

Corrigé de l'examen de MB61

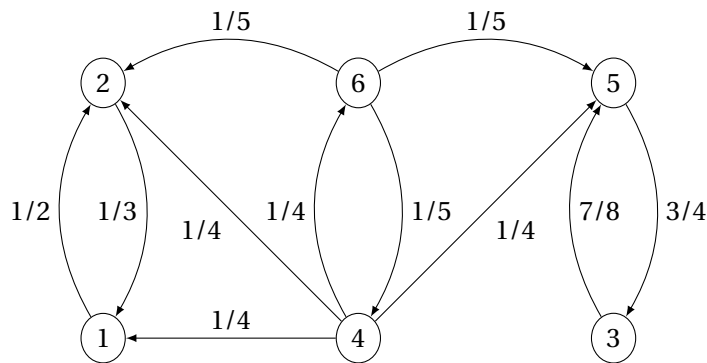
Lundi 27 mai 2013, de 13h15 à 16h15.

Exercice 1

1. Pour que la matrice P soit une matrice de transition il faut et il suffit que tous ses coefficients soient positifs et que la somme des coefficients sur chaque ligne soit égale à 1. Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

2. Voici le diagramme de transition associé à la matrice P .

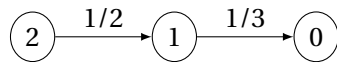


3. On constate que 1 communique avec 2. En effet, on a $p(1,2) > 0$ et $p(2,1) > 0$ ce qui implique que 1 mène à 2 et que 2 mène à 1. En revanche, 2 ne mène à aucun autre état, tout comme 1. Ainsi $\{1,2\}$ forme une première classe de communication. De même, $\{3,5\}$ forme une autre classe de communication. Finalement, $\{4,6\}$ forme la dernière classe de communication de la chaîne.
4. Les classes $\{1,2\}$ et $\{5,6\}$ sont fermées et finies, tous leurs états sont récurrents. Les états 4 et 6 sont quant à eux transitoires puisqu'ils sont dans une classe non fermée.

Exercice 2

1. On a $[X_1 = 2] = R_1$ et $[X_1 = 1] = B_1$. Ainsi, $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$.

- Les valeurs possibles de X_n pour $n \geq 2$ sont 0, 1 et 2 puisqu'après deux tirages peuvent se trouver 0, 1 ou 2 boules blanches à l'intérieur de l'urne.
- Le diagramme correspondant à la matrice de transition de (X_n) est le suivant.



Le nombre de boules blanches dans l'urne ne peut pas augmenter, on a donc

$$p(0, 1) = p(1, 2) = 0.$$

De plus, on ne peut piocher qu'une seule boule blanche à la fois donc le nombre de boules blanches dans l'urne ne peut pas passer de 2 à 0, d'où $p(2, 0) = 0$. Il reste donc à calculer les probabilités de transition $p(2, 1) = 1 - p(2, 2)$ et $p(1, 0) = 1 - p(1, 1)$ qui sont respectivement données par $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

- Soit un entier $n \geq 2$. On peut écrire pour tout $x \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = x) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = x, X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = x, X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = x, X_n = 2) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = 0)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = 2)\mathbb{P}(X_n = 2) \\ &= p(0, x)\mathbb{P}(X_n = 0) + p(1, x)\mathbb{P}(X_n = 1) + p(2, x)\mathbb{P}(X_n = 2), \end{aligned}$$

où le conditionnement est possible car $\mathbb{P}(X_n = x) > 0$ quand $n \geq 2$. Quand $x = 1$, l'égalité précédente s'écrit

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X_n = 2),$$

ce qui correspond au produit de la première ligne de la matrice M avec le vecteur U_n . Quand $x = 2$, on trouve cette fois

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(X_n = 2),$$

ce qui correspond au produit de la deuxième ligne de la matrice M avec le vecteur U_n . Finalement, on a bien

$$U_{n+1} = MU_n,$$

pour tout entier $n \geq 2$. Cette égalité reste vraie quand n est égal à 0 ou 1.

- Soit (H_n) le prédicat de récurrence défini pour tout entier n par « $U_n = M^n U_0$ ». Puisque par convention $M^0 = I_2$ avec I_2 la matrice identité en dimension 2, on a bien $M^0 U_0 = I_2 U_0 = U_0$ et (H_0) est vrai. Soit n un entier, supposons que (H_n) est vrai et montrons que (H_{n+1}) est vrai. D'après la question 4, nous avons $U_{n+1} = MU_n$ et d'autre part $U_n = M^n U_0$ puisque (H_n) est vraie. En combinant ces deux égalités, on obtient $U_{n+1} = M^{n+1} U_0$. Par principe de récurrence, on vient de montrer que (H_n) est vrai pour tout entier n .

6. D'après l'énoncé et la question 1, on a

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = a + b = 0, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_0 = 2) = c = 1.$$

On en déduit que $a = 3$, $b = -3$ et $c = 1$.

7. On a

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{P}(X_n = 1) + 2 \cdot \mathbb{P}(X_n = 2) = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^n - \left(\frac{1}{2} \right)^n,$$

et on en déduit que $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

8. On a $[T_1 = 1] = B_1$ et $[T_1 = k] = R_1 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap B_k$, pour $k \geq 2$, d'où

$$\mathbb{P}(T_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(T_1 = k) = \mathbb{P}(R_1 \cap \dots \cap R_{k-1} \cap B_k) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^k.$$

Ainsi on voit que T_1 suit une loi géométrique de probabilité de succès $\frac{1}{2}$.

9. On a $[T_2 = 2] = B_1 \cap B_2$ et $[T_2 = 3] = (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap B_3)$. On a donc

$$\mathbb{P}(T_2 = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

et

$$\mathbb{P}(T_2 = 3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{36}.$$

10. Pour tout entier $n \geq 2$, on a $[T_2 = n] = [X_{n-1} = 1, X_n = 0]$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(T_2 = n) = \mathbb{P}(X_n = 0, X_{n-1} = 1) = p(1, 0) \cdot \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) = \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

Problème

1. Quand la population est composée uniquement d'allèles B , ce qui correspond à l'état 0, on ne peut plus créer d'allèles A et l'allèle B est fixé dans la population. Ainsi, on a bien $p(0, 0) = 1$. De même quand la population est composée uniquement d'allèles A , ce qui correspond à l'état N , on ne peut plus créer d'allèles B et l'allèle A est fixé dans la population. Ainsi, on a bien $p(N, N) = 1$.

Soit i un entier compris entre 1 et $N - 1$. La population comporte donc i allèles A et $N - i$ allèles B . Comme on crée une seule copie d'allèle par étape, le nombre d'allèles A dans la population ne peut pas augmenter de plus de 1. Ainsi, on a $p(i, j) = 0$ pour tout entier $j \geq i + 2$. De même, comme on supprime un seul allèle dans la population, le nombre d'allèles A ne peut pas diminuer de plus de 1. Ainsi, on a $p(i, j) = 0$ pour tout entier $j \leq i - 2$. Il reste donc à calculer les probabilités de transition $p(i, i + 1)$, $p(i, i - 1)$ et $p(i, i)$.

La seule manière de passer de i allèles A dans la population à $i + 1$ allèles A est de copier un allèle A et de supprimer un allèle B . Un allèle A est choisi pour être copié avec

probabilité $\frac{i}{N}$ et un allèle B est choisi pour être supprimé avec probabilité $\frac{N-i}{N}$. On a donc bien $p(i, i+1) = \frac{i}{N} \cdot \frac{N-i}{N}$.

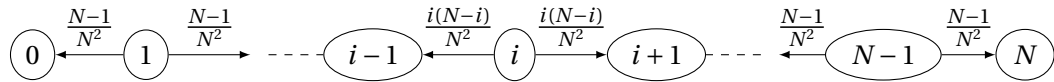
La seule manière de passer de i allèles A dans la population à $i-1$ allèles A est de copier un allèle B et de supprimer un allèle A . Un allèle B est choisi pour être copié avec probabilité $\frac{N-i}{N}$ et un allèle A est choisi pour être supprimé avec probabilité $\frac{i}{N}$. On a donc bien $p(i, i-1) = \frac{i}{N} \cdot \frac{N-i}{N}$.

Finalement, comme

$$p(i, i-1) + p(i, i) + p(i, i+1) = 1,$$

on en déduit que $p(i, i) = \frac{i^2}{N^2} + \frac{(N-i)^2}{N^2}$. Cette probabilité peut aussi s'obtenir en remarquant qu'il y a deux manières possibles de conserver le même nombre d'allèles A dans la population : la première en copiant un allèle A et en supprimant un allèle A ce qui arrive avec probabilité $\frac{i}{N} \cdot \frac{i}{N}$; la seconde en copiant un allèle B et en supprimant un allèle B ce qui arrive avec probabilité $\frac{N-i}{N} \cdot \frac{N-i}{N}$.

2. Le diagramme des transitions de la chaîne est le suivant.



3. Les états 0 et N sont absorbants, on a donc deux classes de communication réduites à un seul état : $\{0\}$ et $\{N\}$. D'autre part, on constate que $p(1,2) > 0$ et $p(2,1) > 0$ donc 1 communique avec 2. De même, 2 communique avec 3, et ainsi de suite jusqu'à $N-2$ qui communique avec $N-1$. On en déduit donc que $\{1, \dots, N-1\}$ est l'autre classe de communication de la chaîne.

4. (a) Lorsque la chaîne part de 0, l'évènement F n'est jamais réalisé, on a donc $h_0 = 0$. Au contraire quand la chaîne part de N , l'évènement F est toujours réalisé et on a $h_N = 1$.

Soit i un entier compris entre 1 et N . Il vient en regardant le premier pas de la chaîne

$$h_i = \mathbb{P}(F | X_0 = i) = \mathbb{P}(F, X_1 = i-1 | X_0 = i) + \mathbb{P}(F, X_1 = i | X_0 = i) + \mathbb{P}(F, X_1 = i+1 | X_0 = i).$$

Or, en utilisant la définition du conditionnement et la propriété de Markov, on obtient

$$\mathbb{P}(F, X_1 = i-1 | X_0 = i) = \mathbb{P}(F | X_0 = i-1)p(i, i-1) = p(i, i-1)h_{i-1},$$

$$\mathbb{P}(F, X_1 = i | X_0 = i) = \mathbb{P}(F | X_0 = i)p(i, i) = p(i, i)h_i,$$

$$\mathbb{P}(F, X_1 = i+1 | X_0 = i) = \mathbb{P}(F | X_0 = i+1)p(i, i+1) = p(i, i+1)h_{i+1}.$$

On a donc

$$h_i = p(i, i-1)h_{i-1} + p(i, i)h_i + p(i, i+1)h_{i+1},$$

qui est équivalent à

$$[1 - p(i, i)]h_i = p(i, i - 1)h_{i-1} + p(i, i + 1)h_{i+1}.$$

En remarquant que

$$p(i, i - 1) = p(i, i + 1) = \frac{1}{2}[1 - p(i, i)],$$

on obtient finalement que

$$h_i = \frac{1}{2}(h_{i-1} + h_{i+1}).$$

- (b) Soit (H_i) le prédicat de récurrence défini pour tout entier i compris entre 0 et N par « $h_i = i \cdot h_1$ ». Puisque l'on a $h_0 = 0$ et $0 \cdot h_1 = 0$, (H_0) est vrai. D'autre part, (H_1) est toujours vrai. Soit i un entier compris entre 1 et $N - 1$, supposons que (H_{i-1}) et (H_i) sont vrais et montrons que (H_{i+1}) est vrai. D'après la question 4(a), nous avons $h_i = \frac{1}{2}(h_{i-1} + h_{i+1})$ et d'autre part $h_i = i \cdot h_1$ et $h_{i-1} = (i - 1) \cdot h_1$ puisque (H_{i-1}) et (H_i) sont vrais. En combinant ces trois égalités, on obtient $h_{i+1} = (i + 1) \cdot h_1$. Par principe de récurrence, on vient de montrer que (H_i) est vrai pour tout entier i compris entre 0 et N .
- (c) On a vu d'une part que $h_N = 1$ et d'autre part que $h_N = N \cdot h_1$. On en déduit donc que $h_1 = \frac{1}{N}$ puis que $h_i = \frac{i}{N}$ pour tout entier i compris entre 0 et N .
-