.$$

Lorsqu'elle existe, on appelle *variance* d'une variable aléatoire discrète X la quantité notée $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ définie par

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \sum_i [x_i - \mathbb{E}(X)]^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_i).$$

Proposition 1.2. *Soit X une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ existent. On a alors*

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

Exercice II. *Démontrer la proposition 1.2.*

Exemple VI. *Soit S_2 définie comme ci-dessus. Il vient*

$$\mathbb{E}(S_2^2) = 0^2 \cdot \mathbb{P}(S_2 = 0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(S_2 = 1) + 2^2 \cdot \mathbb{P}(S_2 = 2) = \frac{3}{2},$$

et

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_2) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}.$$

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si elle prend les valeurs 0 et 1 uniquement, et si

$$\mathbb{P}(X=1)=p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=0)=1-p. \tag{1.1}$$

Une telle variable aléatoire peut être interprétée comme l'obtention d'un « succès » lors d'une expérience aléatoire, le succès étant codé comme 1 et l'échec comme 0.

Exercice III.

1. *Lors du lancer d'une pièce de monnaie équilibrée, on considère X la variable aléatoire valant* 1 *si on obtient pile et* 0 *si on obtient face. La variable aléatoire X suit-elle une loi de Bernoulli ? Si oui, de quel paramètre ? Si non, pourquoi ?*
2. *Lors du lancer d'un dé non pipé, on considère la variable aléatoire Y valant* 1 *si l'on obtient un nombre supérieur ou égal à cinq, et* 0 *sinon. La variable aléatoire X suit-elle une loi de Bernoulli ? Si oui, de quel paramètre ? Si non, pourquoi ?*
3. *Lors d'un questionnaire à choix multiple comportant trois questions avec deux réponses possibles par question (vrai/faux), un étudiant répond au hasard à chaque question. On admet que l'étudiant a autant de chance de se tromper que de répondre juste et que les questions sont indépendantes. On note Z la variable aléatoire comptant le nombre de réponses justes obtenues par l'étudiant. La variable aléatoire Z suit-elle une loi de Bernoulli ? Si oui, de quel paramètre ? Si non, pourquoi ?*
4. *Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.*

Exercice IV. *Dans beaucoup de modèles probabilistes d'évolution de séquences d'ADN, le nombre de substitutions (changements d'un nucléotide par un autre) que subit un site pendant un temps t est donné par une loi de Poisson de paramètre λt où λ est le taux moyen de substitution par unité de temps.*

On dit que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson *de paramètre α si elle est à valeurs entières et si*

$$\mathbb{P}(N=n)=\mathrm{e}^{-\alpha}\frac{\alpha^n}{n!}, \quad \textit{pour tout entier } n.$$

1. *Vérifier que $\sum_n \mathbb{P}(N=n)=1$. On pourra utiliser le fait que*

$$\mathrm{e}^{\alpha}=1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}+\ldots$$

2. *Calculer l'espérance de N.*
3. *Ceci valide-t-il l'appellation « taux moyen de substitution par unité de temps » pour λ dans les modèles d'évolution de séquences d'ADN ?*

1.3 Probabilités conditionnelles, indépendance

L'idée de base du conditionnement est la suivante : une information supplémentaire concernant l'expérience modifie la vraisemblance que l'on accorde à l'évènement étudié.

Par exemple, pour un lancer de deux dés (un rouge et un bleu), la probabilité de l'évènement « la somme est supérieure ou égale à 10 » vaut $\frac{1}{6}$ sans information supplémentaire. En revanche si l'on sait que le résultat du dé rouge est 6, elle est égale à $\frac{1}{2}$ tandis qu'elle est égale à 0 si le résultat du dé rouge est 2.

Exercice V. *Comment obtient on ces résultats ?*

Soient $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur Ω et B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. La *probabilité conditionnelle* de A sachant B est le réel $\mathbb{P}(A|B)$ défini par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque 1.3. *L'application $A \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ est une mesure de probabilité sur Ω.*

Les évènements A et B sont dits *indépendants* si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

On remarque que si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, on a les équivalences

$$A \text{ et } B \text{ indépendants } \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des évènements. Ils sont dits *indépendants* (on précise parfois : dans leur ensemble) si pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout ensemble d'entiers distincts $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots n\}$, on a

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont dites *indépendantes* si les évènements $[X_1 = x_1], [X_2 = x_2], \dots, [X_n = x_n]$ sont indépendants pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque 1.4. *Des variables aléatoires peuvent être indépendantes deux à deux, c'est à dire*

$$\mathbb{P}(X_i = x, X_j = y) = \mathbb{P}(X_i = x)\mathbb{P}(X_j = y), \quad \forall i \neq j, \quad \forall x, y$$

sans être indépendantes dans leur ensemble.

Exercice VI. *L'exercice suivant est un peu artificiel et contre-intuitif, mais il permet de vérifier que vous comprenez les notions suivantes : variables aléatoires, indépendance deux à deux, indépendance dans leur ensemble. Cet exercice illustre* *en particulier que l'indépendance deux à deux de variables aléatoires n'entraîne pas l'indépendance dans leur ensemble.*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes équidistribuées telles que

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2} \quad et \quad \mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2}.$$

On définit une troisième variable aléatoire Z par $Z = XY$.

1. *Quelles sont les valeurs possibles de Z ?*
2. *Donner la loi de Z.*
3. *Montrer que X et Z sont indépendantes ainsi que Y et Z.*
4. *Montrer que X, Y et Z ne sont pas indépendantes.*

Proposition 1.5. *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω. On a alors*

$$\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y), \quad \mathbb{E}(aX)=a\cdot\mathbb{E}(X), \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(aX)=a^2\cdot\mathbb{V}\mathrm{ar}(X),$$

pour tout nombre réel a. Si de plus X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y)=\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)+\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y).$$

Exercice VII (Autour de la proposition 1.5)**.** *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω. On suppose que la variable aléatoire X prend n valeurs notées $\{x_1,\dots,x_n\}$ et que la variable aléatoire Y en prend m notées $\{y_1,\dots,y_m\}$. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = X+Y$.*

1. *Donner en fonction de n et m le nombre maximal de valeurs différentes que peut prendre Z.*
2. *Donner un exemple où ce nombre maximal est atteint et un où il ne l'est pas.*
3. *On note $\{z_1,\dots,z_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par Z et pour tout entier $1\leqslant k\leqslant r$, on note I_k l'ensemble défini par*

$$I_k=\big\{(i,j) : x_i+y_j=z_k\big\}.$$

   (a) *Écrire les ensembles I_k dans le cas où X et Y sont chacun le résultat d'un lancer de dé à six faces.*

   (b) *Écrire l'évènement $[Z=z_k]$ en fonction de X, Y et I_k.*

   (c) *En déduire que*

$$\mathbb{E}(Z)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_j)\cdot(x_i+y_j).$$

   (d) *Simplifier les sommes $\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_j)$ et $\sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_j)$.*

   (e) *Déduire de tout ce qui précède que $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$.*

Remarque 1.6. *Il peut arriver que* $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X+Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$ *bien que* X *et* Y *ne soient pas indépendantes, mais ceci est faux dans le cas général*

Exercice VIII. *Soient* X_1 *et* X_2 *deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre* $p \in]0,1[$. *On pose* $S_2 = X_1 + X_2$.

1. *Donner la loi de* S_2.
2. *Calculer l'espérance et la variance de* S_2.
3. *Donner la loi de* S_2 *sachant que* $X_1 = 1$.

Exercice IX. *Au jeu des petits chevaux, il faut obtenir un 6 lors d'un lancer de dé pour pouvoir sortir un cheval de son enclos. On s'interroge sur le nombre moyen de lancers nécessaires afin de sortir un cheval de son enclos. Soit* T *le nombre de lancers nécessaires.*

1. *Quelles sont les valeurs possibles de* T *?*
2. *Écrire l'évènement* $[T = n]$ *avec* $n \geqslant 1$, *à l'aide d'évènements décrits par des variables aléatoires de Bernoulli* $X_1, \ldots, X_n$.
3. *En déduire la loi de* T.
4. *Calculer l'espérance de* T. *On admet que*

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{pour tout } x \in [0,1[.$$

La loi que l'on vient d'exhiber est appelée loi géométrique, *elle joue un rôle important dans les chaînes de Markov à temps discret.*

Exercice X. *On considère un casino pas tout à fait honnête avec les joueurs qui s'y rendent et qui met à disposition de ses clients deux sortes de dés. Parmi les dés,* 99% *sont équilibrés mais* 1% *d'entre eux sont pipés de telle sorte que l'on obtienne un* 6 *une fois sur deux.*

On choisit au hasard un dé D *sur une table et on note* X *le résultat que l'on obtient en le lançant.*

1. *Donnez* $\mathbb{P}(X = 6 \mid D = d_{\mathrm{equ}})$ *et* $\mathbb{P}(X = 6 \mid D = d_{\mathrm{pip}})$ *?*
2. *Donnez* $\mathbb{P}(X = 6, D = d_{\mathrm{equ}})$ *et* $\mathbb{P}(X = 6, D = d_{\mathrm{pip}})$.
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir un six avec le dé ?*
4. *On lance le dé trois fois de suite et on obtient un* 6 *à chaque fois. Naturellement, on se demande si on a choisi un dé pipé. Quelle est la probabilité que ce soit le cas ?*

Exercice XI. *Un étudiant doit répondre à un questionnaire à choix multiples comportant cinq questions. Chaque question comporte quatre réponses possibles dont une et une seule est correcte. On suppose que l'étudiant n'a pas révisé et qu'il répond au hasard à chaque question de manière indépendante. On note* X *le nombre de bonnes réponses obtenus par le candidat.*

Donner la loi de X. *On pourra représenter l'expérience à l'aide d'un arbre.*

1.4 Tp n° 1 chaînes de Markov

1.4.1 Échauffement

1. Rappeler la définition d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.
2. Comment utiliser la fonction `rbinom` pour simuler 100 lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée ?

On rappelle qu'une v.a. X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si pour tout entier k

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \text{avec} \quad k! = k \times (k-1) \cdots \times 2 \times 1.$$

3. Écrire une fonction `LoiPoisson` qui prend en entrée un paramètre $\lambda > 0$ et un entier non nul K et qui renvoie les valeurs $\mathbb{P}(X = k)$ pour k allant de 0 à K. On ira jeter un oeil à la commande `dpois`.
4. Superposer sur un graphique les lois de probabilité des lois de Poisson de paramètre $\lambda = 1, 5, 10$. On pourra utiliser les commandes `plot` et `par(new=true)`.

1.4.2 Fiction immunitaire

Au cours de leur promenade dans le sang, une troupe de ℓ leucocytes rencontrent a agents étrangers. Chaque leucocyte a une probabilité p de neutraliser un agent étranger lorsqu'il l'attaque. On suppose que chaque leucocyte attaque une et une seule fois.

5. Écrire une fonction `Neutralisation` qui prend en entrée deux entiers ℓ et a, un réel p dans $[0,1]$ et qui renvoie le nombre d'agents étrangers restants parmi les a après une attaque de ℓ leucocytes.

Suite à l'attaque des leucocytes, les agents étrangers restants ont la possibilité de se multiplier, ainsi un agent étranger survivant a une probabilité q de se dédoubler.

6. Écrire une fonction `Multiplication` qui prend en entrée un entier non nul a, un réel q dans $[0,1]$ et qui renvoie le nombre d'agents étrangers présents après un cycle de reproduction de a agents étrangers.

Pendant la reproduction des agents étrangers, certains leucocytes ont succombé à l'assaut avec probabilité r. En revanche, chaque leucocyte restant a accumulé de l'expérience lors de l'assaut précédent et si sa probabilité de succès lors d'une attaque était de p, elle passe à $p + (1-p)/10$.

7. Écrire une fonction `Cycle` qui prend en entrée deux entiers ℓ et a, trois réels p, q et r dans $[0,1]$ et qui renvoie le nombre de leucocytes et d'agents vivants après un cycle attaque-reproduction-apprentissage.

8. Écrire une fonction `Infection` qui prend en entrée deux entiers ℓ et a, trois réels p, q et r dans $[0,1]$ et qui renvoie l'évolution des populations de leucocytes et d'agents étrangers jusqu'à ce que l'un des deux groupes ait entièrement disparu ou bien que la population d'agents étrangers ait été multipliée par 5.
9. (Facultatif). On pourra afficher cette évolution dans un beau graphique.

On suppose à présent qu'un agent étranger réussit à toujours être à l'abri des leucocytes et on s'interroge sur le nombre moyen de tentatives nécessaires qu'il doit effectuer pour pouvoir se multiplier. Soit T le nombre de tentatives nécessaires.

10. Quelles sont les valeurs possibles de T ?
11. Écrire l'évènement $[T = n]$ avec $n \geqslant 1$, à l'aide d'évènements décrits par des variables aléatoires de Bernoulli $X_1, \ldots, X_n$. On distinguera le cas $n = 1$.
12. En déduire la loi de T.
13. Est-ce que la fonction `dgeom` correspond à vos résultats ?
14. Calculer l'espérance de T. On admet que

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{pour tout } x \in [0,1[.$$

Remarque. La loi que l'on vient d'exhiber est appelée *loi géométrique*, elle joue un rôle important dans les chaînes de Markov à temps discret.

Chapitre 2

Loi faible des grands nombres

2.1 Loi des grands nombres pour un pile ou face.

Dans le cadre d'un grand nombre de lancers de la même pièce de monnaie, on s'interroge sur la proportion de piles que l'on devrait obtenir. Intuitivement, on voudrait penser que le nombre de piles et le nombre de faces obtenus ont tendance à s'équilibrer, c'est à dire que la proportion de piles devrait converger vers $1/2$. Mais cette proportion dépend d'une expérience aléatoire, il va donc falloir choisir un modèle pour illustrer notre expérience, puis donner un sens à cette convergence.

On convient que le résultat du lancer d'une pièce de monnaie ne dépend pas de tous les lancers précédents et n'influence pas les lancers suivants. On peut par exemple supposer qu'on change de lanceur à chaque fois et qu'il n'y a pas d'apprentissage possible pour le lanceur. Comme on n'utilise toujours la même pièce, on peut également supposer que la probabilité d'obtenir pile est la même à chaque lancer et vaut $p \in]0,1[$. Avec une pièce parfaitement équilibrée, p serait égal à $1/2$.

Pour notre modélisation, on va se donner une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et équidistribuées, c'est à dire ayant toutes la même loi de probabilité donnée par

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p,$$

où 1 symbolise `pile` et 0 symbolise `face`.

On note S_n et $\bar{X}_n$ les variables aléatoires définies par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \bar{X}_n = \frac{S_n}{n}.$$

Elles représentent respectivement le nombre et la proportion de piles que l'on a obtenus au cours des n premiers lancers. Ce sont bien des variables aléatoires car leur valeur dépend de l'expérience aléatoire à laquelle on s'intéresse.

Proposition 2.1. *La variable aléatoire S_n est à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}$. Sa loi est donnée par*

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \textit{pour tout } k \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

où $\binom{n}{k}$ donne le nombre de sous-ensembles différents à k éléments que l'on peut former à partir d'un ensemble contenant n éléments.

La loi de S_n est appelée *loi binomiale* de paramètre n et p. Dans le cas particulier où n vaut 1, on retrouve la loi de Bernoulli de paramètre p. L'espérance et la variance de S_n sont donnés par

$$\mathbb{E}(S_n) = np, \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = np(1-p).$$

Démonstration. L'évènement $[S_n = k]$ est égal à l'évènement « obtenir k piles lors de n lancers ». Cet évènement peut s'écrire comme la réunion sur tous les k-uplets $(i_1, \ldots, i_k)$ de $\{1, \ldots, n\}$ des évènements

$$A_{i_1,\ldots,i_k} = \left(\bigcap_{j=1}^{k} [X_{i_j} = 1] \right) \cap \left(\bigcap_{i \notin \{i_1,\ldots,i_k\}} [X_i = 0] \right).$$

Les évènements $A_{i_1,\ldots,i_k}$ sont deux à deux disjoints et chacun d'entre eux a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ grâce à l'indépendance des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$. Le nombre de k-uplets différents que l'on peut former à partir de $\{1, \ldots, n\}$ est donné par $\binom{n}{k}$ ce qui achève le calcul de $\mathbb{P}(S_n = k)$.

Pour le calcul de l'espérance et de la variance, on utilise la proposition 1.5. □

Puisqu'à présent on connaît la loi de S_n, on peut en déduire la loi exacte de $\bar{X}_n$, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse. Par contre, on remarque que l'espérance de $\bar{X}_n$ est donnée par p. En moyenne, on s'attend donc à obtenir une proportion p de piles au cours de l'expérience. En fait, on a un résultat plus fort qui est que lorsque n tend vers l'infini, la proportion de piles X_n tend vers p au sens suivant.

Théorème 2.2. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Ainsi, quand n devient grand, $\bar{X}_n$ converge en probabilité vers p, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - p| \geqslant \varepsilon) \to 0, \quad \textit{quand} \quad n \to \infty.$$

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Proposition 2.3 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** *Soit Y une variable aléatoire telles que $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$ existent. On a alors*

$$\mathbb{P}(|Y-\mathbb{E}(Y)| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}{\alpha^2}, \quad \forall \alpha > 0.$$

Exercice XII. *Soit m un nombre réel fixé et α un nombre réel strictement positif. On définit l'ensemble A_m^α par*

$$A_m^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : |x-m| \geqslant \alpha\}.$$

On veut comparer les fonctions

$$x \mapsto \alpha^2 \cdot \mathbb{1}_{A_m^\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha^2 & si\,|x-m| \geqslant \alpha, \\ 0 & si\,|x-m| < \alpha, \end{cases} \qquad et \quad x \mapsto (x-m)^2.$$

1. *On considère le cas $m = 0$ et $\alpha = 1$.*
   (a) *Dessiner l'ensemble A_0^1.*
   (b) *Représenter sur un même graphique les fonctions*
   $$x \mapsto \mathbb{1}_{A_0^1}(x) \quad et \quad x \mapsto x^2.$$
   (c) *Quelles sont les coordonnées des points d'intersection des deux graphes ?*
2. *On considère le cas $m = 0$ et $\alpha > 0$ quelconque.*
   (a) *Dessiner l'ensemble A_0^α.*
   (b) *Représenter sur un même graphique les fonctions*
   $$x \mapsto \alpha^2 \cdot \mathbb{1}_{A_0^\alpha}(x) \quad et \quad x \mapsto x^2.$$
   (c) *Quelles sont les coordonnées des points d'intersection des deux graphes ?*
3. *On considère le cas m quelconque et $\alpha = 1$.*
   (a) *Dessiner l'ensemble A_m^1.*
   (b) *Représenter sur un même graphique les fonctions*
   $$x \mapsto \alpha^2 \cdot \mathbb{1}_{A_m^1}(x) \quad et \quad x \mapsto (x-m)^2.$$
   (c) *Quelles sont les coordonnées des points d'intersection des deux graphes ?*
4. *On considère le cas m et $\alpha > 0$ quelconques.*
   (a) *Dessiner l'ensemble A_m^α.*
   (b) *Représenter sur un même graphique les fonctions*
   $$x \mapsto \alpha^2 \cdot \mathbb{1}_{A_m^\alpha}(x) \quad et \quad x \mapsto (x-m)^2.$$
   (c) *Quelles sont les coordonnées des points d'intersection des deux graphes ?*

5. *Montrer que pour tout nombre réel x,*

$$\mathbb{1}_{A_m^\alpha}(x) \leqslant \frac{(x-m)^2}{\alpha^2}.$$

Démonstration de la proposition 2.3. Soit Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \mathbb{1}\{|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant \alpha\},$$

c'est à dire valant 1 si $|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant \alpha$ et 0 sinon. C'est une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant \alpha)$. En particulier, on a

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant \alpha).$$

Grâce à l'exercice XII, on sait que

$$\alpha^2 Z \leqslant [Y - \mathbb{E}(Y)]^2.$$

En prenant l'espérance de part et d'autre de l'inégalité (qui est conservée), on obtient

$$\alpha^2 \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geqslant \alpha) = \mathbb{E}(\alpha^2 Z) \leqslant \mathbb{E}([Y - \mathbb{E}(Y)]^2) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y),$$

ce qui achève la preuve. □

Le fait que l'inégalité entre deux variables aléatoires $Y_1 \leqslant Y_2$ soit conservée par passage à l'espérance vient du fait que l'espérance d'une variable aléatoire positive est positive. En appliquant ceci à la variable aléatoire $Y_2 - Y_1$, on obtient $\mathbb{E}(Y_2 - Y_1) \geqslant 0$, ce qui entraîne $\mathbb{E}(Y_2) - \mathbb{E}(Y_1) \geqslant 0$.

Démonstration du théorème 2.2. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire $\bar{X}_n$. Comme

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = p, \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}(\bar{X}_n) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = \frac{p(1-p)}{n},$$

il vient alors

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2} \to 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$ □

Exercice XIII. *On considère la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires* indépendantes *et telles que pour tout entier $n \geqslant 1$*

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire S_n par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. *Soit un entier $n \geqslant 1$. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n)$ en fonction de n.*
2. *Montrer que $\left(\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*
3. *En déduire que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.*

Exercice XIV. *Soit n un entier strictement positif. On considère n boîtes numérotées de 1 à n dans lesquelles on va placer aléatoirement n bonbons. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note X_i la variable aléatoire qui désigne le numéro de la boîte dans laquelle est placée le i-ème bonbon. On suppose que les variables aléatoires $(X_i)_{i=1}^n$ sont indépendantes et équidistribuées suivant la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$.*

On définit N_n comme le nombre de boîtes vides et on s'intéresse à la convergence en probabilité de la proportion N_n/n de boîtes vides.

1. *Soit $k \in \{1,\dots,n\}$. Écrire en fonction des variables aléatoires $(X_i)_{i=1}^n$ l'évènement A_k défini comme « la boîte k est vide ».*
2. *Donner la probabilité de l'évènement A_k pour $k \in \{1,\dots,n\}$.*
3. *Les évènements $(A_k)_{k=1}^n$ sont-ils indépendants ? Justifier.*
4. *Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, on définit la variable aléatoire Y_k par $Y_k = \mathbb{1}_{A_k}$. Donner la loi de Y_k.*
5. *Les variables aléatoires $(Y_k)_{k=1}^n$ sont-elles indépendantes ?*
6. *Écrire le nombre N_n de boîtes vides en fonction des variables aléatoires $(Y_k)_{k=1}^n$.*
7. *Calculer l'espérance de N_n.*
8. *On souhaite calculer la variance de N_n et pour cela on doit calculer $\mathbb{E}(N_n^2)$.*
   (a) *Écrire N_2^2 et N_3^2 en fonction de Y_1, Y_2 et Y_3.*
   (b) *Écrire N_n^2 en fonction de $(Y_k)_{k=1}^n$.*
   (c) *Soient k et ℓ deux entiers distincts dans $\{1,\dots,n\}$ Que représente la variable aléatoire $Y_k Y_\ell$? Quelle est la loi de cette variable aléatoire et quelle est son espérance ?*
   (d) *Combien y a-t-il de couples d'entiers (k,ℓ) distincts dans $\{1,\dots,n\}$?*
   (e) *Déduire de ce qui précède $\mathbb{E}(N_n^2)$ puis $\mathbb{V}\mathrm{ar}(N_n)$.*
9. *On s'intéresse à la limite de (u_n) quand n tend vers l'infini avec $u_n = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ avec t un nombre réel fixé. On définit $v_n = \ln\left(1-\frac{t}{n}\right)$.*
   (a) *Donner un développement limité à l'ordre 1 de (v_n).*
   (b) *En déduire que $v_n/n \to -t$ quand $n \to +\infty$.*
   (c) *Donner la limite de (u_n).*
10. *Montrer que $\mathbb{E}(N_n/n) \to \frac{1}{\mathrm{e}}$ quand $n \to +\infty$.*
11. *Montrer que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(N_n/n) \to 0$ quand $n \to +\infty$.*

12. *Montrer que si* $\left|\mathbb{E}(N_n/n) - \frac{1}{\mathrm{e}}\right|$ *alors*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{N_n}{n}\right)\right| > \varepsilon/2\right).$$

13. *Déduire de tout ce qui précède que* $\frac{N_n}{n} \to \frac{1}{\mathrm{e}}$ *quand* $n \to +\infty$*.*

2.2 Méthode de Monte-Carlo

Jusqu'à présent, nous nous sommes restreints au cas de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable. Nous allons légèrement sortir de ce cadre pour expliquer comment la loi faible des grands nombres permet d'approcher numériquement la valeur d'une intégrale.

Définition 2.4 (Loi uniforme)**.** *On dit qu'une variable aléatoire à valeurs réelles suit la loi uniforme sur* $[0,1]$ *si elle admet la densité* f *définie par*

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

Ceci est équivalent au fait que, pour tous réels a *et* b *tels que* $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$*,*

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = b - a.$$

Proposition 2.5. *Soient* (X_n) *une suite de variables aléatoires i.i.d. qui suivent une loi uniforme sur* $[0,1]$ *et* φ *une fonction continue sur* $[0,1]$*. Alors*

$$\frac{\varphi(X_1) + \cdots + \varphi(X_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x,$$

en probabilité.

Démonstration. Nous allons appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (2.3) à

$$\Phi_n = \frac{\varphi(X_1) + \cdots + \varphi(X_n)}{n}.$$

La moyenne m de Φ_n est donnée par $m = \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x$. En effet, nous avons d'une part

$$\mathbb{E}(\Phi_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\big(\varphi(X_1) + \cdots + \varphi(X_n)\big) = \mathbb{E}\big(\varphi(X_1)\big),$$

puisque les variables aléatoires $\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_n)$ ont toutes la même loi, et d'autre part,

$$\mathbb{E}\big(\varphi(X_1)\big) = \int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

La variance σ_n^2 de Φ_n est donnée par $\sigma_n^2 = \sigma^2/n$ avec

$$\sigma^2 = \int_0^1 [\varphi(x)]^2\mathrm{d}x - \Big(\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x\Big)^2.$$

En effet, nous avons d'une part

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\Phi_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}\big(\varphi(X_1)+\cdots+\varphi(X_n)\big) = \frac{1}{n}\mathbb{V}\mathrm{ar}\big(\varphi(X_1)\big),$$

puisque les variables aléatoires $\varphi(X_1),\ldots,\varphi(X_n)$ ont toutes la même loi et sont indépendantes. D'autre part,

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\big(\varphi(X_1)\big) = \int_0^1 \varphi^2(x)\mathrm{d}x - \Big(\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x\Big)^2.$$

On a alors

$$\mathbb{P}(|\Phi_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad \square$$

2.3 Tp n° 2 chaînes de Markov

2.3.1 Marches aléatoires

Marche aléatoire simple symétrique On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires *indépendantes* telles que pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit les variables aléatoires S_n et $\overline{X}_n$par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}.$$

1. Comment écrire X_n en fonction de Y_n où Y_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
2. En déduire comment simuler les variables aléatoires X_n pour n allant de 1 à N, où N est une entier donné à l'aide de la fonction `rbinom`.
3. Que renvoient les commandes `cumsum(1 :3)` et `cumsum(1 :4)` ?
4. En déduire comment renvoyer le vecteur $(S_1,\ldots,S_N)$ en fonction du vecteur $(X_1,\ldots,X_N)$.
5. Que renvoient les commandes `c(1,2,4,8)/c(1,10,100,1000)` ?
6. En déduire comment renvoyer le vecteur $(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_N)$ en fonction du vecteur $(S_1,\ldots,S_N)$.
7. Montrer que $\overline{X}_n$ converge en probabilité vers 0.
8. Simuler et afficher plusieurs trajectoires de $\overline{X}_n$ pour n allant de 1 à $N = 5000$.

Marche aléatoire simple biaisée À présent, on considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires *indépendantes* telles que pour tout entier $n \geqslant 1$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p,$$

avec p dans $]0,1[$. Dans le cas où $p = 1/2$, on retombe sur le cas précédent. On conserve les définitions des variables aléatoires S_n et $\overline{X}_n$.

9. Comment simuler les variables aléatoires X_n pour n allant de 1 à N, où N est une entier donné à l'aide de la fonction `rbinom` ?
10. Simuler et afficher des trajectoires de S_n pour n allant de 1 à $N = 5000$ pour $p = 1/2$, $p = 1/3$, $p = 2/3$. Que constate-t-on ?

2.3.2 Calcul approché de π par des méthodes probabilistes

Technique du hit or miss On regarde le carré $[0,1] \times [0,1]$ et on considère le quart de disque D de centre $(0,0)$ et de rayon 1 situé dans ce carré. On rappelle qu'un point M de coordonnée (x, y) appartient à D si $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

11. Calculer l'aire de D.
12. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes et distribuées suivant la loi uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$. On définit les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ par
$$Y_n = \mathbb{1}_D(X_n).$$
    (a) Quelle est la loi de Y_n ?
    (b) Montrer que $\overline{Y}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n$ converge en probabilité vers $\frac{\pi}{4}$.
    (c) En déduire une procédure numérique pour approcher π à laide de `runif`.

Méthode de Monte-Carlo On regarde toujours le carré $[0,1] \times [0,1]$ et le quart de disque D de centre $(0,0)$ et de rayon 1 situé dans ce carré.

13. Soit M le point d'abscisse x appartenant au quart de cercle $\mathscr{C}$ qui délimite D. Calculer l'ordonnée de M en fonction de x dans $[0,1]$. On note $\varphi(x)$ cette ordonnée pour la suite.
14. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes et distribuées suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ (et non plus $[0,1] \times [0,1]$). On définit les variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ par
$$Y_n = \varphi(X_n).$$
    (a) Calculer l'espérance de Y_n. On admettra que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.
    (b) Calculer $\mathbb{E}(Y_n^2)$. En déduire la variance de Y_n.
    (c) Montrer que $\overline{Y}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Y_n$ converge en probabilité vers $\frac{\pi}{4}$.
    (d) En déduire une nouvelle procédure numérique pour approcher π.

Chapitre 3

Chaînes de Markov à temps discret et espace d'états fini ou dénombrable

Nous allons dans ce chapitre nous intéresser à un exemple fondamental de suites de variables aléatoires (X_n) qui décrivent à chaque instant n l'état d'un système aléatoire défini par récurrence : les chaînes de Markov, pour lesquelles la loi des états futurs du processus ne dépend du passé que par l'état du processus au présent. Nous présenterons quelques applications en biologie.

3.1 Exemples conducteurs

Exemple VII (Disponibilité de 2 machines avec 1 technicien, Ruegg (1989))**.** *Une unité de production comprend* 2 *machines automatiques qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine fonctionne toute la journée avec la probabilité p ou bien tombe en panne durant la journée avec probabilité* $1-p$.

L'unité de production possède 1 *technicien travailleur de nuit qui peut réparer une machine tombée en panne et la remettre en état de marche pour le lendemain. En revanche, le technicien ne peut réparer qu'une et une seule machine par nuit.*

On souhaite comprendre le comportement du processus $(X_n)_{n\geqslant 1}$, où X_n représente le nombre de machines en panne au matin du n-ième jour.

Exemple VIII (Disponibilité de m machines avec r techniciens)**.** *On se replace dans le cadre de l'exemple VII mais avec m machines et $r < m$ techniciens (le cas $r \geqslant m$ ne présente pas d'intérêt puisque toutes les machines peuvent être réparées en une nuit).*

3.2 Définition et propriété de Markov

Définition 3.1. *Soient S un ensemble fini ou dénombrable et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même univers Ω muni de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ et à valeurs dans S. On dit que (X_n) est une chaîne de Markov homogène si*

i) (Propriété de Markov) *pour tout entier n et tous $x_0, \dots, x_{n+1} \in S$*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_{0:n} = x_{0:n}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n);$$

ii) (Homogénéité) *la probabilité de transition $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$ ne dépend pas de n, pour tous $(x, y) \in S^2$. On note* $\mathrm{p}(x, y)$ *cette probabilité de transition.*

La loi de X_0 est appelée loi initiale *de la chaîne de Markov et on appelle* matrice de transition *(de dimensions possiblement infinies) la matrice définie par*

$$P = (\mathrm{p}(x, y))_{x,y\in S}.$$

Remarque 3.2. *La matrice P vérifie*

$$\mathrm{p}(x, y) \geqslant 0 \quad et \quad \sum_y \mathrm{p}(x, y) = 1.$$

Une telle matrice est dite stochastique *et on remarque que chaque ligne d'une telle matrice est une mesure de probabilité sur S.*

Exemple VII (suite). *L'espace d'états est $S = \{0, 1\}$ et les probabilités de transition sont données par*

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}(0,0) &= p \cdot (2-p),\\
\mathrm{p}(0,1) &= (1-p)^2,\\
\mathrm{p}(1,0) &= p,\\
\mathrm{p}(1,1) &= (1-p),
\end{aligned}$$

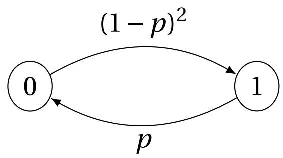
que l'on peut résumer à l'aide de la matrice de transition suivante

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}. \end{array}$$

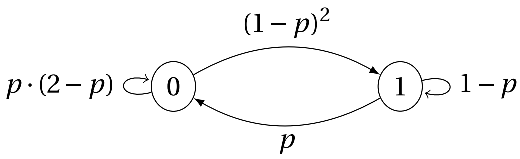
Exercice XV. *Dans le cadre de l'exemple VIII avec $m = 4$ et $r = 2$, donner l'espace d'états du système et les probabilités de transition.*

Les chaînes de Markov sont parfois mieux décrites à l'aide de diagrammes, en particulier quand l'espace d'états est petit ou bien que les transitions sont peu nombreuses.

Exemple VII (suite). *Le diagramme correspondant à la matrice stochastique est le suivant.*



Remarque 3.3. *Nous aurions pu représenter le diagramme suivant.*

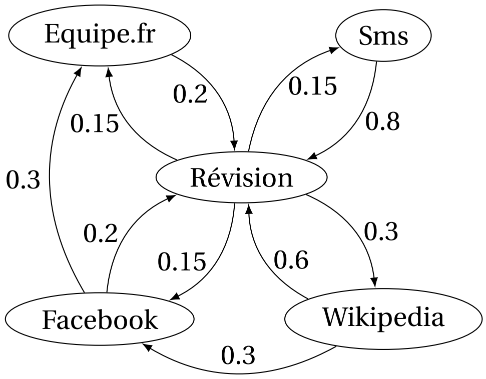


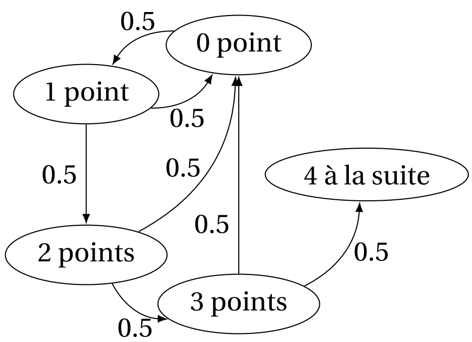
Toutefois, les boucles n'apportent pas d'information supplémentaire puisque la somme des valeurs des arcs orientés quittant un état est égale à 1*. Mis à part si l'on souhaite mettre en valeur un paramètre, on choisit de ne pas les représenter afin de ne pas surcharger le diagramme.*

Exercice XVI. *Dessiner les diagrammes correspondant aux matrices de transition suivantes :*

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice XVII. *Donner les matrices stochastiques correspondant aux diagrammes suivants.*





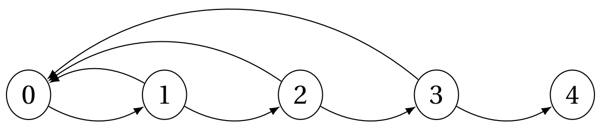
Dans toute la suite, nous abrégeons l'expression « une chaîne de Markov homogène de loi initiale μ et de probabilité de transition P » par « Markov(μ, P) ».

Voici le premier résultat sur la loi d'une trajectoire pour une chaîne de Markov.

Théorème 3.4. *Si un processus discret* (X_n) *est Markov*(μ, P)*, alors pour tout entier* n *et tout* $(n+1)$*-uplet* $x_{0:n} \in S^{n+1}$

$$\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) = \mu(x_0)\mathrm{p}(x_0, x_1)\mathrm{p}(x_1, x_2)\dots\mathrm{p}(x_{n-1}, x_n). \tag{3.1}$$

Exercice XVIII. *Dans le diagramme suivant où tous les arc orientés ont pour probabilité* $1/2$,



donner les probabilités des trajectoires suivantes.
– $X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 0.$
– $X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4.$

3.3 Loi de X_n

Le théorème 3.4 nous donne la loi de la trajectoire d'une chaîne de Markov mais ne permet pas de répondre à la question « Quelle est la probabilité qu'après n pas, la chaîne de Markov soit dans un état donné ? ». Nous allons voir que ce problème se réduit au calcul de la puissance n-ième de la matrice P.

Proposition 3.5. *Soit* (X_n) *Markov*(μ, P). *Alors*

$$\mathbb{P}(X_n = x) = (\mu P^n)(x), \quad \forall x \in S.$$

Exemple VII (suite). *Prenons* $p = 0.9$. *La matrice de transition est donnée par*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Supposons qu'aucune des machines n'est en panne le premier jour. Alors

$$\mu^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le second jour, on a

$$\mu^{(2)} = \mu^{(1)} P = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \end{pmatrix},$$

et après

$$\mu^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9891 & 0.0109 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mu^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.989 & 0.011 \end{pmatrix}.$$

On a l'impression que $\mu^{(n)}$ *évolue très peu. Regardons alors au 10-ième jour*

$$\mu^{(10)} = \begin{pmatrix} 0.989 & 0.011 \end{pmatrix}.$$

Changeons le paramètre p pour voir. Prenons $p = 0.7$. *La matrice de transition est donnée par*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.91 & 0.09 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Supposons qu'aucune des machines n'est en panne le premier jour. Alors

$$\mu^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le second jour, on a

$$\mu^{(2)} = \mu^{(1)} P = \begin{pmatrix} 0.91 & 0.09 \end{pmatrix},$$

et après

$$\mu^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.891 & 0.109 \end{pmatrix} \quad et \quad \mu^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.887 & 0.113 \end{pmatrix}.$$

On a l'impression que $\mu^{(n)}$ évolue très peu. Regardons alors au 10-ième jour

$$\mu^{(10)} = \begin{pmatrix} 0.886 & 0.114 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que $\mu^{(4)}$ et $\mu^{(10)}$ sont proches. On aimerait affirmer que la loi de X_n converge quand n est grand. La suite du cours est consacrée à déterminer la convergence de la loi de X_n et sa loi limite.

Beaucoup de propriétés en temps long des chaînes de Markov sont liées à la notion de mesure de probabilité invariante.

Définition 3.6. *On dit qu'une mesure de probabilité λ est* invariante *(ou* stationnaire*) pour P si*

$$\lambda P = \lambda.$$

Exemple VII (suite). *Prenons $p = 0.9$. La matrice de transition est donnée par*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & \ \ 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

La mesure définie par

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{90}{91} & \frac{1}{91} \end{pmatrix}$$

est invariante pour P. Un calcul approché nous donne

$$\frac{90}{91} \approx 0.989 \quad et \quad \frac{1}{91} \approx 0.011,$$

et l'on peut constater que $\mu^{(4)}$ est proche de π. Si on recommence avec $p = 0.7$, la mesure définie par

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{70}{79} & \frac{9}{79} \end{pmatrix}$$

est invariante pour P. Un calcul approché nous donne

$$\frac{70}{79} \approx 0.886 \quad et \quad \frac{9}{79} \approx 0.114,$$

et l'on peut constater que $\mu^{(4)}$ est proche de π. Effectivement, nous allons montrer que sous certaines hypothèses, la loi de X_n converge vers la mesure invariante de la matrice de transition P.

Exercice XIX. *Paul le poulpe subit un entraînement pour apprendre à choisir un objet A parmi deux objets A et B. Pour cela, on lui fait subir des essais consécutifs dans lesquels il reçoit une récompense si il choisit le bon objet. Paul peut être dans un des trois états suivants :*

(1) *Paul ne sait pas quel objet est récompensé et choisit A ou B avec équiprobabilité.*

(2) *Paul se rappelle que A est récompensé et choisit A, mais peut oublier par la suite.*

(3) *Paul choisit toujours A.*

On suppose qu'après chaque essai il peut changer d'état suivant la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit (X_n) *le processus de Markov associé à l'état de Paul où* X_n *représente l'état de Paul avant le* $(n+1)$*-ième essai. On suppose que Paul est dans l'état 1 avant le premier essai, c'est à dire* $X_0 = 1$.

1. *Dessiner le diagramme correspondant à la matrice de transition* P.
2. *Calculer* $\mathbb{P}(X_1 = 1)$, $\mathbb{P}(X_1 = 2)$ *et* $\mathbb{P}(X_1 = 3)$.
3. *Calculer* $\mathbb{P}(X_2 = 3)$.
4. *Exprimer* $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$ *en fonction de* $\mathbb{P}(X_n = 1)$ *et* $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
5. *Exprimer* $\mathbb{P}(X_{n+1} = 2)$ *en fonction de* $\mathbb{P}(X_n = 1)$ *et* $\mathbb{P}(X_n = 2)$.
6. *Montrer par récurrence que la suite de matrices en ligne* (λ_n) *définie par*

   $$\lambda_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) & \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix},$$

   vérifie

   $$\lambda_n = \lambda_0 Q^n, \quad avec \quad Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

7. *On admet que les valeurs propres de Q sont* $\frac{5}{6}$ *et* $-\frac{1}{4}$*. Déterminer les constantes a et b telles que*

   $$\mathbb{P}(X_n = 1) = a\left(\frac{5}{6}\right)^n + b\left(-\frac{1}{4}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

8. *Quelle est la probabilité que Paul choisisse l'objet A au* n*-ième essai ?*

Exercice XX. *Considérons la matrice de transition suivante :*

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $\lambda = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ *est une mesure de probabilité invariante pour* P.

Exercice XXI. *Soit* $\alpha \in]0,1]$. *Considérons la matrice de transition suivante :*

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'unique mesure de probabilité invariante de P.

3.4 Décomposition en classes de communication

Il est parfois possible de « casser » une chaîne de Markov en composantes plus petites, chacune d'entre elle étant relativement facile à comprendre, et qui toutes ensembles permette de comprendre le comportement de la chaîne globale. Ceci est possible grâce aux classes de communication de la chaîne.

Rappelons que $\mathrm{p}^{(n)}(x,y)$ est défini comme $\mathbb{P}(X_n = y \,|\, X_0 = x)$ que l'on réécrit

$$\mathbb{P}(X_n = y \,|\, X_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_n = y).$$

Définition 3.7. *Soient* x *et* y *deux états de* S. *On dit que* x mène *à* y, *noté* $x \to y$ *si*

$$\mathbb{P}_x(X_n = y \textit{ pour au moins un } n \geqslant 0) > 0,$$

ce qui est équivalent au fait qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ *tel que* $\mathrm{p}^{(n)}(x,y) > 0$. *On dit que* x communique *avec* y, *noté* $x \leftrightarrow y$ *si* x *mène à* y *et* y *mène à* x.

Théorème 3.8. *Pour des états distincts* x *et* y, *les propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) x *mène à* y *;*

(ii) il existe un entier n *et des états* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *tels que* $x_0 = x$, $x_n = y$ *et* $\mathrm{p}(x_0,x_1)\mathrm{p}(x_1,x_2)\ldots\mathrm{p}(x_{n-1},x_n) > 0$.

Le théorème fait simplement la correspondance entre l'existence d'au moins un chemin de longueur n débutant en x et finissant en y dans le diagramme de la chaîne de Markov et les probabilités de transition. Ainsi le fait que x mène à y se traduit par le fait qu'il existe un chemin reliant x à y.

La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur S. En effet,

1. si x communique avec y et y communique avec z, alors x communique avec z ;
2. l'état x communique avec lui-même ;
3. si x communique avec y, alors y communique avec x.

Ainsi, on peut décomposer S en *classes de communication.*

Définition 3.9. *On dit qu'une classe* C *est fermée si*

$$x \in C,\ x \to y \quad \textit{implique } y \in C.$$

Ainsi, une classe fermée est une classe dont on ne peut pas s'échapper. Un état x est dit absorbant si $\{x\}$ est une classe fermée.

Exercice XXII. *Décomposer en classes de communication les chaînes de Markov des exercices XVI et XVII et déterminer dans chaque cas lesquelles sont fermées.*

Définition 3.10. *Une chaîne de Markov est dite irréductible si elle ne possède qu'une seule classe de communication.*

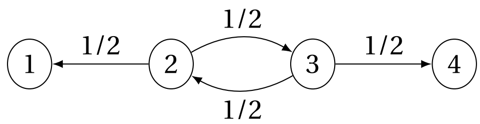
Autrement dit, une chaîne de Markov est irréductible si on ne peut pas casser la chaîne en plusieurs sous-chaînes.

Exercice XXIII. *Trouver les classes de communication de la matrice de transition*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Expliquer pourquoi l'irréductibilité sera l'une des conditions nécessaires pour la convergence vers l'équilibre.

Exercice XXIV. *On considère la chaîne de Markov correspondant au diagramme suivant.*



1. *Décomposer la chaîne en classes de communication. Que peut on dire des état* 1 *et* 4 *?*
2. *Écrire la matrice de transition P de la chaîne.*
3. *Vérifier que toute mesure de probabilité λ invariante pour P s'écrit*

$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in [0,1]$.

3.5 Théorèmes de convergence

Nous cherchons le comportement limite des probabilités de transition $\mathrm{p}^{(n)}(x,y)$ quand n devient grand. Regardons un exemple pour lequel un comportement uniforme n'existe pas.

Exemple IX. *Soit P la matrice de transition donnée par*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous constatons que $P^2 = Id$, ce qui implique que $P^{2n} = Id$ et $P^{2n+1} = P$ pour tout entier naturel n. En particulier, nous avons

$$\mathrm{p}^{(2n)}(1,1) = 1 \quad \textit{et} \quad \mathrm{p}^{(2n+1)}(1,1) = 0,$$

pour tout entier naturel n. Une telle suite ne peut pas converger. C'est le fait que nous sommes face à une chaîne périodique de période 2 que la convergence n'est pas possible.

Définition 3.11. *Un état x est dit* apériodique *si* $\mathrm{p}^{(n)}(x,x) > 0$ *pour tout n assez grand.*

Lemme 3.12. *Supposons que P est une matrice de transition irréductible et possède au moins un état apériodique x. Alors, pour tous états y et z, nous avons*

$$\mathrm{p}^{(n)}(y,z) > 0,$$

pour tout n assez grand. En particulier, tous les états sont apériodiques.

Exercice XXV. *Soit P une matrice de transition possédant un état x tel que* $\mathrm{p}(x,x) > 0$. *Montrer que l'état x est apériodique.*

Théorème 3.13 (Convergence vers l'équilibre)**.** *Soit (X_n) Markov(μ, P) avec P une matrice de transition irréductible et apériodique possédant une mesure invariante π. Supposons de plus que S est fini. Alors*

$$\mathbb{P}(X_n = x) \to \pi(x) \quad \textit{quand } n \to \infty \textit{ pour tout } x,$$

et

$$\mathrm{p}^{(n)}(x,y) \to \pi(y) \quad \textit{quand } n \to \infty \textit{ pour tous } x, y.$$

Remarque 3.14. *La vitesse de convergence vers la loi stationnaire est de l'ordre de $|\zeta|^n$ où ζ est la valeur propre de P différente de 1 et de plus grand module (qui est strictement plus petit que 1).*

Exemple VII (suite). *Prenons $p = 0.7$. La matrice de transition P est irréductible et apériodique et nous avons vu que la mesure invariante de P est donné par $\pi \approx \begin{pmatrix} 0.886 & 0.114 \end{pmatrix}$. D'après le théorème 3.13, nous pouvons déduire à ce stade de réflexion que*

"Rapidement (quelques jours), la probabilité qu'une machine soit en panne chaque jour est de l'ordre de 11.4%."

Ceci ne signifie pas qu'en moyenne sur 100 *jours une machine est en panne* 11.4 *jours. Pour une telle affirmation, il est nécessaire de disposer d'une loi des grands nombres comme dans un modèle de pile ou face.*

Le théorème 2.2 est une application de la loi des grands nombres pour des variables aléatoires indépendantes.

Dans le cadre des chaînes de Markov, il existe aussi une loi des grands nombres sous réserve que la chaîne satisfasse de bonnes hypothèses. Nous omettrons leur démonstration dans ce cours.

Théorème 3.15. *Supposons que S est fini. Soit P une matrice de transition irréductible et apériodique. Alors,*
- *P possède une unique mesure de probabilité invariante λ.*
- *Pour toute fonction bornée $f : S \to \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) - \bar{f}\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty,$$

avec $\bar{f} = \sum_{x\in S} \pi(x) f(x)$.

Ainsi, en prenant la fonction f définie par

$$f(x) = \mathbb{1}_{\{1\}}(x),$$

et en appliquant le théorème 3.15, on obtient pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|R_n(1) - \pi(1)| \geqslant \varepsilon) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

où

$$R_n(1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{1\}}(X_i).$$

C'est à dire que la proportion de temps pour laquelle une machine est en panne converge en probabilité vers $\pi(1) \approx 11.4\%$.

On pourrait opposer à notre raisonnement le fait que le choix de la matrice de transition P en amont (par exemple le choix de p) rendait une telle conclusion inévitable. Ceci est juste mais si l'on fait uniquement l'hypothèse que la fiabilité des machines est Markovien d'ordre 1, alors il est possible d'estimer les paramètres de la matrice P (c'est à dire p dans l'exemple VII) grâce au théorème suivant.

Théorème 3.16. *Supposons S fini. Soit P une matrice de transition irréductible et apériodique. Supposons que (X_n) est Markov (π, P) avec π l'unique mesure de probabilité invariante de P. Alors,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_{i-1}, X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{x,y\in S} f(x,y)\pi(x)p(x,y) \quad \textit{en probabilité,}$$

pour toute fonction bornée $f : S \times S \to \mathbb{R}$.

Ainsi,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_{i-1}=x, X_i=y\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(x)p(x,y) \quad \text{en probabilité.}$$

3.6 Récurrence, transience at autres démonstrations

Nous avons vu qu'il était possible de décomposer une chaîne de Markov en différentes classes de communication pour en comprendre le comportement. Nous allons voir que certaines classes sont transitoires tandis que l'on passe infiniment souvent dans d'autres.

Définition 3.17. *Soit* (X_n) *Markov*(μ, P). *On dit qu'un état* x *est* récurrent *si*

$$\mathbb{P}_x(X_n = x, \textit{ pour une infinité de } n) = 1.$$

On dit qu'un état x *est* transient *si*

$$\mathbb{P}_x(X_n = x, \textit{ pour une infinité de } n) = 0.$$

Un état récurrent est donc un état par lequel on repasse une infinité de fois tandis qu'un état transient est un état qu'on finira par quitter pour toujours.

Soit T_x le temps de passage en x (ou de retour si l'on part de x) défini par

$$T_x = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = x\}.$$

On peut définir par récurrence les temps de passage successifs en x par

$$T_x^{(0)} = 0, \quad T_x^{(1)} = T_x,$$

et pour tout $r \geqslant 1$

$$T_x^{(r+1)} = \inf\{n \geqslant T_x^{(r)} + 1 : X_n = x\}.$$

On peut alors définir la longueur des excursions en dehors de x par

$$S_x^{(r)} = \begin{cases} T_x^{(r)} - T_x^{(r-1)} & \text{si } T_x^{(r-1)} < \infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 3.18. *Pour tout* $r \geqslant 2$, *conditionnellement à* $T_x^{(r-1)} < \infty$, $S_x^{(r)}$ *est indépendant de* $\{X_m : m \leqslant T_x^{(r-1)}\}$, *et*

$$\mathbb{P}(S_x^{(r)} = n \mid T_x^{(r-1)} < \infty) = \mathbb{P}_x(T_x = n).$$

Démonstration. Admis. □

Soit V_x le nombre de visites en x défini par

$$V_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}\{X_n = x\}.$$

On peut remarquer que l'évènement $[X_n = x,\ \text{pour une infinité de } n]$ est égal à l'évènement $[V_x = \infty]$. Ainsi un état x est récurrent si et seulement si $\mathbb{P}_x(V_x = \infty) = 1$. Or l'évènement $[V_x = \infty]$ s'écrit comme la limite de la suite d'évènements décroissants $\big([V_x > r]\big)_{r\in\mathbb{N}}$. En effet, si r est un nombre entier, on a alors $[V_x > r+1] \subset [V_x > r]$ et

$$\mathbb{P}_x(V_x = \infty) = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}_x(V_x > r).$$

La suite de cette section consiste donc à étudier la limite ci-dessus, à savoir est elle différente ou égale à 1.

Lemme 3.19. *Pour tout entier r, nous avons*

$$\mathbb{P}_x(V_x > r) = \mathbb{P}_x(T_x < \infty)^r.$$

Démonstration. Remarquons si l'on part de x, le nombre de visites en x est strictement plus grand que r si et seulement si le temps du r-ième passage en x est fini. Ainsi

$$\mathbb{P}_x(V_x > r) = \mathbb{P}_x(T_x^{(r)} < \infty).$$

On a donc en remarquant que $T_x^{(r+1)} = S_x^{(r+1)} + T_x^{(r)}$, si $T_x^{(r)} < \infty$,

$$\mathbb{P}_x(V_x > r+1) = \mathbb{P}_x(T_x^{(r+1)} < \infty) = \mathbb{P}_x(T_x^{(r)} < \infty, S_x^{(r+1)} < \infty),$$

et ainsi en utilisant le lemme 3.18

$$\mathbb{P}_x(V_x > r+1) = \mathbb{P}_x(S_x^{(r+1)} < \infty \,|\, T_x^{(r)} < \infty)\mathbb{P}_x(T_x^{(r)} < \infty) = \mathbb{P}_x(T_x < \infty)\mathbb{P}_x(T_x^{(r)} < \infty).$$

Une récurrence achève la preuve. □

On utilise dans la suite le lemme suivant

Lemme 3.20. *On a*

$$\mathbb{E}_x(V_x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{p}^{(n)}(x,x) \quad \textit{ou bien} \quad \mathbb{E}_x(V_x) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_x(V_x > r). \tag{3.2}$$

Démonstration. On a immédiatement

$$\mathbb{E}_x(V_x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x(\mathbb{1}\{X_n = x\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{p}^{(n)}(x,x).$$

L'autre formule s'obtient par un jeu de réécriture de la manière suivante

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(V_x) =&\mathbb{P}_x(V_x=1)+2\mathbb{P}_x(V_x=2)+3\mathbb{P}_x(V_x=3)+4\mathbb{P}_x(V_x=4)+\cdots\\
=&\ \ \mathbb{P}_x(V_x=1)\\
&+\mathbb{P}_x(V_x=2)+\mathbb{P}_x(V_x=2)\\
&+\mathbb{P}_x(V_x=3)+\mathbb{P}_x(V_x=3)+\mathbb{P}_x(V_x=3)\\
&+\mathbb{P}_x(V_x=4)+\mathbb{P}_x(V_x=4)+\mathbb{P}_x(V_x=4)+\mathbb{P}_x(V_x=4)\\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

Si on somme les termes de la première colonne, on obtient

$$\mathbb{P}_x(V_x=1)+\mathbb{P}_x(V_x=2)+\mathbb{P}_x(V_x=3)+\mathbb{P}_x(V_x=4)+\cdots=\mathbb{P}_x(V_x>0).$$

En sommant sur la deuxième colonne, on obtient

$$\mathbb{P}_x(V_x=2)+\mathbb{P}_x(V_x=3)+\mathbb{P}_x(V_x=4)+\cdots=\mathbb{P}_x(V_x>1).$$

On continue ainsi sur chaque colonne et on obtient bien la formule désirée. □

Théorème 3.21. *On a la dichotomie suivante*
(i) Si $\mathbb{P}_x(T_x<\infty)=1$, alors l'état x est récurrent et $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{p}^{(n)}(x,x)=\infty$.
(i) Si $\mathbb{P}_x(T_x<\infty)<1$, alors l'état x est transient et $\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{p}^{(n)}(x,x)<\infty$.
En particulier, chaque état x est soit récurrent, soit transient.

Démonstration. Supposons que $\mathbb{P}_x(T_x<\infty)=1$. On a alors

$$\mathbb{P}_x(V_x>r)=\mathbb{P}_x(T_x<\infty)^r=1,$$

pour tout $r\geqslant 0$. Ceci entraîne $\mathbb{P}_x(V_x=\infty)=1$ et donc que l'état x est récurrent.

Supposons à présent que $\mathbb{P}_x(T_x<\infty)<1$. Grâce à (3.2) et au lemme 3.19, on obtient

$$\mathbb{E}(V_x)=\sum_{r=0}^{\infty}\mathbb{P}_x(V_x>r)=\sum_{r=0}^{\infty}\mathbb{P}_x(T_x<\infty)^r=\frac{1}{1-\mathbb{P}_x(T_x<\infty)}<\infty.$$

En particulier, on a $\mathbb{P}_x(V_x=\infty)=0$. □

Théorème 3.22. *Soit C une classe de communication. Alors soit tous les état de C sont transients, soit ils sont tous récurrents.*

Démonstration. Supposons que C possède un état transient x. Soit y un autre état de C. Montrons que y est aussi transient. Comme x et y communiquent, il existe n et m tels que

$$\mathrm{p}^{(n)}(x,y)>0 \quad \text{et} \quad \mathrm{p}^{(m)}(y,x)>0.$$

Comme pour tout $r \geqslant 0$, on a

$$\mathrm{p}^{(n+r+m)}(x,x) \geqslant \mathrm{p}^{(n)}(x,y)\mathrm{p}^{(r)}(y,y)\mathrm{p}^{(m)}(y,x),$$

ce qui se réécrit

$$\mathrm{p}^{(r)}(y,y) \leqslant \frac{\mathrm{p}^{(n+r+m)}(x,x)}{\mathrm{p}^{(n)}(x,y)\mathrm{p}^{(m)}(y,x)},$$

il vient

$$\sum_{r=0}^{\infty} \mathrm{p}^{(r)}(y,y) \leqslant \frac{1}{\mathrm{p}^{(n)}(x,y)\mathrm{p}^{(m)}(y,x)} \sum_{r=0}^{\infty} \mathrm{p}^{(n+r+m)}(x,x) < \infty. \qquad \square$$

Théorème 3.23. *Toute classe de communication C finie et fermée est récurrente.*

Démonstration. Supposons que la chaîne de Markov commence en C. Comme la classe C est fermée, la chaîne reste à l'intérieur de C au cours du temps. Comme C est finie, il existe un x tel que

$$\mathbb{P}(X_n = x, \text{ pour une infinité de } n) > 0.$$

En effet, dans le cas contraire, on aurait pour chaque $x \in C$ un entier (aléatoire) n_x tel que $\mathbb{P}(X_n \neq x, \text{ pour tout } n \geqslant n_x) = 1$. Mais on aurait alors, comme C est finie, $\mathbb{P}(X_n \notin C, \text{ pour tout } n \geqslant \max_x n_x) = 1$, ce qui contredit le fait que la classe est fermée.

Comme

$$\mathbb{P}(X_n = x, \text{ pour une infinité de } n) = \mathbb{P}(T_x < \infty) \times \\ \times \mathbb{P}_x(X_n = x, \text{ pour une infinité de } n),$$

on en déduit que

$$\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ pour une infinité de } n) > 0,$$

ce qui montre que x n'est pas transient et qu'en conséquence il est récurrent. On termine en utilisant le théorème 3.22. $\square$

Théorème 3.24. *Supposons que P est irréductible et récurrente (automatique si S fini). Alors pour tout $y \in S$,*

$$\mathbb{P}(T_y < \infty) = 1.$$

Démonstration. On écrit tout d'abord

$$\mathbb{P}(T_y < \infty) = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(T_y = n) = \sum_{n \geqslant 1} \sum_{x \in S} \mathbb{P}(T_y = n, X_0 = x).$$

On utilise la propriété de Markov en conditionnant par le premier pas. :

$$\mathbb{P}(T_y = n, X_0 = x) = \mathbb{P}(X_0 = x)\mathbb{P}_x(T_y = n).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(T_y < \infty) = \sum_{n \geqslant 1} \sum_{x \in S} \mathbb{P}(X_0 = x)\mathbb{P}_x(T_y = n) = \sum_{x \in S} \mathbb{P}(X_0 = x)\mathbb{P}_x(T_y < \infty).$$

Montrons que $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 1$ pour tout $x \in S$. Comme la chaîne est irréductible, il existe un entier m tel que $\mathrm{p}^{(m)}(x, y) > 0$. Nous avons d'une part

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_y(X_n = y \text{ pour une infinité de } n) \\
=&\mathbb{P}_y(X_n = y \text{ pour une infinité de } n \geqslant m+1) \\
=&\sum_{z \in S} \mathbb{P}_y(X_n = y \text{ pour une infinité de } n \geqslant m+1 \,|\, X_m = z)\mathbb{P}_y(X_m = z) \\
=&\sum_{z \in S} \mathbb{P}_z(T_y < \infty)\mathrm{p}^{(m)}(y, z).
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\mathbb{P}_y(X_n = y \text{ pour une infinité de } n) = 1,$$

car y est un état récurrent. Ainsi

$$\sum_{z \in S} \mathbb{P}_z(T_y < \infty)\mathrm{p}^{(m)}(y, z) = 1.$$

Mais on a $\sum_{z \in S} \mathrm{p}^{(m)}(y, z) = 1$, donc pour tout z tel que $\mathrm{p}^{(m)}(y, z) > 0$, on a $\mathbb{P}_z(T_y < \infty) = 1$ sinon l'égalité n'est pas vérifiée. En particulier pour $z = x$, on obtient $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 1$. □

Démonstration du théorème 3.4. Nous allons procéder par récurrence. Soit H_n le prédicat de récurrence « pour tout $(n+1)$-uplet $x_{0:n} \in S^{n+1}$, (3.1) est vérifiée ».

Par définition de la loi initiale μ, nous avons $\mathbb{P}(X_0 = x_0) = \mu(x_0)$ pour tout $x_0 \in S$. Ainsi H_0 est vrai.

À présent, fixons $n \geqslant 0$ et supposons que H_n est vrai. Nous montrons que H_{n+1} est vraie. Soit $x_{0:n+1} \in S^{n+2}$. En remarquant que $[X_{0:n+1} = x_{0:n+1}] \subset [X_{0:n} = x_{0:n}]$ et en conditionnant par rapport à la trajectoire de la chaîne jusqu'au temps n, nous obtenons

$$\mathbb{P}(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_{0:n} = x_{0:n})\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}).$$

En utilisant la propriété de Markov, il vient

$$\mathbb{P}(X_{0:n+1} = x_{0:n+1}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n)\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}).$$

Comme H_n est vrai, on a

$$\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) = \mu(x_0)\mathrm{p}(x_0, x_1)p(x_1, x_2)\ldots\mathrm{p}(x_{n-1}, x_n),$$

ce qui, combiné à $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n) = \mathrm{p}(x_n, x_{n+1})$, permet de conclure que H_{n+1} est vraie. □

Démonstration de la proposition 3.5. Une fois encore, nous allons procéder par récurrence. Pour tout entier n, on note $\mu^{(n)}$ la loi de probabilité de X_n, c'est à dire que pour tout x, on a $\mu^{(n)}(x) = \mathbb{P}(X_n = x)$. Soit H_n le prédicat de récurrence « pour tout $x \in S$, $\mu^{(n)}(x) = (\mu P^n)(x)$ ».

Comme P^0 est égale à l'identité, nous avons

$$(\mu P^0)(x) = \mu(x) = \mu^{(0)}(x), \quad \forall x \in S.$$

Ainsi, H_0 est vrai. À présent, fixons $n \geqslant 0$, supposons que H_n est vrai et montrons que H_{n+1} est vrai. Il vient

$$\mu^{(n+1)}(x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x) = \sum_y \mathbb{P}(X_{n+1} = x \,|\, X_n = y)\mathbb{P}(X_n = y) = \sum_y \mathrm{p}(y,x)\mu^{(n)}(y).$$

Comme H_n est vrai, nous avons $\mu^{(n)}(x) = (\mu P^n)(x)$ pour tout $y \in S$ et ainsi

$$\mu^{(n+1)}(x) = \sum_y \mathrm{p}(y,x)(\mu P^n)(x) = \sum_y (\mu P^n)(x)\mathrm{p}(y,x) = (\mu P^{n+1})(x).$$

Ceci permet de conclure que H_{n+1} est vraie. □

Démonstration du lemme 3.12. Comme la chaîne est irréductible, y mène à x et x mène à z. Il existe donc des entiers r et s tels que

$$\mathrm{p}^{(r)}(y,x) > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{p}^{(s)}(x,z) > 0.$$

En d'autres termes il existe un chemin menant de y à x et un chemin menant de x à z. Comme l'état x est apériodique, quand n est assez grand, on a

$$\mathrm{p}^{(n)}(x,x) > 0.$$

En d'autres termes, il existe une boucle de longueur n partant de x. En mettant bout à bout le chemin menant de y à x, la boucle partant de x et le chemin de x à z, on construit un chemin de longueur $r+n+s$ menant de y à z. C'est à dire

$$\mathrm{p}^{(r+n+s)}(y,z) \geqslant \mathrm{p}^{(r)}(y,x)\mathrm{p}^{(n)}(x,x)\mathrm{p}^{(s)}(x,z) > 0.$$ □

Démonstration du théorème 3.8. On remarque que

$$\mathrm{p}^{(n)}(x,y) \leqslant \mathbb{P}_x(X_n = y \text{ pour au moins un } n \geqslant 0) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \mathrm{p}^{(n)}(x,y)$$

et que

$$\mathrm{p}^{(n)}(x,y) = \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}} \mathrm{p}(x,x_1)\mathrm{p}(x_1,x_2)\ldots\mathrm{p}(x_{n-1},y).$$ □

Démonstration du théorème 3.13. Nous allons utiliser une technique de couplage pour la démonstration. Soit (Y_n) Markov(π, P) indépendante de (X_n). Fixons un état b dans S et considérons le temps de couplage T défini par

$$T = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = Y_n = b\}.$$

Le temps T correspond au premier temps de rencontre en b des deux chaînes. Montrons que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

Considérons la nouvelle chaîne de Markov (W_n) à valeurs dans $S \times S$ et définie par $W_n = (X_n, Y_n)$. On peut exprimer la matrice de transition $\tilde{P}$ de (W_n) en fonction de P de la manière suivante

$$\tilde{\mathrm{p}}\big((x,u),(y,v)\big) = \mathrm{p}(x,y) \cdot \mathrm{p}(u,v).$$

La loi initiale μ de (W_n) est quant à elle donnée par

$$\mu(x,u) = \mathbb{P}(W_0 = (x,u)) = \mathbb{P}(X_0 = x, Y_0 = u) = \lambda(x) \cdot \pi(u).$$

Montrons que $\tilde{P}$ est irréductible. Soient (x,u) et (y,v) deux états de $S \times S$. On peut voir que

$$\tilde{\mathrm{p}}^{(n)}\big((x,u),(y,v)\big) = \mathrm{p}^{(n)}(x,y) \cdot \mathrm{p}^{n}(u,v).$$

Or comme P est apériodique et irréductible, on sait d'après le lemme 3.12 qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$

$$\mathrm{p}^{(n)}(x,y) > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{p}^{n}(u,v) > 0.$$

Ainsi, $\tilde{P}$ est également irréductible (et apériodique) sur l'espace d'états $S \times S$ qui est fini. D'après le théorème 3.24, tous les états sont récurrents pour la chaîne (W_n), en particulier l'état (b,b). On a donc $\mathbb{P}(T_{(b,b)} < \infty) = 1 = \mathbb{P}(T < \infty)$.

Définissons le processus (Z_n) par

$$Z_n = \begin{cases} X_n & \text{si } n < T, \\ Y_n & \text{si } n \geqslant T. \end{cases}$$

Nous admettons que le processus (Z_n) est aussi Markov(λ, P). Il vient alors

$$\mathbb{P}(Z_n = x) = \mathbb{P}(X_n = x, n < T) + \mathbb{P}(Y_n = x, n \geqslant T),$$

et donc en remarquand que Z_n a la même loi que X_n et que Y_n est distribuée suivant la mesure invariante π

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(X_n = x) - \pi(x)| &= |\mathbb{P}(Z_n = x) - \mathbb{P}(Y_n = x)| \\ &= |\mathbb{P}(X_n = x, n < T) + \mathbb{P}(Y_n = x, n \geqslant T) - \mathbb{P}(Y_n = x)| \\ &= |\mathbb{P}(X_n = x, n < T) - \mathbb{P}(Y_n = x, n < T)| \\ &\leqslant \max\{\mathbb{P}(X_n = x, n < T), \mathbb{P}(Y_n = x, n < T)\} \\ &\leqslant \mathbb{P}(n < T). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, il vient $\mathbb{P}(n < T) \to 0$ quand n tend vers l'infini, ce qui achève la preuve. $\square$

3.7 Tp n° 3 chaînes de Markov

Le modèle de **Wright-Fisher** est le modèle le plus célèbre (et le plus simple) de l'évolution de la fréquence d'un gène à deux allèles dans une population finie. On suppose que la population est de taille constante, que les générations ne se recouvrent pas et que les unions sont indépendantes du caractère étudié.

3.7.1 Le modèle simple de Wright-Fisher

On néglige dans un premier temps les phénomènes de mutation et sélection. On note $2N$ la taille de la population et $n = 0, 1, 2, \dots$ les générations successives. Sur le locus étudié, on peut trouver deux allèles différents notés A et B. La variable aléatoire X_n compte le nombre d'allèles A à la génération n.

Chaque individu de la génération $n+1$ pioche un allèle au hasard parmi les $2N$ de la génération n, s'attribue son type puis le remet dans le pool d'allèles.

La population à la génération $n+1$ est donc déduite de celle de la génération n par un tirage binomial avec remise de $2N$ gènes dont la proportion d'allèles A est $\frac{X_n}{2N}$.

1. Quelle est la loi du nombre d'allèles A dans la génération $n+1$ en fonction du nombre d'allèles A dans la génération n ? Expliciter les probabilités de transition $\mathrm{p}(i, j) := \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$.
2. Écrire un script qui prend en entrée une taille de population $2N$, un nombre initial $x \in \{0, \dots, 2N\}$ d'allèles A et un temps $t \in \mathbb{N}$ et qui fait évoluer le nombre d'allèles d'allèles A jusqu'à la génération t suivant le modèle simple de Wright-Fisher.
3. Représenter plusieurs trajectoires de cette chaîne de Markov pour $N = 5, 10, 30$. Que se passe-t-il quand la chaîne atteint 0 ou $2N$?
4. Donner une procédure pour estimer la probabilité que la chaîne soit absorbée en $2N$ en fonction du point de départ x.
5. Une conjecture pour l'expression théorique ?

3.7.2 Prise en compte des mutations

Supposons en plus des hypothèses du modèle basique précédent que l'allèle A mute en allèle B avec probabilité $u \in (0, 1)$ et que l'allèle B mute en A avec probabilité $v \in (0, 1)$.

1. Si le nombre d'allèles A à la génération n est i, combien d'allèles de type A sont disponibles après mutations ?
2. Expliciter les nouvelles probabilités de transition de la chaîne.

3. Quel changement s'est il produit par rapport à la chaîne précédente ?
4. À l'aide du logiciel `R`, calculer la mesure de probabilité invariante π de la chaîne pour $N = 10$ et différents paramètres u et v.
5. À partir de quelle valeur de N, le logiciel ne parvient plus à calculer π ?

Annexe A

Corrigés des exercices

Exercice I

1. L'espace d'états Ω associé à cette expérience est donné par

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leqslant x \leqslant 6, 1 \leqslant y \leqslant 6\}.$$

   Son cardinal est de $6 \times 6 = 36$.

2. La variable aléatoire X est à valeurs dans l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{N} : 2 \leqslant x \leqslant 12\}.$$

   Pour déterminer la loi de X nous allons représenter les valeurs de X en fonction des valeurs des deux dés.

		Dé 2					
		1	2	3	4	5	6
Dé 1	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

   On obtient alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=12) = 1/36, \quad \mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(X=11) = 1/18,\\
&\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(X=10) = 1/12, \quad \mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}(X=9) = 1/9,\\
&\mathbb{P}(X=6) = \mathbb{P}(X=8) = 5/36, \quad \mathbb{P}(X=7) = 1/6.
\end{aligned}$$

Exercice II Soit X une variable aléatoire discrète telle que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ existent. Notons $\mu = \mathbb{E}(X)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= \mathbb{E}\big[\big(X-\mu\big)^2\big] \\
&= \sum_i \big(x_i-\mu\big)^2 \cdot \mathbb{P}(X=x_i) \\
&= \sum_i \big(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2\big) \cdot \mathbb{P}(X=x_i) \\
&= \sum_i x_i^2 \cdot \mathbb{P}(X=x_i) - 2\mu \sum_i x_i \cdot \mathbb{P}(X=x_i) + \mu^2 \cdot \sum_i \mathbb{P}(X=x_i) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu \cdot \mu + 2\mu^2 \cdot 1 \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mu^2.
\end{aligned}$$

On a bien $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.

Exercice III

1. La variable aléatoire X suit bien une loi de Bernoulli puisque ses valeurs possibles sont 0 et 1. Son paramètre est $1/2$ puisque la pièce étant équilibrée, il y a autant de chance d'obtenir pile que d'obtenir face.

2. Là encore, la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli puisque ses valeurs possibles sont 0 et 1. Son paramètre est $1/3$. En effet, le dé étant non pipé, chaque face a la même chance d'être obtenue lors du lancer et l'obtention d'un 5 ou d'un 6, chacun ayant lieu avec probabilité $1/6$, attibue la valeur 1 à Y.

3. Cette fois, la variable aléatoire Z ne suit pas une loi de Bernoull puisqu'elle peut prendre des valeurs différentes de 0 et 1. En effet, dans le cas où l'étudiant répond juste aux trois questions, ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, la variable aléatoire Z vaut 3.

4. Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p. Il vient alors

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X=1) = p, \quad \mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(X=1) = p,$$

   et finalement

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Exercice IV

1. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha} \cdot \mathrm{e}^{\alpha} \qquad \text{(en utilisant la formule donnée)} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \mathrm{e}^{-\alpha} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{\alpha^n}{n!} \qquad \text{(quand } n=0\text{, le terme correspondant est nul)} \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{(n-1)!} \qquad \text{(en utilisant } n/n! = 1/(n-1)!\text{)} \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{(en mettant } \alpha \text{ en facteur)} \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \qquad \text{(en décalant l'indice de la somme)} \\
&= \mathrm{e}^{-\alpha} \cdot \alpha \cdot \mathrm{e}^{\alpha} \qquad \text{(en utilisant la formule donnée)} \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

3. On vient de voir que l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre α est donnée par α. Ainsi, si l'on modélise le nombre de substitutions que subit un site pendant un temps t par une loi de Poisson de paramètre λt, le nombre moyen de substitutions que subit le site pendant le temps t est alors de λt. Le taux moyen de de substitution par unité de temps est alors donné par $\lambda t / t = \lambda$, ce qui justifie l'appellation de λ.

Exercice V Reprenons le tableau de l'exercice I mais en incorporant l'information « le résultat du dé rouge est 6 ».

		Dé bleu					
		1	2	3	4	5	6
Dé rouge	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

On constate que les valeurs possibles de la somme des deux dés vont à présent de 7 à 12, et non plus de 2 à 12 sans information. Le nombre d'issues favorables à l'évènement « la somme est supérieure ou égale à 10 » dans cette nouvelle configuration est de 3 tandis que le nombre d'issues possibles est de 6. On obtient bien une probabilité de 1/2.

En revanche, si l'on reprend le tableau de l'exercice I mais en incorporant l'information « le résultat du dé rouge est 2 », on obtient

		Dé bleu					
		1	2	3	4	5	6
Dé rouge	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

et on constate que les valeurs possibles de la somme des deux dés vont à présent de 3 à 8. Le nombre d'issues favorables à l'évènement « la somme est supérieure ou égale à 10 » dans cette nouvelle configuration est de 0 tandis que le nombre d'issues possibles est de 6. On obtient bien une probabilité de 0.

Remarquons que si on incorpore l'information « le résultat d'un des dés vaut 6 » dans le tableau, on obtient

		Dé bleu					
		1	2	3	4	5	6
Dé rouge	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Le nombre d'issues favorables à l'évènement « la somme est supérieure ou égale à 10 » dans cette nouvelle configuration est de 5 tandis que le nombre d'issues possibles est de 11. On obtient alors une probabilité de 5/11.

Exercice VI

1. Puisque X et Y sont à valeurs dans $\{-1,1\}$, leur produit est également à valeurs dans $\{-1,1\}$. Les valeurs possibles de Z sont donc -1 et 1.

2. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=1) &= \mathbb{P}\big([X=1, Y=1] \text{ ou } [X=-1, Y=-1]\big) \\
&= \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=-1, Y=-1) \qquad \text{(évènements disjoints)} \\
&= \mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=-1)\cdot\mathbb{P}(Y=-1) \qquad (X \text{ et } Y \text{ ind.}) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=1) &= \mathbb{P}\big([X=1, Y=-1] \text{ ou } [X=-1, Y=1]\big) \\
&= \mathbb{P}(X=1, Y=-1) + \mathbb{P}(X=-1, Y=1) \qquad \text{(évènements disjoints)} \\
&= \mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(Y=-1) + \mathbb{P}(X=-1)\cdot\mathbb{P}(Y=1) \qquad (X \text{ et } Y \text{ ind.}) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3. Montrons que X et Z sont indépendantes. Pour cela, nous devons montrer que pour toutes valeurs admissibles x et z pour X et Z, nous avons

$$\mathbb{P}(X=x, Z=z) = \mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Z=z). \tag{A.1}$$

Puisque X et Z ont chacune deux valeurs possibles, nous devons vérifier quatre égalités. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1, Z=1) &= \mathbb{P}(X=1, XY=1) \\
&= \mathbb{P}(X=1, Y=1) \\
&= \mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(Y=1) \qquad (X \text{ et } Y \text{ ind.}) \\
&= \frac{1}{4} \\
&= \mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(Z=1),
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=-1, Z=1) &= \mathbb{P}(X=-1, XY=1) \\
&= \mathbb{P}(X=-1, Y=-1) \\
&= \mathbb{P}(X=-1)\cdot\mathbb{P}(Y=-1) \qquad (X \text{ et } Y \text{ ind.}) \\
&= \frac{1}{4} \\
&= \mathbb{P}(X=-1)\cdot\mathbb{P}(Z=1),
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1, Z=-1) &= \mathbb{P}(X=1, XY=-1)\\
&= \mathbb{P}(X=1, Y=-1)\\
&= \mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(Y=-1) \qquad (X \text{ et } Y \text{ ind.})\\
&= \frac{1}{4}\\
&= \mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(Z=-1),
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=-1, Z=-1) &= \mathbb{P}(X=-1, XY=-1)\\
&= \mathbb{P}(X=-1, Y=1)\\
&= \mathbb{P}(X=-1)\cdot\mathbb{P}(Y=1) \qquad (X \text{ et } Y \text{ ind.})\\
&= \frac{1}{4}\\
&= \mathbb{P}(X=-1)\cdot\mathbb{P}(Z=-1).
\end{aligned}$$

Ainsi l'égalité (A.1) est vérifiée pour toutes valeurs admissibles x et z pour X et Z.

Le rôle de X et Y étant symétriques, on en déduit immédiatement que Y et Z sont indépendantes.

4. Intuitivement, on sent que X, Y et Z ne sont pas indépendantes puisque Z est complètement déterminé par X et Y. Pour le montrer rigoureusement, il suffit d'exhiber trois valeurs admissibles x, y et z de X, Y et Z telles que

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y, Z=z) \neq \mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y)\cdot\mathbb{P}(Z=z).$$

Prenons $x=1$, $y=1$ et $z=-1$. Les évènements $[X=1, Y=1]$ et $[Z=-1]$ sont incompatibles, on a alors $\mathbb{P}(X=1, Y=1, Z=-1)=0$. En revanche, on a $\mathbb{P}(X=1)\cdot\mathbb{P}(Y=1)\cdot\mathbb{P}(Z=-1)=\frac{1}{8}$.

Exercice VII Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω. On suppose que la variable aléatoire X prend n valeurs notées $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et que la variable aléatoire Y en prend m notées $\{y_1, \ldots, y_m\}$. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = X + Y$.

1. L'ensemble des valeurs possibles pour le couple (X, Y) est

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \times \{y_1, \ldots, y_m\}.$$

La variable aléatoire Z étant une fonction du couple (X, Y), elle ne peut pas prendre plus de valeurs différentes que le nombre de couples possibles. On en déduit donc que Z prend au plus $n \times m$ valeurs.

2. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 0 et 1 avec équiprobabilité et Y une variable aléatoire indépendante de X prenant les valeurs 0 et 2 avec équiprobabilité. On peut voir les valeurs de Z dans le tableau suivant

		Y	
		0	2
X	0	0	2
	1	1	3

   On peut voir que Z prend 4 valeurs différentes ce qui est exactement le cardinal de l'ensemble des valeurs possibles pour le couple (X, Y).

   Dans l'exercice I, on a un cas où Z prend 11 valeurs différentes tandis que le cardinal de l'ensemble des valeurs possibles pour le couple (X, Y) est 36.

3. On note $\{z_1, \ldots, z_r\}$ l'ensemble des valeurs prises par Z et pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant r$, on note I_k l'ensemble défini par

$$I_k = \big\{(i, j) : x_i + y_j = z_k\big\}.$$

   (a) Dans le cas où X et Y sont chacun le résultat d'un lancer de dé à six faces, nous avons $r = 11$ et $I_k = \big\{(i, j) : x_i + y_j = k+1\big\}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{(1,1)\},\\
I_2 &= \{(1,2),(2,1)\},\\
I_3 &= \{(1,3),(2,2),(3,1)\},\\
I_4 &= \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\},\\
I_5 &= \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\},\\
I_6 &= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},\\
I_7 &= \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\},\\
I_8 &= \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\},\\
I_9 &= \{(4,6),(5,5),(6,4)\},\\
I_{10} &= \{(5,6),(6,5)\},\\
I_{11} &= \{(6,6)\}.
\end{aligned}$$

   (b) L'évènement $[Z = z_k]$ s'écrit $[X + Y \in I_k]$.

(c) Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=1}^{r} z_k \cdot \mathbb{P}(Z = z_k) \\
&= \sum_{k=1}^{r} z_k \cdot \mathbb{P}(X + Y \in I_k) \\
&= \sum_{k=1}^{r} z_k \sum_{(i,j)\in I_k} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{(i,j)\in I_k} z_k \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{(i,j)\in I_k} (x_i + y_j)\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \qquad \text{(par définition de } I_k\text{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) \cdot \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j),
\end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que les (I_k) forment une partition des couples d'entiers.

(d) Nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = y_i).$$

(e) Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_j) \cdot \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) + \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) + \sum_{i=1}^{n} y_j \cdot \mathbb{P}(Y = y_j) \\
&= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).
\end{aligned}$$

Exercice VIII Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_2 = X_1 + X_2$.

1. En remarquant que les trois valeurs possibles de S_2 sont 0, 1 ou 2, et en utilisant l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2, il vient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0) = (1-p)^2, \\
&\mathbb{P}(S_2 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1) = p^2, \\
&\mathbb{P}(S_2 = 1) = 1 - \mathbb{P}(S_2 = 0) - \mathbb{P}(S_2 = 2) = 2p(1-p).
\end{aligned}$$

2. Nous avons
$$\mathbb{E}(S_2) = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 2p,$$
et comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_2) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_2) = 2p(1-p).$$

3. Faisons un tableau donnant les valeurs de S_2 en fonction de X_1 et X_2.

		X_2	
		0	1
X_1	0	0	1
	1	1	2

À présent incorporons l'information $X_1 = 1$, il vient

		X_2	
		0	1
X_1	0	0	1
	1	1	2

On constate donc que S_2 ne prend plus que les valeurs 1 et 2 et que

$\mathbb{P}(S_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 0) = 1-p$ et $\mathbb{P}(S_2 = 2 \mid X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1) = p.$

Rigoureusement, on peut utiliser la formule de conditionnement qui donne
$$\mathbb{P}(S_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}(S_2 = 1, X_1 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 = 1)} = \frac{\mathbb{P}(X_2 = 0, X_1 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 = 1)} = \mathbb{P}(X_2 = 0),$$
la dernière égalité provenant du fait que X_1 et X_2 sont indépendantes. On peut faire la même chose pour $\mathbb{P}(S_2 = 2 \mid X_1 = 1)$.

Exercice IX Au jeu des petits chevaux, il faut obtenir un 6 lors d'un lancer de dé pour pouvoir sortir un cheval de son enclos. On s'interroge sur le nombre moyen de lancers nécessaires afin de sortir un cheval de son enclos. Soit T le nombre de lancers nécessaires.

1. Les valeurs possibles de T sont tous les entiers non nuls.
2. Pour tout entier n, on définit X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un 6 au n-ième lancer et 0 sinon. On suppose que les lancers sont indépendants ce qui rend les variables aléatoires (X_n) indépendantes.
Il vient alors
$$[T = 1] = [X_1 = 1],$$
et pour tout entier $n \geqslant 2$,
$$[T = n] = [X_1 = 0, X_2 = 0, \dots X_{n-1} = 0, X_n = 1].$$

3. Nous avons

$$\mathbb{P}(T=1)=\mathbb{P}(X_1=1)=1/6,$$

et pour tout entier $n \geqslant 2$, en utilisant l'indépendance des (X_n), il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=n) &= \mathbb{P}(X_1=0, X_2=0, \dots X_{n-1}=0, X_n=1) \\ &= \mathbb{P}(X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_2=0)\cdots\mathbb{P}(X_{n-1}=0)\cdot\mathbb{P}(X_n=1) \\ &= (5/6)^{n-1}\cdot 1/6.\end{aligned}$$

On constate que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(T=n)=(5/6)^{n-1}\cdot 1/6.$$

4. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot\mathbb{P}(T=n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot(5/6)^{n-1}\cdot 1/6 \\ &= 1/6\cdot\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot(5/6)^{n-1} \\ &= 1/6\cdot\frac{1}{(1-5/6)^2} \\ &= 6.\end{aligned}$$

Exercice X On considère un casino pas tout à fait honnête avec les joueurs qui s'y rendent et qui met à disposition de ses clients deux sortes de dés. Parmi les dés, 99% sont équilibrés mais 1% d'entre eux sont pipés de telle sorte que l'on obtienne un 6 une fois sur deux.

On choisit au hasard un dé D sur une table et on note X le résultat que l'on obtient en le lançant.

1. Nous avons $\mathbb{P}(X=6\,|\,D=d_{\text{equ}})=1/6$ et $\mathbb{P}(X=6\,|\,D=d_{\text{pip}})=1/2$.
2. En utilisant la formule du conditionnement, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=6, D=d_{\text{equ}}) &= \mathbb{P}(X=6\,|\,D=d_{\text{equ}})\cdot\mathbb{P}(D=d_{\text{equ}}) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{99}{100}=33/200=16.5\%.\end{aligned}$$

3. Toujours en utilisant la formule du conditionnement, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=6, D=d_{\text{pip}}) &= \mathbb{P}(X=6\,|\,D=d_{\text{pip}})\cdot\mathbb{P}(D=d_{\text{pip}}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}=1/200=0.5\%.\end{aligned}$$

Ainsi, nous en déduisons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=6) &= \mathbb{P}(X=6, D=d_{\text{equ}}) + \mathbb{P}(X=6, D=d_{\text{pip}}) \\ &= 16.5\% + 0.5\% = 17\%.\end{aligned}$$

4. Notons A l'évènement « obtenir trois 6 lors de trois lancers ». Sachant que A est réalisé nous cherchons la probabilité d'avoir choisi un dé pipé, c'est à dire $\mathbb{P}(D=d_{\text{pip}}|A)$. En utilisant la formule du conditionnement, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D=d_{\text{pip}}|A) &= \frac{\mathbb{P}(D=d_{\text{pip}}, A)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A\,|\,D=d_{\text{pip}})\cdot\mathbb{P}(D=d_{\text{pip}})}{\mathbb{P}(A)}.\end{aligned}$$

Pour répondre à la question, il suffit donc de calculer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A\,|\,D=d_{\text{pip}})$. Nous avons

$$\mathbb{P}(A\,|\,D=d_{\text{pip}}) = (1/2)^3 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A\,|\,D=d_{\text{equ}}) = (1/6)^3.$$

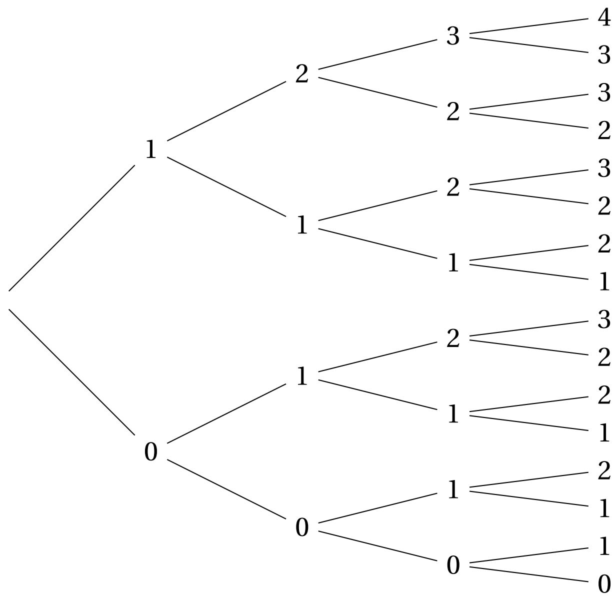
En utilisant la formule des probabilités totales, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A\,|\,D=d_{\text{pip}})\cdot\mathbb{P}(D=d_{\text{pip}}) + \mathbb{P}(A\,|\,D=d_{\text{equ}})\cdot\mathbb{P}(D=d_{\text{equ}}) \\ &= \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{6^3}\cdot\frac{99}{100}.\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D=d_{\text{pip}}|A) &= \frac{\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{100}}{\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{100}+\frac{1}{6^3}\cdot\frac{99}{100}} \\ &= \frac{\frac{1}{2^3}}{\frac{1}{2^3}+\frac{99}{6^3}} \\ &= \frac{1}{1+\frac{99}{3^3}} \\ &= \frac{1}{1+\frac{11}{3}} \\ &= \frac{3}{3+11} \\ &= \frac{3}{14} \approx 21.4\%.\end{aligned}$$

Exercice XI Voici la représentation de l'expérience à l'aide d'un arbre. Une montée dans l'arbre correspond à une bonne réponse de l'étudiant, tandis qu'une descente correspond à une mauvais réponse. Les nombres affichés indiquent le nombre de bonnes réponses du candidat au fur et à mesure du questionnaire.

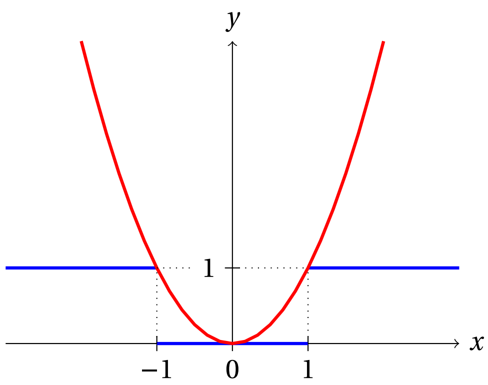


Tous les chemins de l'arbre sont équiprobables, et pour déterminer la loi de X, il suffit de compter la proportion de chemins qui réalisent le nombre de réponses examiné. Ainsi, on voit que
– un chemin mène à 0 ;
– quatre chemins mènent à 1 ;
– six chemins mènent à 2 ;
– quatre chemins mènent à 3 ;
– un chemin mène à 4.
Nous avons donc

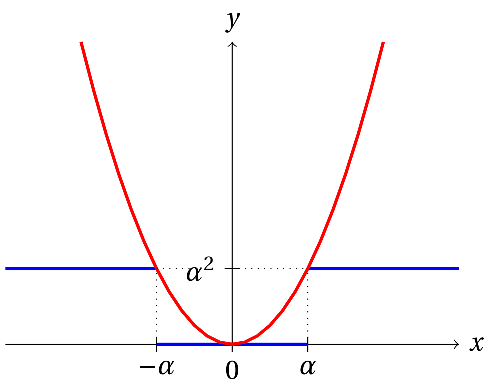
$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=4)=\frac{1}{16}, \quad \mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X=2)=\frac{3}{8}.$$

Exercice XII

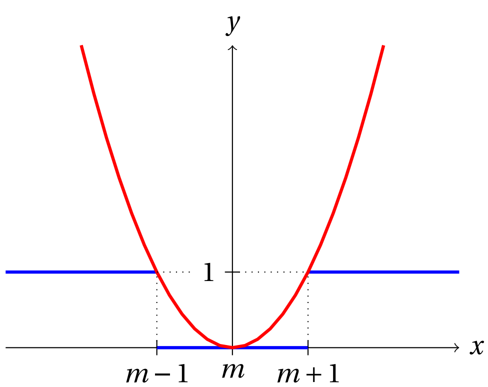
1. La courbe de la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{A_0^1}(x)$ est représentée en rouge, celle de la fonction $x \mapsto x^2$ en bleu.



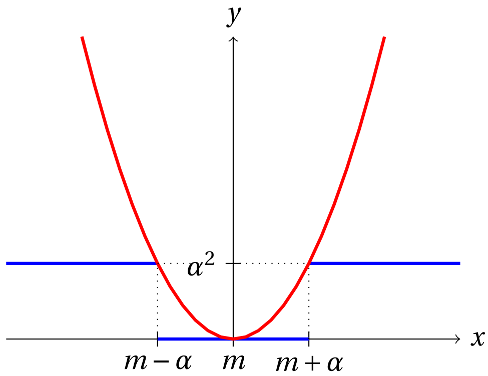
2. La courbe de la fonction $x \mapsto \alpha^2 \cdot \mathbb{1}_{A_0^\alpha}(x)$ est représentée en rouge, celle de la fonction $x \mapsto x^2$ en bleu.



3. La courbe de la fonction $x \mapsto \mathbb{1}_{A_m^1}(x)$ est représentée en rouge, celle de la fonction $x \mapsto (x-m)^2$ en bleu.



4. La courbe de la fonction $x \mapsto \alpha^2 \cdot \mathbb{1}_{A_m^\alpha}(x)$ est représentée en rouge, celle de la fonction $x \mapsto (x-m)^2$ en bleu.



5. Soit x un nombre réel. Si x n'appartient pas à l'ensemble A_m^α, nous avons $\mathbb{1}_{A_m^\alpha}(x) = 0$. Or $(x-m)^2/\alpha^2 \geqslant 0$, donc l'inégalité est vraie. Si x appartient à l'ensemble A_m^α, nous avons d'une part $\mathbb{1}_{A_m^\alpha}(x) = 1$, et d'autre part $|x-m| \geqslant \alpha$ qui implique $(x-m)^2 \geqslant \alpha^2$. Là encore l'inégalité est bien vérifiée.

Exercice XIII

1. Tout d'abord, on remarque que $\mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, pour tout entier k. Il vient alors
$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^n X_k\Big) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = n\mathbb{E}(X_1) = 0.$$
D'autre part, nous avons $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k) = \mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k)^2 = 1$, pour tout entier k. Puisque les variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes, nous avons
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\Big(\sum_{k=1}^n X_k\Big) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_k) = n\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = n.$$
2. Nous avons
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\Big(\frac{S_n}{n}\Big) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}(S_n) = \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous en déduisons que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

Exercice XIV

1. L'évènement A_k défini comme « la boîte k est vide » peut se réécrire « aucun bonbon n'a été placé dans la boîte k », ce qui signifie que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le i-ième bonbon n'est pas placé dans la boîte k. Ainsi
$$A_k = [X_1 \neq k, X_2 \neq k, \ldots, X_n \neq k].$$
2. Puisque les variables aléatoires $(X_i)_{i=1}^n$ sont indépendantes, nous avons
$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(X_1 \neq k) \times \mathbb{P}(X_2 \neq k) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \neq k).$$

Les variables aléatoires $(X_i)_{i=1}^n$ étant équidistribuées suivant la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$, on a donc

$$\mathbb{P}(X_i \neq k) = 1 - \frac{1}{n}, \quad \text{pour tout } i \in \{1,\dots,n\}.$$

Finalement, on a donc

$$\mathbb{P}(A_k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

On peut voir en particulier que ceci ne dépend pas de k, ce qui est logique au vu de l'expérience, le numéro de la boîte n'influe pas sur le fait qu'elle soit vide ou non.

3. En raisonnant avec les mains, on devine que les évènements $(A_k)_{k=1}^n$ ne sont pas indépendants. En effet, dire que des évènements sont indépendants signifie que la ou les réalisations d'un ou plusieurs d'entre eux n'influe pas la réalisation des autres. Ce n'est bien évidemment pas le cas ici puisque si une ou plusieurs boîtes sont vides, il y a de fortes chances pour que les autres boîtes ne le soient pas.

   Pour démontrer rigoureusement que les évènements $(A_k)_{k=1}^n$ ne sont pas indépendants, nous allons nous appuyer sur ce que l'intuition nous dicte et considérer le cas extrême où »toutes les boîtes sont vides ». Cet évènement est incompatible avec l'expérience puisqu'au moins un bonbon est placée dans une des boîtes. Mais cet évènement s'écrit $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. On a alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = 0.$$

   En revanche, on a vu que pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$

$$\mathbb{P}(A_k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n > 0.$$

   Le produit $\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n)$ est donc strictement positif. Ainsi

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n),$$

   ce qui prouve que les évènements $(A_k)_{k=1}^n$ ne sont pas indépendants.

4. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, la variable aléatoire Y_k suit une loi de Bernoulli avec probabilité de succès $\mathbb{P}(A_k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. En effet, Y_k vaut 1 si A_k est réalisé et 0 sinon.

5. Puisque les les évènements $(A_k)_{k=1}^n$ ne sont pas indépendants, il en va de même des variables aléatoires $(Y_k)_{k=1}^n$. Si cela n'est pas convaincant, en remarquant que

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1, Y_2 = 1, \dots, Y_n = 1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = 0,$$

   et que

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) \times \mathbb{P}(Y_2 = 1) \times \cdots \times \mathbb{P}(Y_n = 1)\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_n),$$

   vous devriez à présent être convaincu.

6. En remarquant que Y_k vaut 1 si la boîte k est vide et 0 sinon, et que N_n compte le nombre de boîtes vides, nous avons

$$N_n = Y_1 + \cdots + Y_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

7. En utilisant la linéarité de l'espérance, il vient

$$\mathbb{E}(N_n) = \mathbb{E}(Y_1 + \cdots + Y_n) = \mathbb{E}(Y_1) + \cdots + \mathbb{E}(Y_n) = n \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Puisque les variables aléatoires $(Y_k)_{k=1}^n$ ne sont pas indépendantes, nous ne pouvons pas faire la même chose pour le calcul de la variance de N_n.

8. (a) Pour « deviner » le développement de N_n^2 en fonction de $(Y_k)_{k=1}^n$, on commence par le faire pour les petites valeurs de n. Ainsi

$$N_2^2 = (Y_1 + Y_2)^2 = Y_1^2 + 2 \cdot Y_1 \cdot Y_2 + Y_2^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + 2 \cdot Y_1 \cdot Y_2,$$

et

$$\begin{aligned} N_3^2 &= (Y_1 + Y_2 + Y_3)^2 \\ &= [(Y_1 + Y_2) + Y_3]^2 \\ &= (Y_1 + Y_2)^2 + 2 \cdot (Y_1 + Y_2) \cdot Y_3 + Y_3^2 \\ &= Y_1^2 + Y_2^2 + 2 \cdot Y_1 \cdot Y_2 + 2 \cdot Y_1 \cdot Y_3 + 2 \cdot Y_2 \cdot Y_3 + Y_3^2 \\ &= Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + 2(Y_1 \cdot Y_2 + Y_1 \cdot Y_3 + Y_2 \cdot Y_3). \end{aligned}$$

(b) On peut montrer par récurrence que

$$N_n^2 = \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 + 2 \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} Y_k \cdot Y_\ell.$$

Notons que

$$2 \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} Y_k \cdot Y_\ell = \sum_{1 \leqslant k \neq \ell \leqslant n} Y_k \cdot Y_\ell$$

(c) Soient k et ℓ deux entiers distincts dans $\{1, \ldots, n\}$. La variable aléatoire $Y_k Y_\ell$ vaut 1 si Y_k et Y_ℓ valent 1, c'est à dire si la boîte k et la boîte ℓ sont vides, et 0 sinon. Elle suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A_k \cap A_\ell)$ donné par

$$\mathbb{P}(A_k \cap A_l) = \mathbb{P}(X_1 \notin \{k, \ell\}) \times \mathbb{P}(X_2 \notin \{k, \ell\}) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \notin \{k, \ell\}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(Y_k \cdot Y_\ell) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

(d) Il y a $n(n-1)$ différents couples d'entiers (k,ℓ) distincts dans $\{1,\ldots,n\}$. En effet, k peut prendre toutes les valeurs comprises entre 1 et n, puis une fois que k est fixé, ℓ peut prendre $n-1$ valeurs.

(e) En utilisant la linéarité de l'espérance, nous avons

$$\mathbb{E}\big(N_n^2\big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(Y_k^2\big) + \sum_{1\leqslant k\neq \ell\leqslant n} \mathbb{E}\big(Y_k \cdot Y_\ell\big).$$

D'après ce qui précède, la somme $\sum_{1\leqslant k\neq\ell\leqslant n}\mathbb{E}(Y_k\cdot Y_\ell)$ comporte $n(n-1)$ termes, chacun valant $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$. D'autre part, nous avons

$$\mathbb{E}\big(Y_k^2\big) = \mathbb{E}\big(Y_k\big) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Nous en déduisons donc que

$$\mathbb{E}\big(N_n^2\big) = n\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^n + n(n-1)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)^n.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\mathrm{ar}(N_n) &= \mathbb{E}\big(N_n^2\big) - [\mathbb{E}(N_n)]^2\\ &= n\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^n + n(n-1)\times\left(1-\frac{2}{n}\right)^n - n^2\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}.\end{aligned}$$

9. (a) Donner un développement limité à l'ordre 1 de (v_n).

(b) Pour t fixé, nous avons

$$v_n = \log\left(1-\frac{t}{n}\right) = -\frac{t}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

où ε_n est une suite qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(c) Nous pouvons voir que

$$u_n = \exp[n\cdot v_n] = \exp\left[n\cdot\left(-\frac{t}{n}+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)\right] = \exp[-t+\varepsilon_n].$$

Nous en déduisons que (u_n) converge vers e^{-t} quand n tend vers $+\infty$.

10. Nous avons

$$\mathbb{E}(N_n/n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n,$$

et en utilisant la question précédente, il vient $\mathbb{E}(N_n/n)\to \mathrm{e}^{-1} = 1/\mathrm{e}$, quand n tend vers $+\infty$.

11. Nous avons

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(N_n/n) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(N_n)/n^2 = \frac{1}{n}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^n + \frac{n-1}{n}\times\left(1-\frac{2}{n}\right)^n - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

Or,

$$\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to 0\times\frac{1}{\mathrm{e}} = 0,\quad \frac{n-1}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n \to \frac{1}{\mathrm{e}^2},\quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\to\frac{1}{\mathrm{e}^2},$$

quand n tend vers $+\infty$, ce qui entraîne bien que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(N_n/n)\to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

12. Supposons que $\left|\mathbb{E}(N_n/n) - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| \leqslant \varepsilon/2$. En écrivant

$$\left|\frac{N_n}{n} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| = \left|\frac{N_n}{n} - \mathbb{E}\Big(\frac{N_n}{n}\Big) + \mathbb{E}\Big(\frac{N_n}{n}\Big) - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| \leqslant \left|\frac{N_n}{n} - \mathbb{E}\Big(\frac{N_n}{n}\Big)\right| + \left|\mathbb{E}\Big(\frac{N_n}{n}\Big) - \frac{1}{\mathrm{e}}\right|,$$

nous voyons que

$$\left|\frac{N_n}{n} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| \geqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{N_n}{n} - \mathbb{E}\Big(\frac{N_n}{n}\Big)\right| \geqslant \varepsilon/2,$$

ce qui entraîne

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{N_n}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon/2\right).$$

13. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbb{E}(N_n/n)$ tend vers $1/\mathrm{e}$ quand n tend vers $+\infty$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$

$$\left|\mathbb{E}(N_n/n) - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| \leqslant \varepsilon/2.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{N_n}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon/2\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(N_n/n)}{(\varepsilon/2)^2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(N_n/n)}{(\varepsilon/2)^2}.$$

Puisque $\mathbb{V}\mathrm{ar}(N_n/n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, nous avons bien

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right| \geqslant \varepsilon\right) \to 0,$$

quand n tend vers $+\infty$, ce qui montre que $\frac{N_n}{n}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercice XV L'espace d'états du système dans le cadre de l'exemple VIII avec $m = 4$ machines et $r = 2$ techniciens est donné par $S = \{0, 1, 2\}$. En effet, au mieux aucune machine n'est en panne et au pire deux machines sont en panne puisque les deux techniciens peuvent en réparer deux la nuit si les quatre machines étaient en panne durant la journée.

Pour calculer les probabilités de transition, il faut comprendre comment se comporte le système. Regardons un scénario possible donné par le tableau suivant.

Machines	1	2	3	4
Au n-ième matin	✓	✓	✓	✓
Au n-ième soir	✓	✗	✓	✓
Réparation(s)		⚠		
Au $(n+1)$-ième matin	✓	✓	✓	✓

On suppose qu'au n-ième matin toutes les machines fonctionnent, puis que la 2-ième machine tombe en panne dans la journée. Pendant la nuit, un des deux techniciens répare la machine (et l'autre regarde arté reportage) et au $(n+1)$-ième matin, toutes les machines fonctionnent. Nous venons donc de voir un scénario pour lequel $X_{n+1} = 0$ sachant que $X_n = 0$. La probabilité de ce scénario est donnée par $p^3 \cdot (1-p)$.

Toutefois, ce n'est pas le seul scénario possible pour lequel $X_{n+1} = 0$ sachant que $X_n = 0$. En effet, si c'est la 3-ième machine qui tombe en panne dans la journée au lieu de la 2-ième, là encore nous obtenons $X_{n+1} = 0$ sachant que $X_n = 0$ et la probabilité de ce scénario est donnée par $p^3 \cdot (1-p)$.

Pour calculer la probabilité de transition $\mathrm{p}(0,0)$, nous devons donc lister tous les scénarios pour lesquels $X_{n+1} = 0$ sachant que $X_n = 0$ et ajouter leur probabilité respective.

Cas où aucune machine ne tombe en panne.

Machines	1	2	3	4
Matin n	✓	✓	✓	✓
Soir n	✓	✓	✓	✓
Réparation(s)				
Matin $n+1$	✓	✓	✓	✓
Probabilité	p^4			

Cas où une machine tombe en panne.

Machines	1	2	3	4
Matin n	✓	✓	✓	✓
Soir n	✗	✓	✓	✓
Réparation(s)	⚠			
Matin $n+1$	✓	✓	✓	✓
Probabilité	$p^3 \cdot (1-p)$			

Machines	1	2	3	4
Matin n	✓	✓	✓	✓
Soir n	✓	✗	✓	✓
Réparation(s)		⚠		
Matin $n+1$	✓	✓	✓	✓
Probabilité	$p^3 \cdot (1-p)$			

Machines	1	2	3	4
Matin n	✓	✓	✓	✓
Soir n	✓	✓	✗	✓
Réparation(s)			⚠	
Matin $n+1$	✓	✓	✓	✓
Probabilité	$p^3 \cdot (1-p)$			

Machines	1	2	3	4
Matin n	✓	✓	✓	✓
Soir n	✓	✓	✓	✗
Réparation(s)				⚠
Matin $n+1$	✓	✓	✓	✓
Probabilité	$p^3 \cdot (1-p)$			

Cas où deux machines tombent en panne.

Machines	1	2	3	4
Matin n	✓	✓	✓	✓
Soir n	✗	✗	✓	✓
Réparation(s)	⚠	⚠		
Matin $n+1$	✓	✓	✓	✓
Probabilité	$p^2 \cdot (1-p)^2$			

Machines	1	2	3	4
Matin n	✓	✓	✓	✓
Soir n	✗	✓	✗	✓
Réparation(s)	⚠		⚠	
Matin $n+1$	✓	✓	✓	✓
Probabilité	$p^2 \cdot (1-p)^2$			

Machines	1	2	3	4
Matin n	✓	✓	✓	✓
Soir n	✗	✓	✓	✗
Réparation(s)	⚠			⚠
Matin $n+1$	✓	✓	✓	✓
Probabilité	$p^2 \cdot (1-p)^2$			

Machines	1	2	3	4
Matin n	✓	✓	✓	✓
Soir n	✓	✗	✗	✓
Réparation(s)		⚠	⚠	
Matin $n+1$	✓	✓	✓	✓
Probabilité	$p^2 \cdot (1-p)^2$			

Machines	1	2	3	4
Matin n	✓	✓	✓	✓
Soir n	✓	✗	✓	✗
Réparation(s)		⚠		⚠
Matin $n+1$	✓	✓	✓	✓
Probabilité	$p^2 \cdot (1-p)^2$			

Machines	1	2	3	4
Matin n	✓	✓	✓	✓
Soir n	✓	✓	✗	✗
Réparation(s)			⚠	⚠
Matin $n+1$	✓	✓	✓	✓
Probabilité	$p^2 \cdot (1-p)^2$			

Si trois ou quatre machines tombent en panne dans la journée, seulement deux pourront être réparées pendant la nuit et le lendemain un ou deux machines seront en panne dès le matin. Nous avons donc lister tous les scénarios pour lesquels $X_{n+1} = 0$ sachant que $X_n = 0$ et

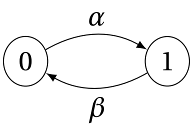
$$\mathrm{p}(0,0) = p^4 + 4p^3(1-p) + 6p^2(1-p)^2.$$

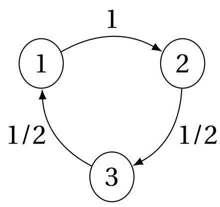
Le coefficient 4 dans l'expression précédente correspond au nombre de possibilités de choisir une machine parmi quatre donné par $\binom{4}{1} = 4$. De même, le coefficient 6 dans l'expression précédente correspond au nombre de possibilités de choisir deux machines parmi quatre donné par $\binom{4}{2} = 6$, et le coefficient 1 au nombre de possibilités de choisir zero machine parmi quatre donné par $\binom{4}{0} = 1$

Par des raisonnements analogues, on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}(0,1) &= \binom{4}{3} p \cdot (1-p)^3 = 4p \cdot (1-p)^3, \\
\mathrm{p}(0,2) &= \binom{4}{4} p \cdot (1-p)^3 = (1-p)^4, \\
\mathrm{p}(1,0) &= \binom{3}{0} p^3 + \binom{3}{1} p^2 \cdot (1-p) = p^3 + 3p^2 \cdot (1-p), \\
\mathrm{p}(1,1) &= \binom{3}{2} p \cdot (1-p)^2 = 3p \cdot (1-p)^2, \\
\mathrm{p}(1,2) &= \binom{3}{3} (1-p)^3 = (1-p)^3, \\
\mathrm{p}(2,0) &= \binom{2}{0} p^2 = p^2, \\
\mathrm{p}(2,1) &= \binom{2}{1} p \cdot (1-p) = 2p(1-p), \\
\mathrm{p}(2,2) &= \binom{2}{2} (1-p)^2 = (1-p)^2.
\end{aligned}
$$

Exercice XVI





Exercice XVII

$$
\begin{array}{c}
 \\ E \\ S \\ R \\ F \\ W
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \;\;E\;\; & \;\;S\;\; & \;\;R\;\; & \;\;F\;\; & \;\;W\;\; \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0.8 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\
0 & 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\
0.15 & 0.15 & 0.25 & 0.15 & 0.3 \\
0.3 & 0 & 0.2 & 0 & 0.5 \\
0 & 0 & 0.6 & 0.3 & 0.1
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \;0\; & \;1\; & \;2\; & \;3\; & \;4\; \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\
0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\
0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\
0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Exercice XVIII Nous avons

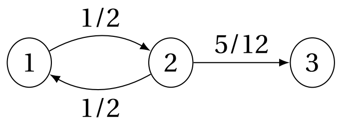
$$\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 0) = \mathrm{p}(0,0)\mathrm{p}(0,1)\mathrm{p}(1,0)\mathrm{p}(0,0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

et

$$\mathbb{P}(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4) = \mathrm{p}(0,1)\mathrm{p}(1,2)\mathrm{p}(2,3)\mathrm{p}(3,4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

Exercice XIX

1. Le diagramme correspondant à la matrice de transition P est le suivant.



2. Puisque $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, nous avons

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathrm{p}(1,1) \cdot 1 = 1/2,$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 2, X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathrm{p}(1,2) \cdot 1 = 1/2,$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 3) = \mathbb{P}(X_1 = 3, X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 3 \mid X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathrm{p}(1,3) \cdot 1 = 0.$$

3. Nous avons

$$\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(X_2 = 3, X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 3, X_1 = 2) + \mathbb{P}(X_2 = 3, X_1 = 3).$$

Nous avons vu à la question 2 que $\mathbb{P}(X_1 = 3) = 0$, ainsi nous obtenons $\mathbb{P}(X_2 = 3, X_1 = 3) = 0$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 3) &= \mathbb{P}(X_2 = 3, X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 3, X_1 = 2)\\ &= \mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_1 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 2)\\ &= \mathrm{p}(1,3)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathrm{p}(2,3)\mathbb{P}(X_1 = 2).\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{p}(1,3) = 0$ et $\mathrm{p}(2,3) = 5/12$, il vient finalement $\mathbb{P}(X_2 = 3) = 5/24$.

4. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, X_n = 2) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, X_n = 3)\\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2)\mathbb{P}(X_n = 2)\\ &\qquad + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 3)\mathbb{P}(X_n = 3)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 2).\end{aligned}$$

5. Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=2) &= \mathbb{P}(X_{n+1}=2, X_n=1)+\mathbb{P}(X_{n+1}=2, X_n=2)+\mathbb{P}(X_{n+1}=2, X_n=3)\\
&= \mathbb{P}(X_{n+1}=2 \,|\, X_n=1)\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}(X_{n+1}=2 \,|\, X_n=2)\mathbb{P}(X_n=2)\\
&\qquad +\mathbb{P}(X_{n+1}=2 \,|\, X_n=3)\mathbb{P}(X_n=3)\\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1)+\frac{1}{12}\mathbb{P}(X_n=2).
\end{aligned}$$

6. Soit n un entier naturel et H_n l'assertion suivante :

$$\lambda_n=\lambda_0 Q^n, \quad \text{avec} \quad Q=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/12\end{pmatrix}.$$

Montrons par récurrence que H_n est vraie pour tout entier n. Tout d'abord, on remarque que

$$Q^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

ce qui montre que H_0 est vraie.

Soit n un entier naturel. Supposons que l'assertion H_n est vraie et montrons que l'assertion H_{n+1} est vraie. D'après les questions 4 et 5, nous avons $\lambda_{n+1}=\lambda_n Q$. D'autre part, puisque l'assertion H_n est vraie, nous avons $\lambda_n=\lambda_0 Q^n$ et il vient alors

$$\lambda_{n+1}=\lambda_n Q=\lambda_0 Q^n\cdot Q=\lambda_0 Q^{n+1}.$$

Par le principe de récurrence, nous venons de montrer que l'assertion H_n est vraie pour tout entier n.

7. Avant de déterminer les constantes a et b telles que

$$\mathbb{P}(X_n=1)=a\left(\frac{5}{6}\right)^n+b\left(-\frac{1}{4}\right)^n, \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

il convient de justifier pourquoi une telle écriture est possible.

La matrice Q est symétrique à valeurs réelles, elle est donc diagonalisable, c'est à dire qu'il existe deux valeurs propres réelles α_1 et α_2, et une matrice de passage O telles que

$$Q=ODO^{-1}, \quad \text{avec} \quad D=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}.$$

On peut montrer par récurrence que $Q^n=OD^nO^{-1}$. Pour le comprendre il suffit de remarquer que :

$$Q^{n+1}=Q^n\cdot Q=OD^n\underbrace{O^{-1}O}_{\text{se simplifie}}DO^{-1}=OD^nDO^{-1}=OD^{n+1}O^{-1}.$$

De plus, comme D est une matrice diagonale, nous avons

$$D^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 \\ 0 & \alpha_2^n \end{pmatrix}.$$

On peut donc voir que les coefficients de Q^n sont une combinaison linéaire de α_1^n et de α_2^n, et que cette combinaison linéaire est toujours la même pour tout entier n. La multiplication à gauche par la matrice λ_0, dont les coefficients ne dépendent pas de n, entraîne qu'il existe deux constantes a et b telles que

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = a\alpha_1^n + b\alpha_2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'après l'énoncé, nous pouvons supposer que $\alpha_1 = \frac{5}{6}$ et $\alpha_2 = -\frac{1}{4}$. On a alors

$$1 = \mathbb{P}(X_0 = 1) = a\left(\frac{5}{6}\right)^0 + b\left(-\frac{1}{4}\right)^0 = a + b,$$

et

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_1 = 1) = a\left(\frac{5}{6}\right)^1 + b\left(-\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{5}{6}a - \frac{1}{4}b.$$

La résolution du système nous donne

$$a = \frac{9}{13}, \quad b = \frac{4}{13}.$$

8. Soit A_n l'évènement « Paul choisit l'objet A au n-ième essai ». Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(A_n, X_n = 1) + \mathbb{P}(A_n, X_n = 2) + \mathbb{P}(A_n, X_n = 3) \\
&= \mathbb{P}(A_n \mid X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(A_n \mid X_n = 2)\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(A_n \mid X_n = 3)\mathbb{P}(X_n = 3) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) \\
&= 1 - \frac{9}{26}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{2}{13}\left(-\frac{1}{4}\right)^n.
\end{aligned}$$

Exercice XX On considère la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Pour vérifier que $\lambda = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ est une mesure de probabilité invariante pour P, il suffit de vérifier que $\lambda P = \lambda$, ce qui est le cas.

Exercice XXI Soit $\alpha \in]0,1]$ et la matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$, avec x et y deux nombres réels, une mesure de probabilité invariante pour P. Nous avons alors $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y = 1$ et $\lambda P = \lambda$. On peut vérifier que cette dernière égalité est équivalente à $x = y$. À l'aide des deux équations $x + y = 1$ et $x = y$, nous en déduisons que $x = y = 1/2$. Nous venons donc de montrer que si λ existe, elle s'écrit $\lambda = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Réciproquement, une telle mesure est invariante pour P.

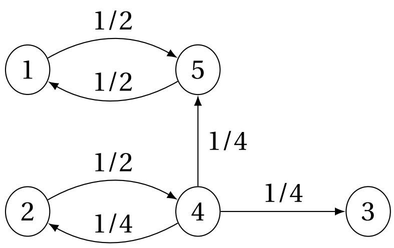
Exercice XXII Les classes de communication dans l'exercice XVI sont respectivement $\{0,1\}$ et $\{1,2,3\}$. Elles sont donc fermées. (elle est donc fermée).

Dans l'exercice XVII, on voit que pour la première chaîne tous les états communiquent avec l'état R, ce qui montre qu'ils sont tous dans la même classe. Dans la seconde chaîne, l'état 4 est absorbant et forme une classe de communication fermée. Tous les autres états sont dans une classe de communication non fermée $\{0,1,2,3\}$.

Exercice XXIII Le diagramme associé à la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est le suivant.



Les classes de communication de cette chaîne sont $\{1,5\}$, $\{2,4\}$ et $\{3\}$. Les classes $\{1,5\}$ et $\{3\}$ sont fermées.

Exercice XXIV

1. Les classes de communication de la chaîne sont $\{1\}$, $\{2,3\}$ et $\{4\}$.

2. La matrice de transition est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On vérifie que $\lambda P = \lambda$.

Exercice XXV Soit P une matrice de transition possédant un état x tel que $\mathrm{p}(x,x) > 0$. L'état x est apériodique puisque

$$\mathrm{p}^{(n)}(x,x) \geqslant [\mathrm{p}(x,x)]^n > 0,$$

pour tout entier n. En effet, le chemin $x \to x \to x \to \cdots \to x$ est une boucle partant de x et possédant une probabilité strictement positive de se produire.

Annexe B

Corrigés des Tp

Exemple de corrigé pour le Tp n$^{\mathrm{o}}$ 1 chaînes de Markov

1 Échauffement

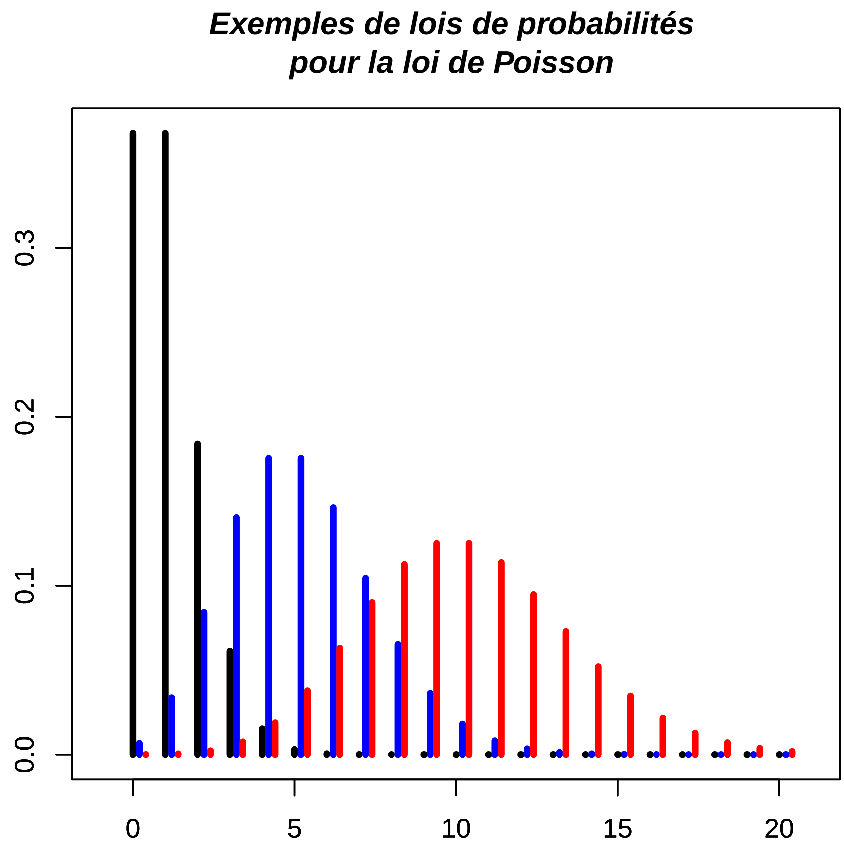
1. Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si elle est à valeurs dans $\{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X=1)=p=1-\mathbb{P}(X=0)$.

2.
```
> lancers <- 100
> parametre <- 0.5
> ## matrix 10x10 pour la présentation
> matrix(rbinom(lancers,1,parametre),nrow=10,ncol=10)

      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
 [1,]    1    1    0    0    0    0    1    1    1     0
 [2,]    1    1    1    1    0    0    0    0    1     0
 [3,]    1    0    1    1    0    0    0    1    1     0
 [4,]    1    1    1    0    0    0    0    0    1     0
 [5,]    1    1    0    1    0    0    1    0    0     1
 [6,]    0    0    1    0    0    1    1    0    0     0
 [7,]    1    1    1    1    1    1    0    1    0     0
 [8,]    1    1    0    1    0    0    1    1    0     0
 [9,]    0    1    1    0    0    0    1    0    1     0
[10,]    0    0    0    1    1    1    0    1    1     1
```

3.
```
> LoiPoisson <- function(lambda,K)
+ {
+         dpois((0:K), lambda, log = FALSE)
+ }
```

4.
```
> lambda1 <- 1
> lambda2 <- 5
> lambda3 <- 10
> K <- 20
> Loi1 <- LoiPoisson(lambda1,K)
> Loi2 <- LoiPoisson(lambda2,K)
> Loi3 <- LoiPoisson(lambda3,K)
> max <- max(c(Loi1,Loi2,Loi3))
> ## Représentation de la première loi
> plot((0:K),Loi1, xlim=c(-1,K+1),ylim=c(0,max),
+ type="h", lwd=4,ann=FALSE);
> ## Commande pour superposer un graphique sur un autre
> par(new=TRUE)
> ## Représentation de la deuxième loi
> plot((0:K)+0.2,Loi2,  xlim=c(-1,K+1),ylim=c(0,max),
+ type="h",col="blue",lwd=4,ann=FALSE);
> par(new=TRUE)
> ## Représentation de la troisième loi
> plot((0:K)+0.4,Loi3,  xlim=c(-1,K+1),ylim=c(0,max),
+ type="h",col="red",lwd=4,ann=FALSE);
> ## Ajout du nom des axes
> title(xlab="")
> title(ylab="")
> ## Ajout d'un titre
> title(main=paste("Exemples de lois de probabilités
```

```
+ pour la loi de Poisson ",sep=""),
+        col.main="black", font.main=4)
```



2 Fiction immunitaire

5.
```
> Neutralisation <- function(leucos,agents,attaque)
+ {
+          max(0,agents - rbinom(1,leucos,attaque))
+ }
> leucos <- 10
> agents <- 10
> attaque <- 0.5
> Neutralisation(leucos,agents,attaque)

[1] 5
```

6.
```
> Multiplication <- function(agents,repro)
+ {
+          agents + rbinom(1,agents,repro)
+ }
> agents <- 10
> repro <- 0.5
> Multiplication(agents,repro)

[1] 13
```

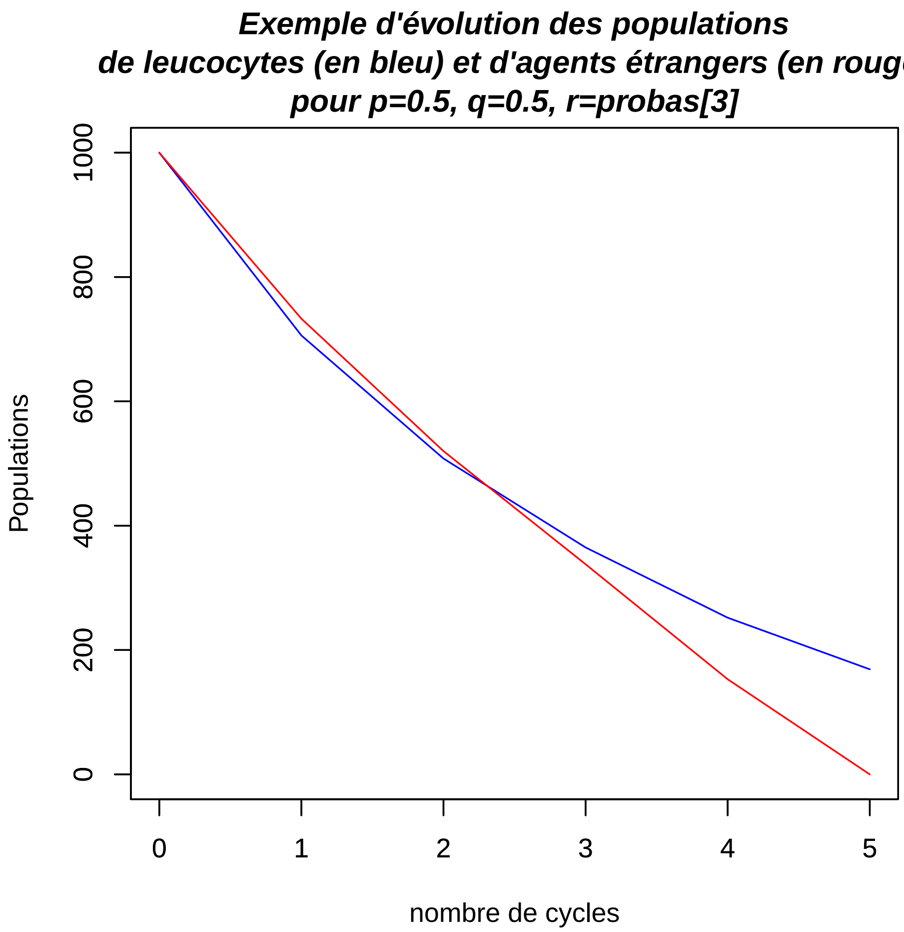
7.
```
> Cycle <- function(individus,probas)
+ {
```

```
+         leucos <- individus[1]
+         agents <- individus[2]
+         attaque <- probas[1]
+         repro <- probas[2]
+         mort <- probas[3]
+         agents <- Multiplication(Neutralisation(leucos,agents,attaque),
+         repro)
+         leucos <- max(0, leucos - rbinom(1,leucos,mort))
+         c(leucos,agents)
+ }
> individus <- c(10,5)
> probas <- c(0.3,0.5,0.1)
> Cycle(individus,probas)

[1] 9 6
```

8.
```
> Infection <- function(individus,probas)
+ {
+         evolution <- individus
+         agents.initial <- individus[2]
+         seuil.bas <- min(individus)
+         seuil.haut <- individus[2]
+         while( seuil.bas > 0 && seuil.haut < 5*agents.initial )
+                 {
+                         individus <- Cycle(individus, probas)
+                         evolution <- rbind(evolution, individus)
+                         probas[1] <- (9*probas[1]+1)/10
+                         seuil.bas <- min(individus)
+                         seuil.haut <- individus[2]
+                 }
+         evolution
+ }
> individus <- c(1000,1000)
> probas <- c(0.5,0.75,0.3)
> Infection(individus,probas)

          [,1] [,2]
evolution 1000 1000
individus  689  886
individus  473  910
individus  329 1128
individus  244 1612
individus  166 2529
individus  116 4234
individus   85 7260
```

9.
```
> trajectoire <- function(evolution,probas)
+ {
+         leucos <- evolution[,1]
+         agents <- evolution[,2]
+         max <- max(leucos,agents)
+         temps <- length(leucos)-1
+         plot((0:temps), leucos, xlim=c(0,temps),ylim=c(0,max),
+         type="line",col="blue",ann=FALSE);
+         ## Commande pour superposer un graphique sur un autre
+         par(new=TRUE)
```

```
+         plot((0:temps), agents, xlim=c(0,temps),ylim=c(0,max),
+         type="line",col="red",ann=FALSE);
+         ## Ajout du nom des axes
+         title(xlab="nombre de cycles")
+         title(ylab="Populations")
+         ## Ajout d'un titre
+         title(main=paste("Exemple d'évolution des populations",
+         "\nde leucocytes (en bleu) et d'agents étrangers (en rouge)",
+         "\npour p=",probas[1],", q=",probas[2],", r=probas[3]", sep=""),
+               col.main="black", font.main=4)
+ }
> individus <- c(1000,1000)
> probas <- c(0.5,0.5,0.3)
> trajectoire(Infection(individus,probas),probas)
```

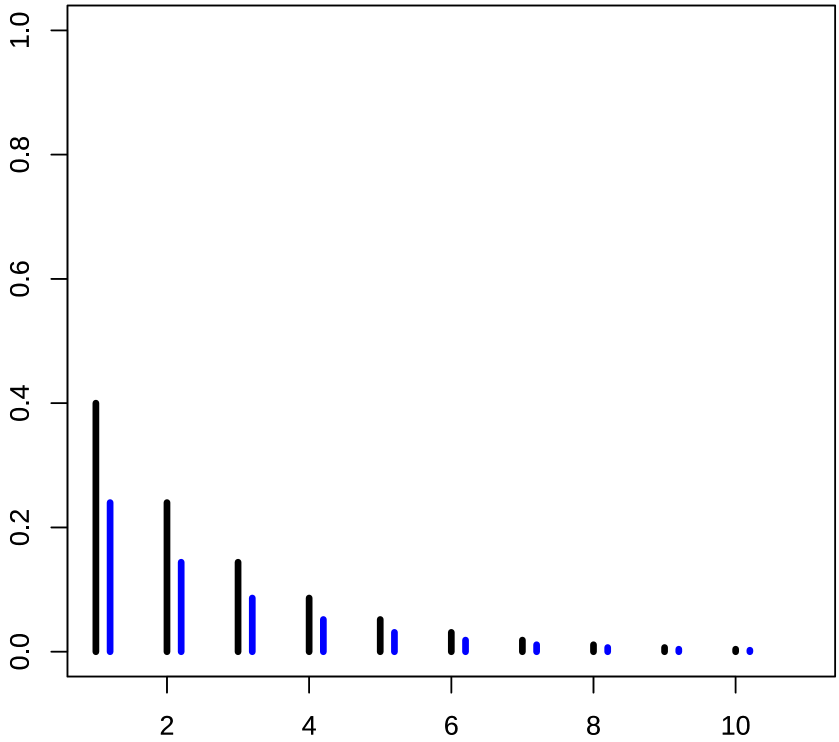


10. La variable aléatoire T peut prendre toutes les valeurs entières non nulles.
11. Soient X_1, X_2, … une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre q. On a alors $[T=1]=[X_1=1]$ et pour tout $n \geqslant 2$

$$[T=n]=[X_1=0,\dots,X_{n-1}=0,X_n=1].$$

12. On en déduit que $\mathbb{P}(T=n)=q \times q^{n-1}$.
13.
```
> q <- 0.4
> N <- 10
> LoiGeom <- q*(1-q)^((1:N)-1)
> Test <- dgeom((1:N),q)
> ## Représentation de la première loi
> plot((1:N),LoiGeom, xlim=c(1,N+1),ylim=c(0,1),
+ type="h", lwd=4,ann=FALSE)
```

```
> ## Commande pour superposer un graphique sur un autre
> par(new=TRUE)
> ## Représentation de la deuxième loi
> plot((1:N)+0.2,Test,  xlim=c(1,N+1),ylim=c(0,1),
+ type="h",col="blue",lwd=4,ann=FALSE)
```



On constate donc que la fonction `dgeom` ne donne pas la loi de probabilité d'une loi géométrique comme définie ci-dessus, mais une loi "décalée". Ceci vient du fait que `dgeom` admet comme valeur possible `0`, et les valeurs retournées par `dgeom` sont

$$\texttt{dgeom}(k,q) = q \times (1-q)^k.$$

14.
$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n\geqslant 1} nq \times (1-q)^{n-1} = q\big(1+2(1-q)+3(1-q)^2+\dots\big) = q\cdot\frac{1}{(1-(1-q))^2} = \frac{1}{q}.$$

Exemple de corrigé pour le Tp n° 2 chaînes de Markov

1. Soit Y_n une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre 1/2. On a alors

   $$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 1/2, \\ 0 & \text{avec probabilité } 1/2. \end{cases}$$

   D'un autre côté, nous avons

   $$X_n = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } 1/2, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1/2. \end{cases}$$

   Une manière décrire X_n en fonction de Y_n est donc

   $$X_n = 2Y_n - 1.$$

2.
   ```
   > N <- 10
   > x <- 2*rbinom(N,1,0.5) - 1 ;
   ```

3.
   ```
   > cumsum(1:3);

   [1] 1 3 6

   > cumsum(1:4);

   [1]  1  3  6 10
   ```

   On constate donc que `cumsum(1:3)` renvoie le vecteur

   $$(1, 1+2, 1+2+3),$$

   et que `cumsum(1:4)` renvoie le vecteur

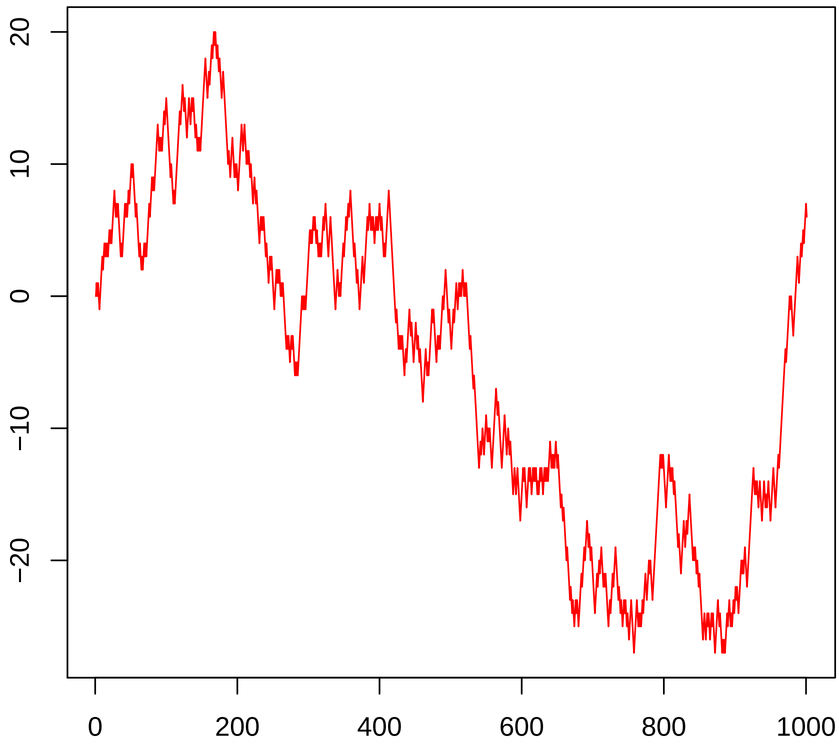
   $$(1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4).$$

4. Puisque le vecteur $(S_1, \ldots, S_N)$ est donné par

   $$(S_1, S_2, \ldots, S_N) = (X_1, X_1 + X_2, \ldots, X_1 + \cdots + X_N),$$

   on peut utiliser la fonction `cumsum` comme suit.

   ```
   > N <- 1000
   > x <- 2*rbinom(N,1,0.5) - 1;
   > s <- cumsum(x);
   > plot(c(0,s),type="line",col="red",ann=FALSE);
   ```



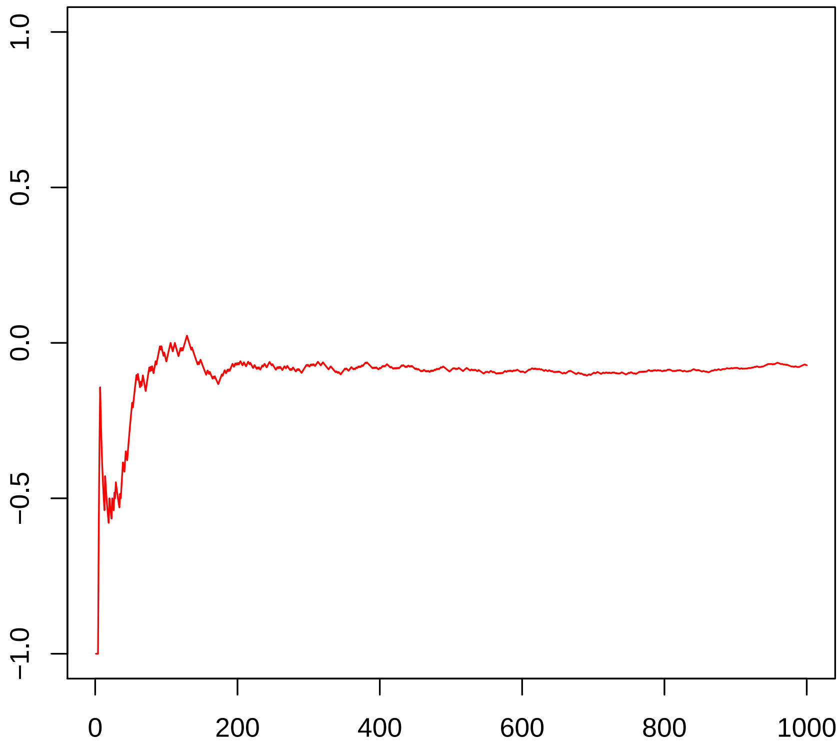
5. `> c(1,2,4,8)/c(1,10,100,1000);`

```
[1] 1.000 0.200 0.040 0.008
```

On constate que `c(1,2,4,8)/c(1,10,100,1000)` renvoie

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{10}, \frac{4}{100}, \frac{8}{1000}\right).$$

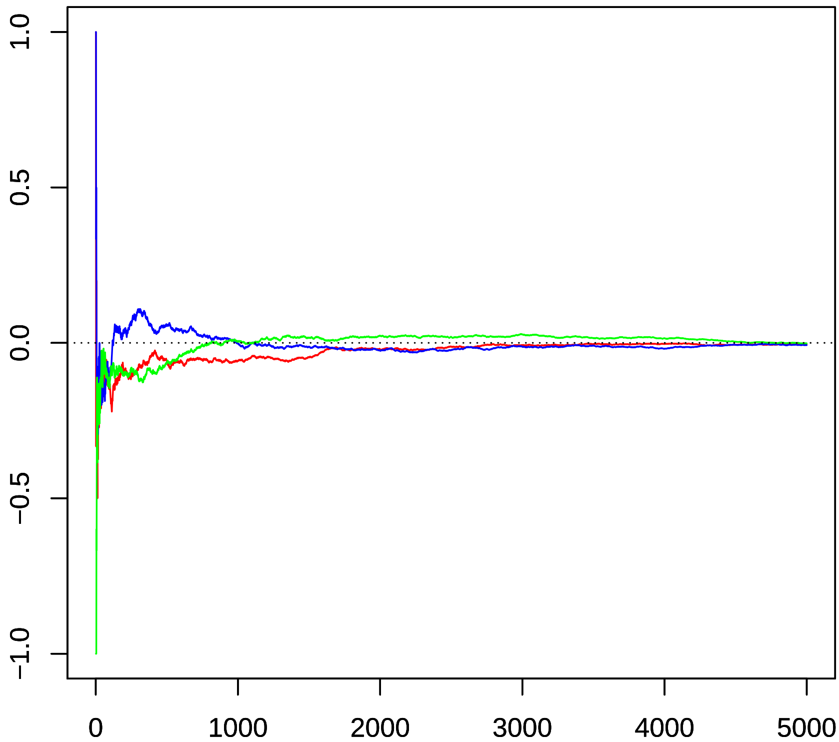
6.
```
> N <- 1000
> x <- 2*rbinom(N,1,0.5) - 1
> s <- cumsum(x)
> x.bar <- s/(1:N)
> plot(x.bar,type="line",ylim=c(-1,1),col="red",ann=FALSE);
```



7. Nous avons $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = 0$ et $\text{Var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}$. Par Bienaymé-Tchebychev, il vient pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - 0| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

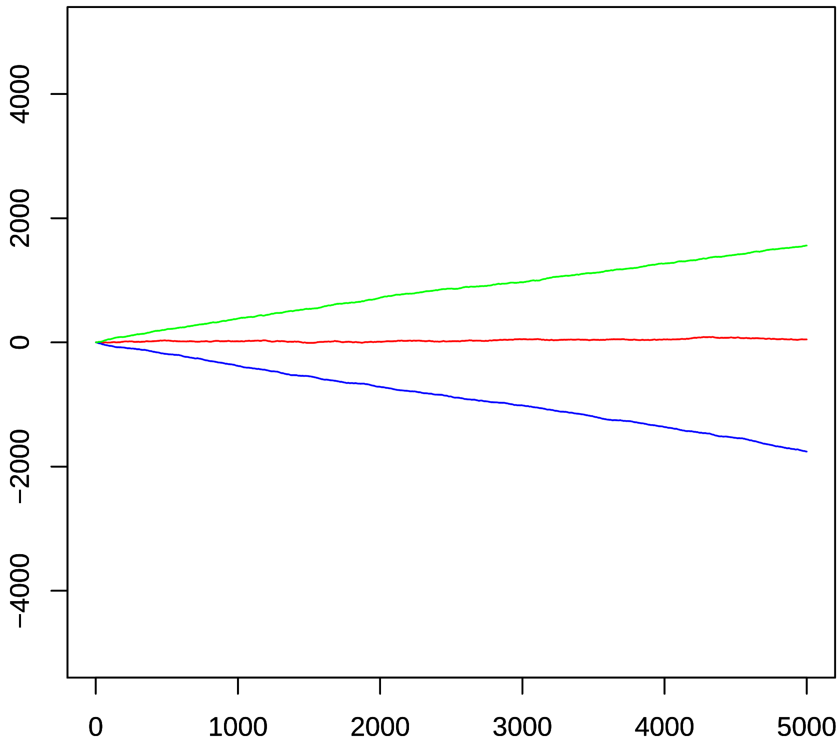
8.
```
> N <- 5000
> x.bar1 <- cumsum(2*rbinom(N,1,0.5) - 1)/(1:N);
> x.bar2 <- cumsum(2*rbinom(N,1,0.5) - 1)/(1:N);
> x.bar3 <- cumsum(2*rbinom(N,1,0.5) - 1)/(1:N);
> plot(x.bar1,type="line",ylim=c(-1,1),col="red",ann=FALSE);
> par(new=TRUE)
> plot(x.bar2,type="line",ylim=c(-1,1),col="blue",ann=FALSE);
> par(new=TRUE)
> plot(x.bar3,type="line",ylim=c(-1,1),col="green",ann=FALSE);
> abline(h=0,lty=3,col="black")
```



9. Nous pouvons toujours écrire
$$X_n = 2Y_n - 1,$$
avec cette fois Y_n qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

```
> N <- 10;
> p <- 1/3;
> x <- 2*rbinom(N,1,p) - 1;
```

10.
```
> N <- 5000;
> p1 <- 1/2;
> p2 <- 1/3;
> p3 <- 2/3;
> s1 <- cumsum(2*rbinom(N,1,p1) - 1);
> s2 <- cumsum(2*rbinom(N,1,p2) - 1);
> s3 <- cumsum(2*rbinom(N,1,p3) - 1);
> plot(s1,type="line",ylim=c(-N,N),col="red",ann=FALSE);
> par(new=TRUE)
> plot(s2,type="line",ylim=c(-N,N),col="blue",ann=FALSE);
> par(new=TRUE)
> plot(s3,type="line",ylim=c(-N,N),col="green",ann=FALSE);
```

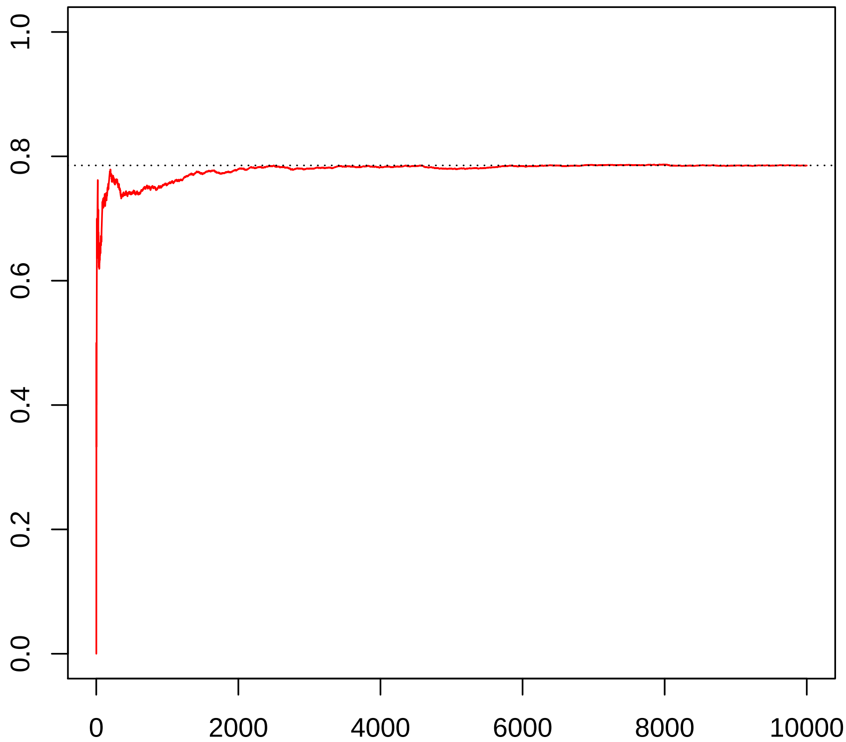


11. L'aire de D est $\frac{\pi}{4}$.

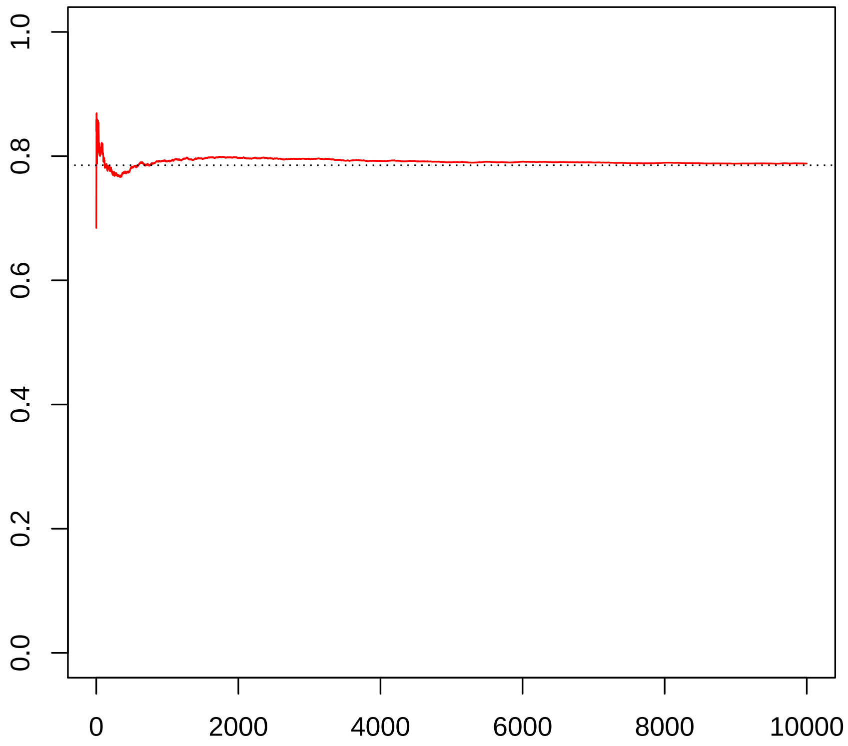
12. (a) La variable aléatoire suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_n \in D) = \frac{\pi}{4}$.

    (b) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\overline{Y}_N$.

    (c)
```
> N <- 10000
> x1 <- runif(N,0,1);
> x2 <- runif(N,0,1);
> y <- ((x1^2 + x2^2) <=1 )
> y.bar <- cumsum(y)/(1:N)
> plot(y.bar,type="line",ylim=c(0,1),col="red",ann=FALSE);
> abline(h=pi/4,lty=3,col="black")
```



13. Soit M un point de coordonnées (x, y) appartenant à $\mathscr{C}$. Nous avons alors $x^2 + y^2 = 1$. On en déduit donc que y est soit égal à $\sqrt{1-x^2}$, soit à $-\sqrt{1-x^2}$. Puisque y est dans l'intervalle $[0,1]$, on en déduit que $y = \sqrt{1-x^2}$.
14. (a) Nous avons
$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(\phi(X_n)) = \int_0^1 \phi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$
(b) Nous avons
$$\mathbb{E}(Y_n^2) = \mathbb{E}(\phi(X_n)^2) = \int_0^1 \phi(x)^2\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x^2)\mathrm{d}x = 1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$
On en déduit que
$$\mathrm{Var}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - \mathbb{E}(Y_n)^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2.$$
(c) Là encore, il suffit d'appliquer Bienaymé-Tchebychev.
(d)
```
> N <- 10000;
> x <- runif(N,0,1);
> y <- sqrt(1-x^2);
> y.bar <- cumsum(y)/(1:N)
> plot(y.bar,type="line",ylim=c(0,1),col="red",ann=FALSE);
> abline(h=pi/4,lty=3,col="black")
```


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
2000
4000
6000
8000
10000

Exemple de corrigé pour le Tp n° 3 chaînes de Markov

1. *Quelle est la loi de X_{n+1} sachant que $X_n = i$? Expliciter les probabilités de transition $\mathrm{p}(i,j) := \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$.*
   Chaque allèle de la génération $n+1$ est de type A avec probabilité $\frac{i}{2N}$ et de type B avec probabilité $1-\frac{i}{2N}$. Le nombre d'allèles de type A de la génération $n+1$ est donc distribuée suivant une loi binomiale de paramètres $2N$ et $\frac{i}{2N}$. Ainsi, on obtient

$$\mathrm{p}(i,j) = \binom{2N}{j}\left(\frac{i}{2N}\right)^j\left(1-\frac{i}{2N}\right)^{2N-j}.$$

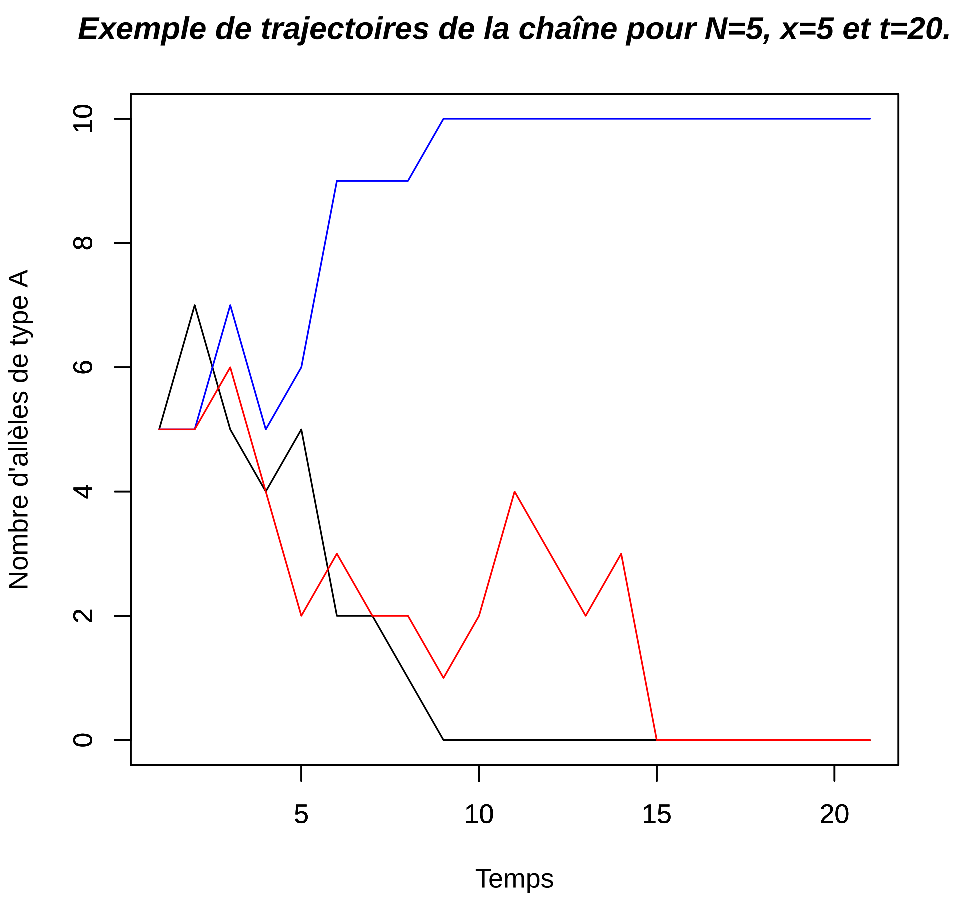
2. *Écrire un script qui prend en entrée une taille de population $2N$, un nombre initial $x \in \{0,\ldots,2N\}$ d'allèles A et un temps t et qui fait évoluer le nombre d'allèles d'allèles A jusqu'à la génération t.*

```
> Evolution=function(N,x,t)
+ {
+   NombreA <- x;
+   Trajectoire <- x;
+   for (i in 1:t)
+     {
+       ## Tirage du nombre d'allèles A de la génération i
+       ## suivant une loi binomiale de paramètres 2N et
+       ## NombreA/(2N) où NombreA est le nombre d'allèles
+       ## de type A de la génération i-1
+       NombreA <- rbinom(1,2*N,NombreA/(2*N));
+       ## Mise à jour de la Trajectoire de la chaîne
+       Trajectoire <- c(Trajectoire,NombreA);
+     }
+   ## On retourne toute la trajectoire
+   Trajectoire;
+ }

> ## On teste la fonction Evolution
> Evolution(5,5,10);

 [1] 5 7 9 8 7 4 3 2 0 0 0
```

3. *Représenter plusieurs trajectoires de cette chaîne de Markov pour $N = 5, 10, 30$.*

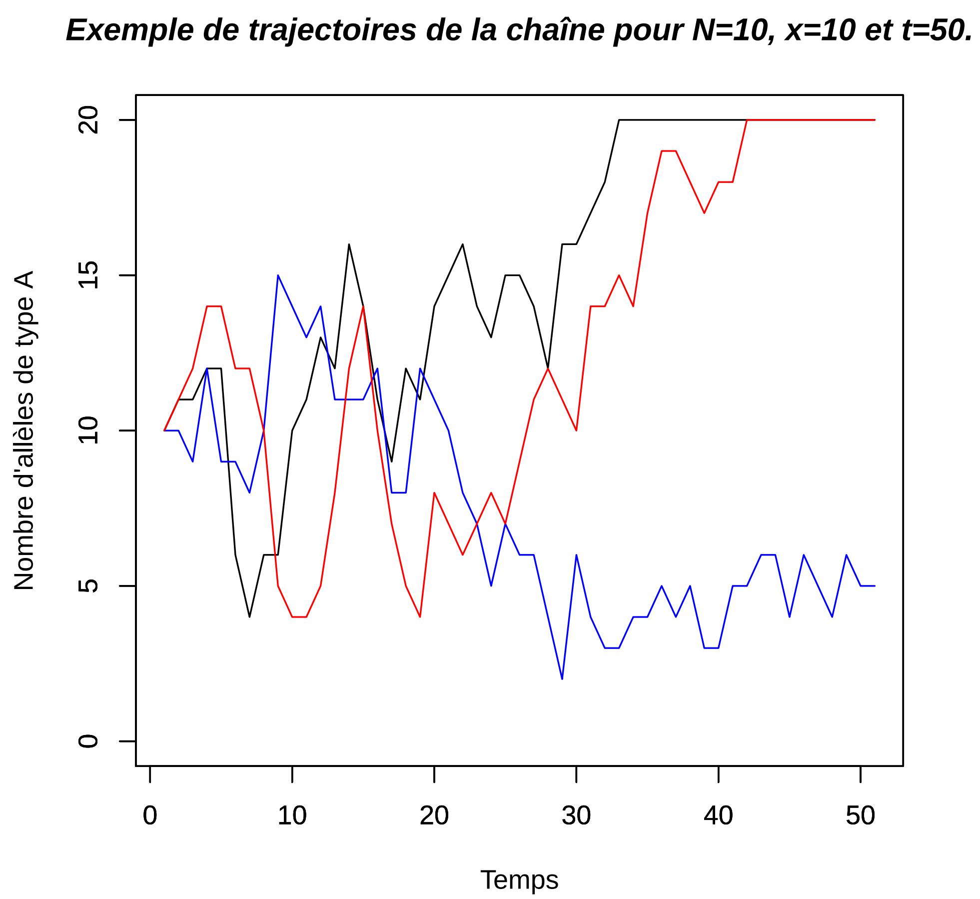
```
> ## Cas où N=5, x=5 et t=20
> N <- 5;
> x <- 5;
> t <- 20;
> Traj1 <- Evolution(N,x,t);
> Traj2 <- Evolution(N,x,t);
> Traj3 <- Evolution(N,x,t);
> ## Représentation de la première trajectoire
> plot(Traj1, ylim=c(0,2*N), type="lines",ann=FALSE);
> ## Commande pour superposer un graphique sur un autre
> par(new=TRUE)
> ## Représentation de la deuxième trajectoire
> plot(Traj2, ylim=c(0,2*N), type="lines", col="blue", ann=FALSE);
> par(new=TRUE)
```

```
> ## Représentation de la troisième trajectoire
> plot(Traj3, ylim=c(0,2*N), type="lines", col="red", ann=FALSE);
> ## Ajout du nom des axes
> title(xlab="Temps")
> title(ylab="Nombre d'allèles de type A")
> ## Ajout d'un titre
> title(main=paste("Exemple de trajectoires de la chaîne pour N="
+         ,N,", x=",x, " et t=",t,".",sep=""),
+       col.main="black", font.main=4)
```



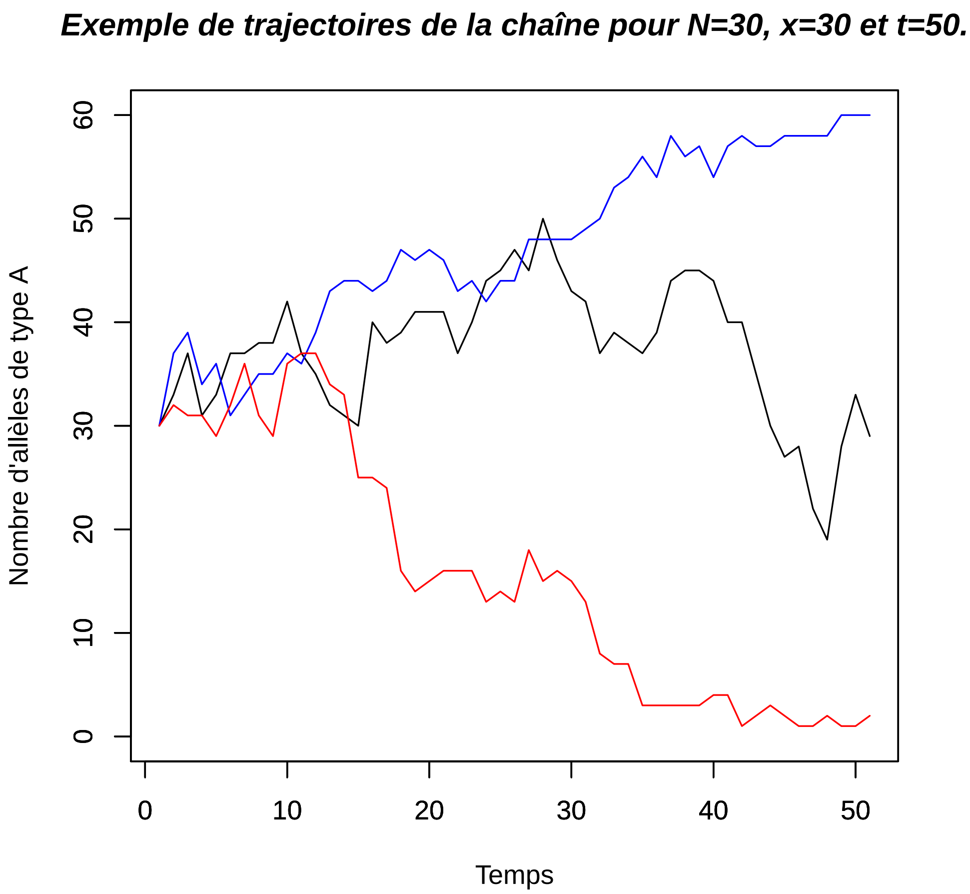

```
> ## Cas où N=10, x=10 et t=50
> N <- 10;
> x <- 10;
> t <- 50;
> Traj1 <- Evolution(N,x,t);
> Traj2 <- Evolution(N,x,t);
> Traj3 <- Evolution(N,x,t);
> ## Représentation de la première trajectoire
> plot(Traj1, ylim=c(0,2*N), type="lines",ann=FALSE);
> ## Commande pour superposer un graphique sur un autre
> par(new=TRUE)
> ## Représentation de la deuxième trajectoire
> plot(Traj2, ylim=c(0,2*N), type="lines", col="blue", ann=FALSE);
> par(new=TRUE)
> ## Représentation de la troisième trajectoire
> plot(Traj3, ylim=c(0,2*N), type="lines", col="red", ann=FALSE);
> ## Ajout du nom des axes
> title(xlab="Temps")
```

```
> title(ylab="Nombre d'allèles de type A")
> ## Ajout d'un titre
> title(main=paste("Exemple de trajectoires de la chaîne pour N="
+          ,N,", x=",x, " et t=",t,".",sep=""),
+        col.main="black", font.main=4)
```




```
> ## Cas où N=30, x=30 et t=50
> N <- 30;
> x <- 30;
> t <- 50;
> Traj1 <- Evolution(N,x,t);
> Traj2 <- Evolution(N,x,t);
> Traj3 <- Evolution(N,x,t);
> ## Représentation de la première trajectoire
> plot(Traj1, ylim=c(0,2*N), type="lines",ann=FALSE);
> ## Commande pour superposer un graphique sur un autre
> par(new=TRUE)
> ## Représentation de la deuxième trajectoire
> plot(Traj2, ylim=c(0,2*N), type="lines", col="blue", ann=FALSE);
> par(new=TRUE)
> ## Représentation de la troisième trajectoire
> plot(Traj3, ylim=c(0,2*N), type="lines", col="red", ann=FALSE);
> ## Ajout du nom des axes
> title(xlab="Temps")
> title(ylab="Nombre d'allèles de type A")
> ## Ajout d'un titre
> title(main=paste("Exemple de trajectoires de la chaîne pour N="
+          ,N,", x=",x, " et t=",t,".",sep=""),
```

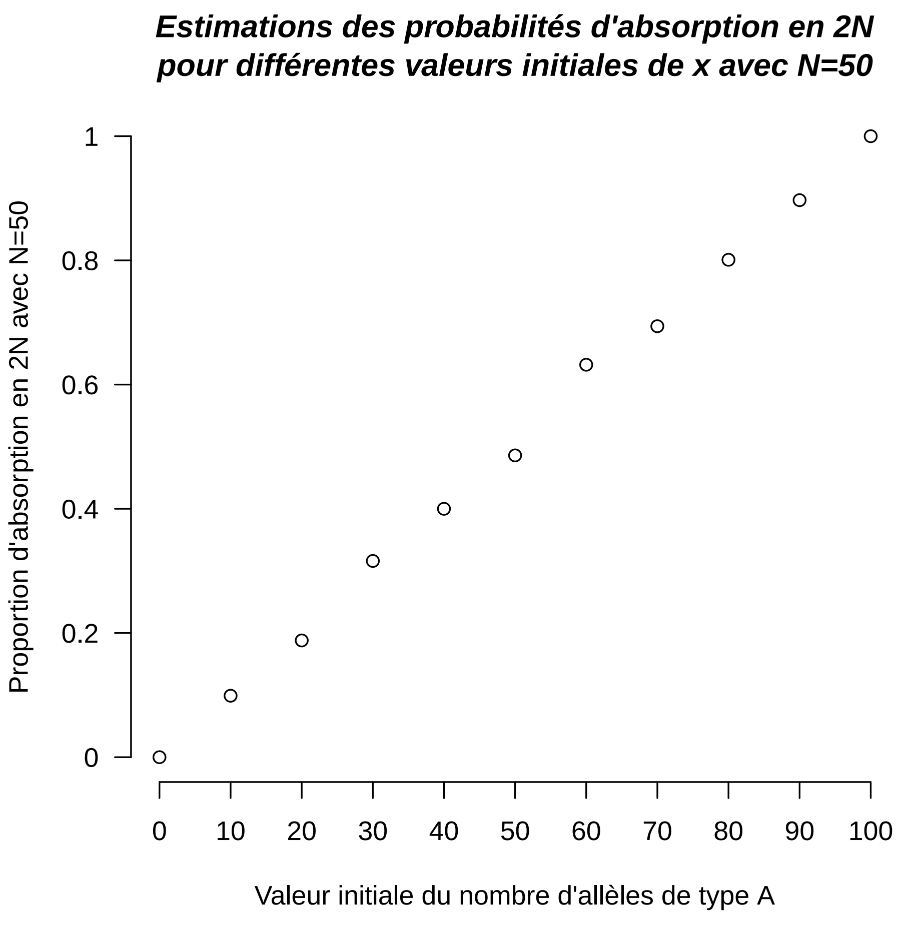
```
+        col.main="black", font.main=4)
```



4. *Donner une procédure pour estimer la probabilité que la chaîne soit absorbée en* $2N$ *en fonction du point de départ* x.
   Pour estimer la probabilité que la chaîne soit absorbée en $2N$ en fonction du point de départ x, on va lancer un grand nombre de trajectoires de la chaîne avec les mêmes paramètres N et x et calculer le rapport du nombre de fois où la chaîne a été absorbée en $2N$ sur le nombre de lancers. Quand le nombre de lancers est grand, cette proportion nous donnera un bon estimateur de la probabilité d'absorption en $2N$ partant de x.

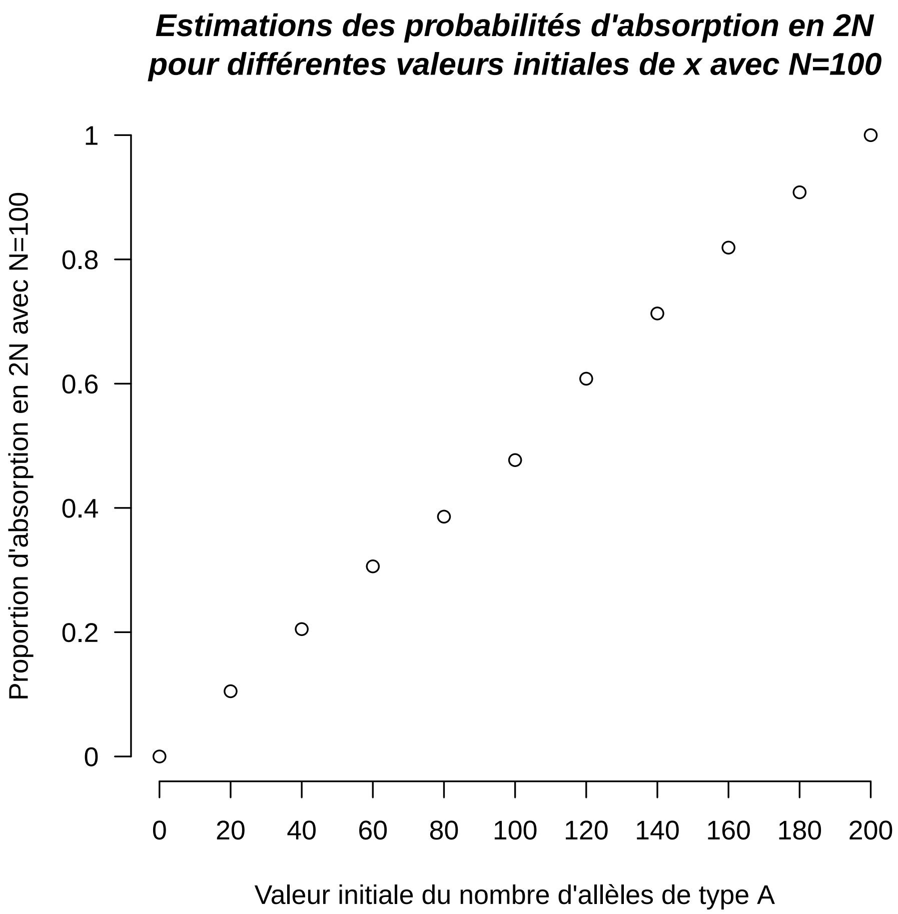
```
> Estimation <- function(N,x,NombreLancers)
+   {
+     Succes <- 0
+     for (i in 1:NombreLancers)
+       {
+         ## Initialiser le nombre d'allèles A initial à x
+         NombreA <- x
+         ## Condition d'arrêt sur l'absorption en 0 ou 2N
+         while ( NombreA * (2*N - NombreA) != 0)
+           {
+              NombreA <- rbinom(1,2*N,NombreA/(2*N));
+           }
+         ## Astuce pour  ajouter 1 à succès si NombreA = 2N et 0 sinon.
+         Succes <- Succes + NombreA/(2*N)
+       }
+     Succes/NombreLancers
+   }

> ## On fait quelques tests pour différents x avec N=50
```

```
> N <- 50;
> NombreLancers <- 1000;
> Esti <- c();
> for (x in 10*(0:10))
+   {
+     Esti <- c(Esti,Estimation(N,x,NombreLancers));
+   }
> plot((0:10), Esti, ylim=c(0,1), ann=FALSE, axes=FALSE )
> ## Personnalisation des axes
> axis(1, at=0:10, labels=10*(0:10))
> axis(2, at=0.2*(0:5), labels=0.2*(0:5),las=2)
> ## Ajout du nom des axes
> title(xlab="Valeur initiale du nombre d'allèles de type A")
> title(ylab=paste("Proportion d'absorption en 2N avec N=",N,sep=""))
> ## Ajout d'un titre
> title(main=paste("Estimations des probabilités d'absorption en 2N",
+         "\npour différentes valeurs initiales de x avec N=",N,sep=""),
+       col.main="black", font.main=4)
```




```
> ## On fait quelques tests pour différents x avec N=100
> N <- 100;
> NombreLancers <- 1000;
> Esti <- c();
> for (x in 20*(0:(N/10)))
+   {
+     Esti <- c(Esti,Estimation(N,x,NombreLancers));
+   }
> plot((0:10), Esti, ylim=c(0,1), ann=FALSE, axes=FALSE )
```

```
> ## Personnalisation des axes
> axis(1, at=0:10, labels=20*(0:(N/10)))
> axis(2, at=0.2*(0:5), labels=0.2*(0:5),las=2)
> ## Ajout du nom des axes
> title(xlab="Valeur initiale du nombre d'allèles de type A")
> title(ylab=paste("Proportion d'absorption en 2N avec N=",N,sep=""))
> ## Ajout d'un titre
> title(main=paste("Estimations des probabilités d'absorption en 2N",
+          "\npour différentes valeurs initiales de x avec N=",N,sep=""),
+        col.main="black", font.main=4)
```



5. *Une conjecture pour l'expression théorique ?*

   On constate que les estimations des probabilités d'absorption varient linéairement avec x et valent 0 en $x = 0$ et 1 en $x = 2N$. On conjecture donc que la probabilité d'absorption en $2N$ partant de x est $\frac{x}{2N}$.

1 Prise en compte des mutations

Supposons en plus des hypothèses du modèle basique précédent que l'allèle A mute en allèle B avec probabilité $u \in (0,1)$ et que l'allèle B mute en A avec probabilité $v \in (0,1)$.

1. *Si le nombre d'allèles A à la génération n est i, combien d'allèles de type A sont disponibles après mutations ?*

   Chaque allèle de type A a une probabilité u de muter en allèle B, parmi les i allèles de type A, il reste donc $i - ui = i(1-u)$ allèles de type A. Par ailleurs, parmi les $2N - i$ allèles de type B, $v(2N-i)$ allèles se sont transformées en allèles de type A. Au final, on a donc $i(1-u) + v(2N-i)$ allèles de type A disponibles pour la génération suivante.

2. *Expliciter les nouvelles probabilités de transition de la chaîne.*

   Chaque allèle de la génération $n+1$ est de type A avec probabilité $\frac{i(1-u)+v(2N-i)}{2N}$ et de type B avec probabilité $1-\frac{i(1-u)+v(2N-i)}{2N}$. Le nombre d'allèles de type A de la génération $n+1$ est donc distribuée suivant une loi binomiale de paramètres $2N$ et $\frac{i(1-u)+v(2N-i)}{2N}$. Ainsi, on obtient

$$\mathrm{p}(i,j) = \binom{2N}{j} (\phi_i)^j \left(1-\phi_i\right)^{2N-j}, \quad \text{avec} \quad \phi_i = \frac{i(1-u)+v(2N-i)}{2N}. \tag{1.1}$$

3. *Quel changement s'est il produit par rapport à la chaîne précédente ?*

   Comme u et v sont strictement compris entre 0 et 1, on constate que ϕ_i est aussi compris strictement entre 0 et 1 pour toute valeur de i. Ainsi pour tous états i et j, la quantité $\mathrm{p}(i,j)$ est strictement positive, ce qui implique que i mène à j et réciproquement. Ainsi l'ensemble $\{0,\dots,2N\}$ forme l'unique classe de communication de la chaîne et la chaîne est irréductible. Comme l'espace d'états de la chaîne est fini, d'après le théorème ergodique, on sait que la chaîne possède une unique mesure de probabilité invariante que l'on note π.

4. *À l'aide du logiciel* R*, calculer la mesure de probabilité invariante π de la chaîne pour $N=10$ et différents paramètres u et v.*

   Soit π l'unique mesure de probabilité invariante de la chaîne. On note P la matrice de transition dont les coefficients sont définis par (1.1). La mesure de probabilité π est alors caractérisée par

   (i) $\pi(i) > 0$ pour tout $i \in \{0,\dots,2N\}$;

   (ii) $\sum_{i=0}^{2N} \pi(i) = 1$;

   (iii) $\pi P = \pi$.

   Le point (iii) se réécrit $\pi(P-I)=0$ où est la matrice identité, mais encore $(P-I)^\top \pi^\top = 0$ où $M^\top$ désigne la transposée de la matrice M. Ceci équivaut à dire que le vecteur $\pi^\top$ est dans le noyau de la matrice $(P-I)^\top$, c'est-à-dire un vecteur propre de $P^\top$ associé à la valeur propre 1. On va donc rechercher un vecteur propre associé à la valeur propre 1 de $P^\top$ et le normaliser pour que les propriétés (i) et (ii) soient satisfaites.

```
> ## On introduit la matrice de transition P que l'on va remplir
> ## coefficient par coefficient. On remarque que P est de taille
> ## 2N+1 x 2N+1
> MatriceP =function(N,u,v)
+   {
+     P <- matrix(0,2*N+1,2*N+1);
+     for (i in (0:(2*N)))
+       {
+         ## on définit la probabilité phi_i
+         phi <- (i*(1-u) + v*(2*N-i))/ (2*N);
+         for (j in (0:(2*N)))
+           {
+             ## Calcul du coefficient à la ligne i+1 et à la colonne j+1.
+             ## Le +1 provient du fait que l'on ne peut pas indicé un vecteur
+             ## ou une matrice par zero et que donc tous les indices doivent
+             ## être translatés de +1.
+             ## choose(n,k) correspond au nombre de possibilités de tirer k
+             ## éléments parmi n
+             P[i+1,j+1] <- choose(2*N,j) * phi^j * (1-phi)^(2*N-j);
+           }
+       }
+     P;
+   }
```

```
> Mesure =function(N,u,v)
+   {
+     P <- MatriceP(N,u,v)
+     ## On recherche les valeurs propres et les vecteurs propres de P
+     ## D'après le théorème de Perron-Froboenius, toutes les valeurs
+     ## propres de P sont de module inférieur ou égal à 1. C'est donc le
+     ## cas pour la transposée de P également. Il s'avère que la fonction eigen
+     ## renvoie comme première valeur propre 1
+     res<-try(eigen(t(P)),silent=TRUE)
+     if(length(res)>1) { ## pas d'erreur dans eigen
+           y <- res$vector[,1];
+           y/sum(y);
+           }
+         else {
+           "Erreur"
+           }
+   }

> Mesure2 =function(N,u,v)
+   {
+     P <- MatriceP(N,u,v)
+     ## On recherche les valeurs propres et les vecteurs propres de P
+     ## D'après le théorème de Perron-Froboenius, toutes les valeurs
+     ## propres de P sont de module inférieur ou égal à 1. C'est donc le
+     ## cas pour la transposée de P également. Il s'avère que la fonction eigen
+     ## renvoie comme première valeur propre 1
+     for (i in 1:5)
+       {
+         P <- crossprod(t(P),P);
+       }
+     P
+   }

> system.time(P <- Mesure2(500,0.7,0.4),gcFirst = TRUE);

   user  system elapsed
 20.473   0.068  20.610

> pi <- P[1,];
> max(abs(pi %*% P - pi));

[1] 2.255834e-14
```

5. *À partir de quelle valeur de N, le logiciel ne parvient plus à calculer* π *?*
   Après exploration, on s'aperçoit que le N critique est 515.

Annexe C

Interrogations et DS

Interrogations de mathématiques n° 1

(Documents et calculatrices interdits)

Nom, Prénom :

– Vous recevez 1 point pour chaque réponse correcte et vous perdez 0.5 point pour chaque réponse incorrecte.
– Si vous ne répondez pas à une question, vous ne perdez ni ne gagnez aucun point.
– Vous ne pouvez pas avoir de note négative. Vous aurez donc au moins 0 et au plus 5.

Jasmine approche du terme de sa grossesse prévue en théorie à la date 17 juillet 2014 et on suppose que l'accouchement peut se produire chaque jour compris entre le 12 et le 23 juillet [a] (tous deux inclus, ce qui fait 12 jours possibles) avec équiprobabilité. Jasmine aimerait beaucoup que son nouveau-né soit du signe du cancer, c'est à dire qu'il ne naisse pas le 23 juillet.
On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le voeu de Jasmine est satisfait, et 0 sinon.

Rigobert, le conjoint de Jasmine , a assisté au parcours flamboyant de son équipe nationale à la coupe du monde de football, et il aimerait beaucoup pouvoir assister à la finale ayant lieu le 13 juillet avant que l'accouchement ne se produise.
On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si le voeu de Rigobert est satisfait (à savoir le bébé n'arrive ni le 12 ni le 13 juillet), et 0 sinon.

On définit par ailleurs la variable aléatoire Z qui vaut 1 si les voeux des deux conjoints sont réalisés, et 0 sinon. On a alors :

	Vrai	Faux
• Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{4}$.	☐	☐
• X et Z sont indépendantes.	☐	☐
• $Z = XY$.	☐	☐
• $\mathbb{E}(X+Y) = \frac{21}{12}$.	☐	☐
• $\mathbb{V}\text{ar}(X+Y) = \frac{31}{144}$.	☐	☐

a. estimation non scientifique et fantaisiste

Interrogations de mathématiques nº 2

(Documents et calculatrices interdits)

Nom, Prénom :

– Vous recevez 1 point pour chaque réponse correcte et vous perdez 0.5 point pour chaque réponse incorrecte.
– Si vous ne répondez pas à une question, vous ne perdez ni ne gagnez aucun point.
– Vous ne pouvez pas avoir de note négative. Vous aurez donc au moins 0 et au plus 5.

Soient a un nombre réel et A_a le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $A_a = [a, +\infty[$. Alors

	Vrai	Faux
• $A_1 \subset A_2$.	☐	☐
• $a + 1 \in A_a$.	☐	☐
• $[-1, 3[= A_{-1} \setminus A_3$.	☐	☐
• $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{1}_{A_1}(x) \leqslant x$.	☐	☐
• $\forall x \geqslant 0,\ \mathbb{1}_{A_1}(x) \leqslant x^2$.	☐	☐

Université d'Évry Val d'Essonne — *Lundi 31 mars*
L3 GBI, 2^{nd} semestre 2013–2014 — *Durée : 10 min*

Interrogations de mathématiques n° 3

(Documents et calculatrices interdits)

Nom, Prénom :

- Vous recevez 1 point pour chaque réponse correcte et vous perdez 0.5 point pour chaque réponse incorrecte.
- Si vous ne répondez pas à une question, vous ne perdez ni ne gagnez aucun point.
- Vous ne pouvez pas avoir de note négative. Vous aurez donc au moins 0 et au plus 5.

Soient P et Q les deux matrices de transition suivantes

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0.3 & \cdot & 0.1 \\ 1 & \cdot & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 0.2 & 0.6 & 0.4 \end{array} \qquad Q = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0.8 & \cdot & 0.1 \\ 1 & \cdot & 0.2 & 0.5 \\ 2 & 0 & 0.6 & \cdot \end{array}.$$

On note $\mathrm{p}(\cdot,\cdot)$ et $\mathrm{q}(\cdot,\cdot)$ les probabilités de transition respectivement associées à P et Q. Soient $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$ les deux diagrammes suivants.

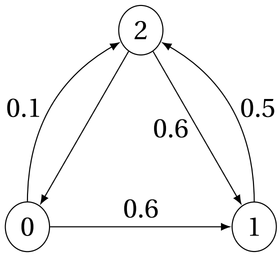


Diagramme $\mathscr{G}_1$

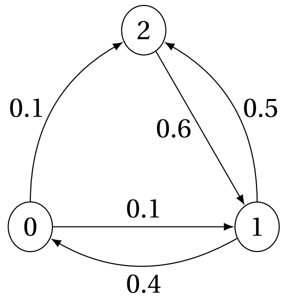


Diagramme $\mathscr{G}_2$

Alors,

	Vrai	Faux
• $\mathrm{p}(0,1) = 0.1$	☐	☐
• $\mathrm{q}(1,0) = 0.3$	☐	☐
• Le diagramme $\mathscr{G}_2$ correspond à la matrice de transition P.	☐	☐
• Le diagramme $\mathscr{G}_1$ correspond à la matrice de transition P.	☐	☐
• Le diagramme $\mathscr{G}_2$ correspond à la matrice de transition Q.	☐	☐

Interrogation de mathématiques n° 4

(Documents et calculatrices interdits)

Nom, Prénom :

- Vous recevez 1 point pour chaque réponse correcte et vous perdez 0.5 point pour chaque réponse incorrecte.
- Si vous ne répondez pas à une question, vous ne perdez ni ne gagnez aucun point.
- Vous ne pouvez pas avoir de note négative. Vous aurez donc au moins 0 et au plus 5.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov de matrice de transition P donnée par

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

et telle que $X_0 = 0$.

Alors,

	Vrai	Faux
• $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 2/3$.	☐	☐
• $\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1/12$.	☐	☐
• Pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 0)$.	☐	☐
• Pour tout $n \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 0)$.	☐	☐
• La mesure de probabilité $(1/3 \quad 1/3 \quad 1/3)$ est invariante pour P.	☐	☐

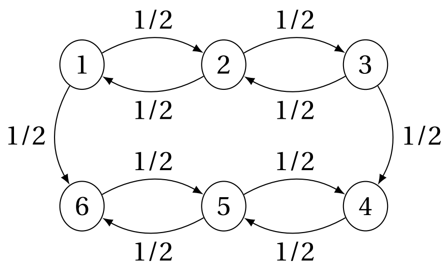
Interrogation de mathématiques n° 5

(Documents et calculatrices interdits)

Nom, Prénom :

- Vous recevez 1 point pour chaque réponse correcte et vous perdez 0.5 point pour chaque réponse incorrecte.
- Si vous ne répondez pas à une question, vous ne perdez ni ne gagnez aucun point.
- Vous ne pouvez pas avoir de note négative. Vous aurez donc au moins 0 et au plus 5.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la chaîne de Markov de loi initiale μ et de matrice de transition P dont le diagramme correspond à



Alors,

	Vrai	Faux
• $\mathrm{p}(1,1) = \frac{1}{2}$.	☐	☐
• $\mathbb{P}(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = \frac{1}{4}$.	☐	☐
• 1 mène à 4.	☐	☐
• $\{1,2,3\}$ est une classe de communication fermée.	☐	☐
• La chaîne est irréductible.	☐	☐

Interrogation de mathématiques n^o 6

(Documents et calculatrices interdits)

Nom, Prénom :

– Vous recevez 1 point pour chaque réponse correcte et vous perdez 0.5 point pour chaque réponse incorrecte.
– Si vous ne répondez pas à une question, vous ne perdez ni ne gagnez aucun point.
– Vous ne pouvez pas avoir de note négative. Vous aurez donc au moins 0 et au plus 5.

Soit P la matrice de transition suivante

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Alors,

	Vrai	Faux
• L'état 3 mène à l'état 1.	☐	☐
• L'état 2 communique avec l'état 3.	☐	☐
• L'ensemble $\{1,2\}$ est une classe de communication fermée.	☐	☐
• L'état 3 est absorbant.	☐	☐
• La loi $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ est invariante pour P.	☐	☐

Devoir surveillé de MB61

(Documents et calculatrices interdits)

- Une bonne rédaction et une présentation claire sont des éléments d'appréciation importants pour les copies.
- Il est permis d'admettre un résultat et de répondre aux questions suivantes en l'utilisant.
- Les trois exercices sont indépendants.
- **Il est recommandé de lire l'intégralité du sujet et de commencer par ce qui vous semble le plus facile.**

Exercice 1

Trois skieurs, désignés par s_1, s_2 et s_3, prennent leur repas dans un restaurant d'altitude où ils ont chacun déposé leur paire de skis à l'entrée, désignées par p_1, p_2 et p_3. Pour tout i dans $\{1,2,3\}$, la paire p_i appartient au skieur s_i.

Après le repas, les skieurs sont incapables de reconnaître convenablement leur paire de skis et ils décident de se les répartir aléatoirement entre eux pour le reste de l'après-midi. Chaque skieur repart alors avec exactement une paire de skis.

Pour tout entier i dans $\{1,2,3\}$, on note A_i l'évènement « s_i repart avec la paire p_i ». On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de skieurs repartis avec leur propre paire de skis.

1. Quelles sont les valeurs possibles de X ?
2. Écrire en fonction de A_1, A_2 et A_3 les évènements suivants : $[X = 0]$, $[X = 1]$ et $[X = 3]$.
3. Donner l'ensemble des répartitions possibles à l'aide d'un tableau.
4. En supposant que toutes les répartitions sont équiprobables, donner la loi de X.
5. Calculer la moyenne et la variance de X.

Exercice 2

Soient θ un paramètre fixé dans $]0,1[$ et n un entier non nul. Nous supposons qu'une séquence d'ADN de longueur n est modélisée par une suite de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ à valeurs dans l'alphabet des nucléotides $\mathscr{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{t}, \mathrm{c}, \mathrm{g}\}$ indépendantes et équidistribuées suivant la loi

$$\mathbb{P}(X_i = \mathrm{c}) = \mathbb{P}(X_i = \mathrm{g}) = \theta/2, \quad \mathbb{P}(X_i = \mathrm{a}) = \mathbb{P}(X_i = \mathrm{t}) = (1-\theta)/2.$$

On note $A = \{\mathrm{c}, \mathrm{g}\}$ et pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, on désigne par Y_i la variable aléatoire définie par

$$Y_i = \mathbb{1}_A(X_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \in A, \\ 0 & \text{si } X_i \notin A. \end{cases}$$

On note GC_n la variable aléatoire définie par

$$\mathrm{GC}_n = \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

qui représente le taux de GC dans la séquence, c'est à dire la proportion de bases dans la séquence d'ADN qui sont soit une cytosine, soit une guanine.

1. Les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont elles indépendantes ?
2. Quelle est la loi de Y_i, pour i dans $\{1, \ldots, n\}$?
3. Calculer l'espérance et la variance de GC_n.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\big(|\mathrm{GC}_n - \theta| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\theta(1-\theta)}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

Pour tout i dans $\{1, \ldots, n-1\}$, on désigne par Z_i la variable aléatoire définie par

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i = \mathrm{c} \text{ et } X_{i+1} = \mathrm{g}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note CpG_n la variable aléatoire définie par

$$\mathrm{CpG}_n = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

qui représente la proportion de dinucléotides cg dans la séquence, c'est à dire la proportion de bases dans la séquence d'ADN qui sont une cytosine suivie d'une guanine.

5. Quelle est la loi de Z_i, pour i dans $\{1, \ldots, n-1\}$?
6. Les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont elles indépendantes ?
7. Les variables aléatoires Z_1 et Z_3 sont elles indépendantes ?
8. Calculer l'espérance de CpG_n.
9. A-t on $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathrm{CpG}_n) = \frac{\theta^2(1-\theta^2)}{16n}$?
10. On admet que $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathrm{CpG}_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que CpG_n converge vers $\theta^2/4$ en probabilité.

Sur une base de données de 545 gènes humains, on trouve un taux de GC de 55% dans les régions codantes (exons).

11. Si ces portions de séquence d'ADN suivent le modèle décrit ici, quel est la proportion de dinucléotides cg attendue ? On approchera 55^2 par 3024.
12. On observe une proportion de dinucléotides cg deux fois plus petite qu'attendue. Que faut-il en conclure ?

Exercice 3

Soit Y une variable aléatoire prenant les valeurs 1 et -1 avec probabilité $1/2$.

1. Calculer l'espérance de Y.
2. Calculer $\mathbb{P}(Y \geqslant 1)$.

La suite est consacrée à la démonstration de l'inégalité de Markov : soit X une variable aléatoire à valeurs positives, alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Pour tout nombre réel $a > 0$, on note A_a l'ensemble $[a, +\infty[$.

3. L'hypothèse « à valeurs positives » est elle nécessaire pour avoir l'inégalité de Markov.
4. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $\mathbb{1}_{A_a}(x) \leqslant \frac{x}{a}$.
5. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_a}(X)$? Donner son espérance.
6. Démontrer l'inégalité de Markov.

Fin

Corrigé du devoir surveillé de MB61

Exercice 1

1. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\{0,1,3\}$. On remarque que la valeur 2 n'est pas possible puisque si deux skieurs ont la bonne paire de skis, le troisième a forcément la bonne également.
2. Nous avons

$$\begin{aligned}
[X=0] &= A_1^{\complement} \cap A_2^{\complement} \cap A_3^{\complement},\\
[X=1] &= \left(A_1 \cap A_2^{\complement} \cap A_3^{\complement}\right) \cup \left(A_1^{\complement} \cap A_2 \cap A_3^{\complement}\right) \cup \left(A_1^{\complement} \cap A_2^{\complement} \cap A_3\right),\\
[X=3] &= A_1 \cap A_2 \cap A_3.
\end{aligned}$$

3.

s_1	s_2	s_3	Valeur de X
p_1	p_2	p_3	3
p_1	p_3	p_2	1
p_2	p_1	p_3	1
p_2	p_3	p_1	0
p_3	p_1	p_2	0
p_3	p_2	p_1	1

4. Le nombre de répartitions possibles est de 6. Puisque nous sommes en situation d'équiprobabilité, pour calculer la probabilité d'un évènement, il suffit de calculer la proportion d'issues favorables. Nous avons

$$\mathbb{P}(X=0)=1/3, \quad \mathbb{P}(X=1)=1/2, \quad \mathbb{P}(X=3)=1/6.$$

5. Nous avons

$$\mathbb{E}(X)=0\cdot\mathbb{P}(X=0)+1\cdot\mathbb{P}(X=1)+3\cdot\mathbb{P}(X=3)=1$$

et

$$\mathbb{E}(X^2)=0^2\cdot\mathbb{P}(X=0)+1^2\cdot\mathbb{P}(X=1)+3^2\cdot\mathbb{P}(X=3)=2,$$

d'où

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=\mathbb{E}(X^2)-[\mathbb{E}(X)]^2=1.$$

Exercice 2

1. Puisque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes.
2. Chaque Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_i \in A)=\theta$.
3. Nous avons

$$\mathbb{E}(\mathrm{GC}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Y_i)=\theta,$$

et puisque les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathrm{GC}_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_i)=\frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

4. En applicant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à GC_n on obtient l'inégalité demandée.
5. Chaque variable aléatoire Z_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\theta^2/4$. En effet, le paramètre est donné par

$$\mathbb{P}(X_i=\mathrm{c}, X_{i+1}=\mathrm{g})=\mathbb{P}(X_i=\mathrm{c})\cdot\mathbb{P}(X_{i+1}=\mathrm{g})=(\theta/2)\cdot(\theta/2),$$

où l'on a utilisé l'indépendance de X_i avec X_{i+1}.

6. Les variables aléatoires Z_1 et Z_2 ne sont pas indépendantes puisque par exemple

$$0 = \mathbb{P}(Z_1 = 1, Z_2 = 1) \neq \mathbb{P}(Z_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(Z_2 = 1) > 0.$$

En effet, les évènements $[Z_1 = 1]$ et $[Z_2 = 1]$ sont incompatibles. Ceci vient du fait que si $[Z_1 = 1]$ est réalisé alors $[X_2 = \mathrm{g}]$ est réalisé tandis que si $[Z_2 = 1]$ est réalisé alors $[X_2 = \mathrm{c}]$ est réalisé. Or, les évènements $[X_2 = \mathrm{c}]$ et $[X_2 = \mathrm{g}]$ ne peuvent être réalisés simultanément. On a donc $\mathbb{P}(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = 0$. En revanche, nous avons

$$\mathbb{P}(Z_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = \mathrm{c}) \cdot \mathbb{P}(X_2 = \mathrm{g}) > 0, \quad \mathbb{P}(Z_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = \mathrm{c}) \cdot \mathbb{P}(X_3 = \mathrm{g}) > 0.$$

7. Les variables aléatoires Z_1 et Z_3 sont indépendantes. En effet, Z_1 ne dépend que de X_1 et X_2 tandis que Z_3 ne dépend que de X_3 et X_4. Or, puisque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, les valeurs prises par X_1 et X_2 n'influencent pas les valeurs prises par X_3 et X_4, et réciproquement.
8. Nous avons
$$\mathbb{E}(\mathrm{CpG}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i) = \theta^2/4.$$
9. Puisque les variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_n$ ne sont pas indépendantes, nous ne pouvons pas écrire la variance de CpG_n comme une somme. On peut calculer cette variance en revenant à la formule
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathrm{CpG}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{CpG}_n^2) - [\mathbb{E}(\mathrm{CpG}_n)]^2,$$
et il s'avère qu'elle diffère effectivement de $\frac{\theta^2(1-\theta^2)}{16n}$.
10. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à CpG_n donne la convergence en probabilité de CpG_n vers $\theta^2/4$.
11. D'après la question 4, si le modèle utilisé est celui de l'exercice, quand n est grand, ce qui est le cas ici puisque qu'on regarde les exons de 545 gènes, le taux de GC de la séquence est proche de θ. Or on nous donne un taux de GC observé de 55%, on en déduit donc que θ est proche de 55%. Par ailleurs, toujours sous ce même modèle, la proportion de dinucléotides cg converge en probabilité vers $\theta^2/4$. On s'attend donc à observer une proportion proche de $(55\%)^2/4 \approx 7{,}56\%$.
12. Suite à l'observation, on peut se demander si le modèle utilisé pour la séquence est le bon ou s'il faut le rejeter. Il conviendrait donc de mettre en place un test pour décider si la différence observée provient des fluctuations naturelles du modèle ou bien si c'est le modèle qui n'est pas adaptée à l'étude des données.

Exercice 3

1. Nous avons
$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(Y = -1) = 0.$$
2. Nous avons $\mathbb{P}(Y \geqslant 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 1/2$.
3. D'après les questions 1 et 2, on voit que l'hypothèse « à valeurs positives » est nécessaire pour avoir l'inégalité de Markov puisque dans ce cas elle n'est pas vérifiée.
4. Soit $x \geqslant 0$. Montrons que $\mathbb{1}_{A_a}(x) \leqslant \frac{x}{a}$. Nous pouvons distinguer deux cas.
Si $x < a$ alors $\mathbb{1}_{A_a}(x) = 0$ et $\frac{x}{a} \geqslant 0$, donc l'inégalité est vérifiée.
Si $x \geqslant a$ alors $\mathbb{1}_{A_a}(x) = 1$ et $\frac{x}{a} \geqslant 1$, donc l'inégalité est vérifiée.
5. La variable aléatoire $\mathbb{1}_{A_a}(X)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X \in A_a) = \mathbb{P}(X \geqslant a)$. Son espérance est donc $\mathbb{P}(X \geqslant a)$.
6. Soit X une variable aléatoire à valeurs positives. Nous avons alors
$$\mathbb{1}_{A_a}(X) \leqslant \frac{X}{a},$$
ce qui entraîne
$$\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{A_a}(X)\big) \leqslant \mathbb{E}\Big(\frac{X}{a}\Big).$$
Or le membre de gauche vaut $\mathbb{P}(X \geqslant a)$ et celui de droite $\frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

Bibliographie

Ruegg, A. (1989). *Processus stochastiques*, Volume 6 of *Méthodes Mathématiques pour l'Ingénieur [Mathematical Methods for the Engineer]*. Lausanne : Presses Polytechniques Romandes. Avec applications aux phénomènes d'attente et de fiabilité. [With applications to queueing and reliability].