



L3 GBI, 2nd semestre 2012–2013

Examen de Chaînes de Markov

Lundi 27 mai 2013, de 13h15 à 15h15.

- ▶ Seul le document distribué avec le sujet est autorisé.
 - ▶ Les deux exercices et le problème sont indépendants.
 - ▶ Une bonne rédaction est un élément d'appréciation important pour les copies.
 - ▶ Il est permis d'admettre un résultat et de répondre aux questions suivantes en l'utilisant.
-

Exercice 1

Soit S l'espace d'états défini par $S = \{1, \dots, 6\}$.

1. Compléter la matrice P suivante pour qu'elle soit une matrice de transition sur S .

$$P = \begin{pmatrix} \cdot & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \cdot & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \cdot \end{pmatrix}$$

2. Dessiner le diagramme de transition associé à la matrice P .
 3. Décomposer S en classes de communication en justifiant de manière concise votre démarche.
 4. Déterminer les états récurrents.
-

Exercice 2

Une urne contient deux boules rouges et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne ;
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n -ème tirage et on pose $X_0 = 2$.

Pour tout entier $i \geq 1$, on note B_i (respectivement R_i) l'évènement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) lors du i -ème tirage ».

1. Écrire les évènements $[X_1 = 2]$ et $[X_1 = 1]$ en fonction de B_1 et R_1 et calculer les probabilités $\mathbb{P}(X_1 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles de X_n pour $n \geq 2$?

On admet que (X_n) est une chaîne de Markov.

3. Dessiner le diagramme correspondant à la matrice de transition de (X_n) et justifier les probabilités de transition calculées.

On considère les matrices M et U_n définies par

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a l'égalité

$$U_{n+1} = MU_n.$$

5. Montrer par récurrence que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier n .

On admet qu'il existe un unique triplet de réels (a, b, c) tels que pour tout entier n

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = 1) &= a \left(\frac{2}{3}\right)^n + b \left(\frac{1}{2}\right)^n, \\ \mathbb{P}(X_n = 2) &= c \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

6. Montrer que $a = 3$, $b = -3$ et $c = 1$.
7. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, l'espérance de X_n , ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

On note T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

8. Donner la loi de T_1 .
9. Écrire les évènements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des évènements B_i et R_i . En déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}(T_2 = 2)$ et $\mathbb{P}(T_2 = 3)$.
10. Pour tout entier $n \geq 2$, écrire l'évènement $[T_2 = n]$ en fonction des évènements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(T_2 = n)$.

Problème

Le modèle de Moran étudie l'évolution de deux allèles A et B en compétition au sein d'une population de taille constante N , où N est un entier naturel non nul. Les deux allèles sont considérés comme étant des répliqueurs parfaits, c'est-à-dire, étant capables de faire des copies exactes d'eux-mêmes.

À chaque étape, on choisit un individu au hasard pour se reproduire, on le remplace dans la population puis, indépendamment du premier tirage, on choisit au hasard un individu pour mourir. Le premier individu choisi crée une copie de lui-même tandis que le second est supprimé définitivement. Ce procédé permet ainsi de maintenir une population de taille constante au cours du temps. Le choix du même individu pour la reproduction et pour la mort au cours d'une étape est possible.

On considère donc une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout entier n la variable aléatoire X_n représente le nombre d'allèles de type A dans la population après n étapes d'évolution. Pour tous entiers i et j compris entre 0 et N , on note $p(i, j)$ la probabilité de transition définie par $p(i, j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$.

1. Justifier que

$$p(0, 0) = p(N, N) = 1,$$

puis que pour tout entier i compris entre 1 et $N - 1$

$$p(i, j) = \begin{cases} \frac{i}{N} \cdot \frac{N-i}{N} & \text{si } j = i + 1, \\ \frac{i}{N} \cdot \frac{i}{N} & \text{si } j = i - 1, \\ \frac{i^2}{N^2} + \frac{(N-i)^2}{N^2} & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Dessiner le diagramme des transitions de la chaîne.
3. Quelles sont les classes de communication de la chaîne ? Justifier.
4. On s'intéresse à la probabilité de fixation de l'allèle A dans la population. On note F l'évènement $[(X_n) \text{ touche } N \text{ avant } 0]$ et pour tout entier i compris entre 0 et N , on désigne par h_i la probabilité que F soit réalisé sachant que la chaîne part de i , c'est-à-dire,

$$h_i = \mathbb{P}(F \mid X_0 = i).$$

- (a) Justifier que $h_0 = 0$, $h_N = 1$ et pour tout entier i compris entre 1 et $N - 1$

$$h_i = \frac{1}{2}(h_{i-1} + h_{i+1}).$$

- (b) Montrer par récurrence que $h_i = i \cdot h_1$ pour tout entier i compris entre 0 et N .
- (c) En déduire que $h_i = \frac{i}{N}$ pour tout entier i compris entre 0 et N .

Fin du sujet