

**Théorème de convergence dominée** : soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle non-dégénéré,  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions réglées (ou continues par morceaux) de  $I$  vers  $(E, \|\cdot\|)$  evn de dimension finie. Si :

- $(\varphi_n) \xrightarrow[I]{CVS} \varphi$
- $\exists g \in L^1(I, \mathbb{R}) \mid \forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \|\varphi_n(t)\| \leq g(t)$
- $\varphi$  réglée (ou continue par morceaux)

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \varphi_n = \int_I \varphi$$

Ce théorème est admis. On le démontre dans les années ultérieures car il est beaucoup plus évident avec l'intégration de Lebesgue.

**Remarques** : • En réalité, l'hypothèse «  $\varphi$  réglée (ou continue par morceaux) » n'est pas nécessaire avec l'intégrale de Lebesgue. Le problème est qu'en CPGE, on ne sait pas ce qu'est  $\int_I \varphi$  pour  $\varphi$  non réglée ou non-continue par morceaux.

- Comparaison avec l'intégration terme à terme : on a besoin uniquement de CVS, mais le côté « uniforme » vient de la domination, qui est une « majoration uniforme ». De plus, ce théorème est valable sur un intervalle non-borné également.
- La difficulté pour appliquer le théorème est de trouver la fonction  $g$  dominante. Si, par exemple, la suite de fonctions est croissante, on peut prendre sa limite.

**Proposition – définition** : norme 1 sur un intervalle  $I$  :

$$\|\cdot\|_1^I : \begin{cases} R(I, E) & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f & \mapsto \int_I \|f(t)\|_E dt \end{cases}$$

**Théorème de convergence absolue en norme  $L^1$**  : soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle non-dégénéré,  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions réglées (ou continues par morceaux) de  $I$  vers  $(E, \|\cdot\|)$  evn de dimension finie. Si :

- $\sum_n \varphi_n \xrightarrow[I]{CVS} \varphi$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|_1^I < \infty$
- $\varphi$  est réglée (ou continue par morceaux)

Alors :

- $\sum_n \int_I \varphi_n$  converge absolument.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \int_I \varphi_n = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n = \int_I \varphi$

Egalement admis.

**Remarques** : • Ne pas confondre  $\sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi_n\|_1^I$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \int_I \varphi_n \right\|_E$ , la seconde étant une hypothèse plus faible.

- Pour utiliser les deux théorèmes précédents, il faut bien expliciter le fait que les hypothèses sont vérifiées.
- Pour une suite de fonctions  $(u_n)$ , si on veut montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u_n = \int_I u$ , on peut écrire que  $u_n = \sum_{k=0}^n u_n - u_{n-1}$  et appliquer le théorème de CVA en norme  $L^1$  à la série.
- Pour une série de fonctions, on peut poser appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles.

**Théorème de convergence monotone :** (HP) soit  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  une suite de fonctions réglées de  $I$  vers  $\mathbb{R}_+$  croissante ( $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$ ) telle que  $(f_n) \xrightarrow[CVS]{I} f$  avec  $f$  réglée.

$$\left( \int_I f_n \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ majorée } \iff \left( \int_I f_n \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge } \iff \int_I f < \infty$$

Dans ce cas où cela est vérifié :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Preuve :  $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$  donc  $0 \leq \int_I f_n \leq \int_I f_{n+1}$  donc  $(\int_I f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  majorée  $\iff (\int_I f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Comme  $\forall t \in I$ ,  $(f_n(t))_n$  est croissante,  $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(t)$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq f_n \leq f$ .

Ainsi,  $\int_I f_n \leq \int_I f$ , puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq f(t)$ , si  $\int_I f < \infty$ , alors, par convergence dominée,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f$

Réciproquement, si  $(\int_I f_n)_n$  converge (ou est majorée), posons  $f_{-1} = 0$  et  $u_n = f_n - f_{n-1}$ ,  $(u_n) \geq 0$  car la suite des  $(f_n)$  est croissante. Alors,

$$\sum_{k=0}^n \|u_k\|_1^I = \sum_{k=0}^n \|f_k - f_{k-1}\|_1^I = \sum_{k=0}^n \int_I |f_k(t) - f_{k-1}(t)| dt = \sum_{k=0}^n \int_I f_k(t) - f_{k-1}(t) dt = \int_I f_n(t) dt \leq M$$

Ainsi,  $\sum_{k=0}^n \|u_k\|_1^I$  est majorée croissante donc converge (vers  $f$ ) et par le théorème de convergence en valeur absolue,  $\int_I f < \infty$ .

**Remarque :** on peut remplacer l'hypothèse  $f_n \geq 0$  par  $f_0 \in L^1(I)$  en posant  $(g_n) = (f_n - f_0) \geq 0$ .

**Théorème de continuité par rapport au paramètre :**  $(X, d)$  est un espace métrique.  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle réel non-dégénéré.  $(E, \|\cdot\|)$  est un evn de dimension finie. Soit  $\varphi: \begin{cases} X \times I & \longrightarrow E \\ (x, t) & \longmapsto \varphi(x, t) \end{cases}$  telle que :

- $\forall x \in X$ ,  $\varphi(x, \cdot): \begin{cases} I & \longrightarrow E \\ t & \longmapsto \varphi(x, t) \end{cases}$  est réglée (ou continue par morceaux).
- $\forall t \in I$ ,  $\varphi(\cdot, t): \begin{cases} X & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \varphi(x, t) \end{cases}$  est continue
- $\exists g \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \mid \forall x \in X, \forall t \in I, \|\varphi(x, t)\| < g(t)$  OU pour tout compact  $K \subset X$ ,  $\exists g \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \mid \forall x \in K, \forall t \in I, \|\varphi(x, t)\| < g(t)$ .

Alors :

$$F: \begin{cases} X & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \int_I \varphi(x, t) dt \end{cases} \text{ est définie et continue sur } X$$

Preuve : on prouve le résultat avec comme hypothèse : tout compact  $K \subset X$ ,  $\exists g \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \mid \forall x \in K, \forall t \in I, \|\varphi(x, t)\| < g(t)$ .

Pour commencer,  $\varphi(x, \cdot): \begin{cases} I & \longrightarrow E \\ t & \longmapsto \varphi(x, t) \end{cases}$  continue par morceaux et  $\|\varphi(x, \cdot)\| \leq g$  donc  $f(x) = \int_I \varphi(x, \cdot) = \int_I \varphi(x, t) dt$  est définie pour  $x \in X$ .

Pour  $a \in X$  et  $(x_n) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , posons  $(f_n): \begin{cases} I & \longrightarrow E \\ t & \longmapsto \varphi(x_n, t) \end{cases}$ . Par continuité de  $\varphi(\cdot, t)$  en  $a$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n, t) = \varphi(a, t)$  et donc pour  $t \in I$  quelconque, posant  $f: \begin{cases} I & \longrightarrow E \\ t & \longmapsto \varphi(a, t) \end{cases}$ ,  $(f_n) \xrightarrow[CVS]{I} f$ .

De plus,  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$  est compact donc il y a une  $g \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \mid \forall x \in K, \forall t \in I, \|\varphi(x, t)\| < g(t)$  donc  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \|f_k(t)\| \leq g(t)$  et par le théorème de convergence dominée,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f$ , soit

$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(a)$  et donc  $F$  est continue en  $a$ . Ceci valant pour tout  $a \in X$ ,  $F$  est continue sur  $X$ .

**Définition :** pour  $I, J$  intervalles réels,  $(E, \| \cdot \|)$  evn de dimension finie,  $\varphi \in E^{J \times I}$ , sous réserve d'existence de la dérivée, on note :

$$D_1 \varphi : \begin{cases} J \times I & \longrightarrow E \\ (x, t) & \longmapsto \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \end{cases}$$

**Théorème de Leibniz :** (ou de dérivation par rapport au paramètre). Soit  $I, J$  intervalles réels non dégénérés,  $(E, \| \cdot \|)$  evn de dimension finie,  $f \in E^{J \times I}$  telle que :

- $\forall x \in J, f(x, \cdot) \in L^1(I, E)$
- $f$  a une dérivée par rapport à la 1<sup>ère</sup> variable  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$  qui vérifie les hypothèses de continuité par rapport au paramètre :
  - $\forall x \in J, D_1 f(x, \cdot)$  est réglée (ou continue par morceaux).
  - $\forall t \in I, D_1 f(\cdot, t)$  est continue
  - $\exists g \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \mid \forall x \in J, \forall t \in I, \left\| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right\| < g(t)$  OU pour tout segment  $K \subset J, \exists g \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \mid \forall x \in K, \forall t \in I, \left\| \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \right\| < g(t)$ .

Alors :

- $F : \begin{cases} J & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \int_I f(x, t) dt \end{cases} \in C^1(J, E)$
- $\forall x \in J, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_I D_1 f(x, t) dt$ . Soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_I f(x, t) dt = \int_I \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

Preuve : soit  $x_0 \in J$  et  $\psi : \begin{cases} J \times I & \longrightarrow E \\ (x, t) & \longmapsto \begin{cases} \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

- $\forall t \in I$ , la fonction  $x \mapsto \psi(x, t)$  est continue en tout  $x \in J \setminus \{x_0\}$  comme somme de fonctions continues et en  $x_0$  car  $D_1 f(\cdot, t)$  est continue par hypothèse  $\rightarrow \psi$  est continue sur  $J$ .
- L'inégalité des accroissements finis appliquée à  $x \mapsto f(x, t)$  donne que ses taux de variations sont plus petits qu'un majorant de la dérivée (en l'occurrence  $g(t)$ ), et donc:  $\forall (x, t) \in J \times I : \|\psi(x, t)\| \leq g(t)$ .
- $\forall x \in J$ , la fonction  $t \mapsto \psi(x, t)$  est continue par morceaux sur  $I$  par hypothèse.

On applique le théorème de continuité par rapport au paramètre à  $\psi$  :

$$F_1 : x \mapsto \int_I \psi(x, t) dt \in C^0(J)$$

En particulier :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F_1(x) = F_1(x_0) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t) dt$$

De plus, pour  $x \neq x_0$  :

$$F_1(x) = \int_I \psi(x, t) dt = \int_I \frac{f(x, t) - f(x_0, t)}{x - x_0} dt = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow x_0} F_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0)$ , et donc  $F$  est bien dérivable en  $x_0$ . Ceci valant pour tous les  $x_0 \in J$ ,  $F \in D^1(J)$ .

On applique le théorème de continuité par rapport au paramètre à  $\frac{\partial f}{\partial x}$  pour obtenir que  $F' \in C^0(J)$ .

**Remarques :** • L'hypothèse «  $\forall x \in J, \varphi(x, \cdot) \in L^1(I, E)$  » a pour fonction d'assurer l'existence  $\int_I \varphi(x, t) dt = \int_I \varphi(x, \cdot)$  mais on pourrait la remplacer par l'hypothèse plus faible :  $\forall x \in J, \varphi(x, \cdot)$  est d'intégrale semi-convergente.

**Version itérée** : si  $\varphi \in E^{J \times I}$  a pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  une dérivée partielle  $k$ -ième par rapport à la 1<sup>ère</sup> variable

$D_1^k \varphi: \begin{cases} J \times I & \longrightarrow E \\ (x, t) & \longmapsto \frac{\partial^k}{\partial x^k} \varphi(x, t) \end{cases}$  qui vérifie les hypothèses du théorème de continuité :

- Les  $D_1^k \varphi(x, \cdot)$  sont réglées (ou continues par morceaux)
- Les  $D_1^k \varphi(\cdot, t)$  sont continues (sauf pour  $k = 0 \dots$ )
- $\exists g \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \mid \forall x \in J, \forall t \in I, \left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \varphi(x, t) \right\| < g(t)$  OU pour tout segment  $K \subset J, \exists g \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \mid \forall x \in K, \forall t \in I, \left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \varphi(x, t) \right\| < g(t)$ .

Alors  $f \in C^p(I, E)$  où  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in J$  :

$$f^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k}{\partial x^k} \varphi(x, t) dt$$

Preuve par récurrence (penser à justifier la dérivabilité avant de dériver dans la récurrence).

**Méthode** : domination sur un compact

- $I$  est un segment
- $\varphi \in C^1(X \times I)$  (hypothèse bien plus forte que la continuité de chaque application partielle)

Alors, l'hypothèse  $\forall K \subset X$  compact,  $\exists g \in L^1(I, \mathbb{R}_+) \mid \forall (x, t) \in K \times I, \|\varphi(x, t)\| \leq g(t)$  est toujours vérifiée car  $K \times I$  étant compact et  $\varphi$  continue dessus, elle y est bornée (notons  $M$  un majorant) et posant  $g: t \mapsto M$ ,  $\int_I g = M(b-a) < \infty$  donc  $g \in L^1$ .

**Théorème de Fubini** : soit  $E$  un evn de dimension finie,  $f \in C^0([a, b] \times [c, d], E)$ .

Alors :

$$\begin{aligned} u &\mapsto \int_c^d f(u, v) dv \in C^0([a, b]) \\ v &\mapsto \int_a^b f(u, v) du \in C^0([c, d]) \\ \int_a^b \int_c^d f(u, v) dv du &= \int_c^d \int_a^b f(u, v) du dv \end{aligned}$$

Preuve à connaître : soient les fonctions :

$$g: (y, t) \mapsto \int_a^y f(x, t) dx \text{ et } G: y \mapsto \int_c^d \left( \int_a^y f(x, t) dx \right) dt = \int_c^d g(y, t) dt$$

- La fonction  $f$  étant continue sur  $[a, b] \times [c, d]$ , compact, y est bornée. Notons  $M = \|f\|_\infty$ .
- Puisque  $f$  est continue des deux variables et dominée par  $t \mapsto M$  (intégrable sur un segment), la fonction  $g$  est continue par rapport au paramètre  $t$ . Elle est également continue (et dérivable) par rapport au paramètre  $y$  en tant que primitive d'une fonction continue. De plus,  $\frac{\partial g}{\partial y}(y, t) = f(y, t)$ .

Par conséquent, puisque  $\left\| \frac{\partial g}{\partial y}(y, t) \right\|_\infty = \|f(y, t)\|_\infty = M$ , on peut appliquer le théorème de Leibniz à  $G$  :

$$G \in C^1([a, b]) \text{ et } G': y \mapsto \int_c^d \frac{\partial g}{\partial y}(y, t) dt = \int_c^d f(y, t) dt$$

Enfin :

$$\int_c^d \int_a^b f(x, t) dx dt = G(b) - G(a) = \int_a^b G'(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, t) dt dx$$

**Théorème de convergence dominée continu** : soit  $I, J$  deux intervalles réels non-dégénérés,  $f \in E^{J \times I}$  et  $\lambda_0 \in \overline{J}$  tels que :

- $\forall \lambda \in J, t \mapsto f(\lambda, t)$  est réglée (ou continue par morceaux) sur  $I$ .
- $\exists F \in E^I$  réglée (ou continue par morceaux) telle que  $\forall t \in I, \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(\lambda, t) = F(t)$
- $\exists \varphi \in L^1(I, \mathbb{R}) \mid \forall (\lambda, t) \in J \times I, \|f(\lambda, t)\| \leq \varphi(t)$

Alors  $t \mapsto f(\lambda, t) \in L^1(I), F \in L^1(I)$  et :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f(\lambda, t) dt = \int_I F(t) dt$$

Preuve :  $f(\lambda, t) \in L^1(I)$  par comparaison à  $\varphi$ . Si  $\lambda_0$  est fini :

Soit  $(\mu_n) \in J^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lambda_0$  et soit  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : t \mapsto f(\mu_n, t) \xrightarrow{CVS} F$  et qui est dominée par  $\varphi$ .

Par le théorème de convergence dominée :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I F$

Par caractérisation séquentielle,  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f(\lambda, t) dt = \int_I F(t) dt$ .

Si  $\lambda_0 = +\infty$ , on applique le résultat à  $(x, t) \mapsto f(\frac{1}{x}, t)$  à droite en 0.

Exemple : la fonction  $\Gamma$  d'Euler (de la variable réelle)

$$\Gamma : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \end{cases}$$

#### • Continuité :

On pose  $\varphi : (x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1) \ln t} e^{-t}$ , qui est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .

$\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi$  a une dérivée  $k$ -ième par rapport à la 1<sup>ère</sup> variable, donnée par :

$$(D_1^k \varphi)(x, t) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \varphi(x, t) = \ln^k(t) e^{(x-1) \ln t} e^{-t} = \ln^k(t) \varphi(x, t)$$

Et les  $D_1^k \varphi$  sont donc continues sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .

#### • Intégrabilité :

$t^{x-1} e^{-t} \stackrel{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ , qui est donc intégrable ssi  $x-1 > -1$  i.e  $x > 0$ .

$t^{x-1} e^{-t} \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} o(e^{\frac{t}{2}} e^{-t}) = o(e^{-\frac{t}{2}})$  donc  $\varphi(x, \cdot)$  est intégrale sur  $]0, +\infty[$  ssi  $x > 0$ , donc  $\mathcal{D}_\Gamma = \mathbb{R}_+^*$ .

#### • Domination globale :

Y-a-t-il une fonction dominatrice globale  $g_k \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$  telle que  $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, |\ln^k(t) e^{(x-1) \ln t} e^{-t}| \leq g_k(t)$  ?

Si tel était le cas, on aurait par passage à la limite des inégalités larges :  $\forall t > 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} |\ln^k(t) e^{(x-1) \ln t} e^{-t}| = \frac{|\ln^k(t)|}{t} e^{-t} \leq g(t) \text{ et donc } t \mapsto \frac{|\ln^k(t)|}{t} e^{-t} \text{ serait intégrable, ce qui est faux.}$$

#### • Domination locale :

Soit  $a > 0$  et  $b \geq a$ .  $\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^* : 0 \leq |\ln^k(t)| t^{x-1} e^{-t} \leq |\ln^k(t)| e^{-t} (t^{a-1} + t^{b-1})$ .

Posons  $g_a : t \mapsto |\ln^k(t)| e^{-t} t^{a-1}$  et  $g_b : t \mapsto |\ln^k(t)| e^{-t} t^{b-1}$ .

$g_c(t) \stackrel{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln^k(t) t^{c-1} = o(t^{\frac{c}{2}-1})$  est intégrable si  $c > 0$  donc  $g_a$  et  $g_b$  sont intégrables au voisinage de 0.

$g_c(t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} o(t^{bcp} e^{-t}) = o(e^{-\frac{t}{2}})$  donc  $g_a$  et  $g_b$  sont intégrables au voisinage de  $+\infty$ .

Par application du théorème de Leibniz itéré :  $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$  et  $\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}$  :

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \ln^k(t) t^{x-1} e^{-t} dt$$

• **Autres propriétés** : soit  $x > 0$ .

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

(en vrai il faut intégrer sur un segment puis faire tendre les bornes vers 0 et  $\infty$ , mais bon...)

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

Par récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\Gamma(x+n) = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k) \times \Gamma(x)$$

On a en particulier :  $\Gamma(n+1) = n!$

Soit  $x > 0$ .

$$(\ln \Gamma)' = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$$

$$(\ln \Gamma)'' = \frac{\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}, \text{ qui est du signe de } \Gamma''\Gamma - \Gamma'^2$$

$$\Gamma''(x)\Gamma(x) = \int_0^\infty \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \stackrel{C-S}{\geq} \left[ \int_0^\infty \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \right]^2 = \Gamma'(x)^2 \implies (\ln \Gamma)'' \geq 0 :$$

$\Gamma$  est log-convexe.

• **Développement au voisinage de 0** :

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) dt = \int_0^1 n(1-u)^n \ln(nu) du$$

Le changement de variable ne donnait rien, on procède de manière différente :

On pose  $f_n: t \mapsto \begin{cases} (1 - \frac{t}{n})^n \ln(t) & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  en sorte que  $I_n = \int_0^\infty f_n(t) dt$ . Les  $f_n$  convergent simplement vers la fonction  $f: t \mapsto e^{-t} \ln t$ .

Recherche de la dominatrice :  $(1 - \frac{t}{n})^n = \exp(n \ln(1 - \frac{t}{n}))$ . Pour  $t < n$ ,  $n \ln(1 - \frac{t}{n}) \leq n(-\frac{t}{n}) = -t$  et la croissance de la fonction exponentielle donne  $(1 - \frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$  donc  $|f_n(t)| \leq e^{-t} |\ln t|$ . Bien sûr, pour  $t \geq n$ ,  $0 = f_n(t) \leq e^{-t} |\ln t|$ . Ainsi, la fonction limite  $f$  peut servir de dominatrice. Par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^\infty e^{-t} \ln t dt = \Gamma'(1)$$

On découpe notre changement de variable en deux ( $\ln(nu) = \ln n + \ln u$ ),  $I_n = J_n + K_n$ , avec :

$$J_n = \int_0^1 n(1-u)^n \ln n du = n \ln n \left[ -\frac{(1-u)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{n}{n+1} \ln n$$

$$\frac{K_n}{n} = \int_0^1 (1-u)^n \ln u du$$

On choisit la constante dans l'IPP :

$$\int_0^1 (1-u)^n \ln u du = \left[ \left( \frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1} \right) \ln u \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{u} du$$

$$\int_0^1 (1-u)^n \ln u du = \left[ \frac{u}{n+1} \sum_{k=0}^n (1-u)^k \ln u \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{u}{u} \sum_{k=0}^n (1-u)^k du$$

$$\int_0^1 (1-u)^n \ln u du = 0 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \sum_{k=0}^n (1-u)^k du$$

$$\int_0^1 (1-u)^n \ln u du = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$$

$$I_n = \frac{n}{n+1} \left( \ln n - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \sim \ln n - H_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\gamma$$

Au passage, on obtient un développement de  $\Gamma$  :

$$\Gamma(x) \stackrel{x \rightarrow 1}{\sim} \Gamma(1) - (x-1)\gamma + o(x) \text{ donc } \Gamma(x+1) \stackrel{x \rightarrow 0^+}{\sim} \Gamma(1) - x\gamma + o(x) \text{ et enfin } \boxed{\Gamma(x) \stackrel{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x} - \gamma + o(1)}.$$

• **Formule d'Euler-Gauss** : soit  $x > 0$ .

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty t^{x-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

$$\text{On pose } f_n: t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } I_n = \int_0^\infty f_n(t) dt = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

$(f_n) \xrightarrow[\mathbb{R}_+^*]{CVS} f: t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ , que l'on prend comme dominatrice pour appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$$

Calcul de  $I_n$  : recherche d'une relation entre  $I_n(x)$  et  $I_{n-1}(x+1)$  :

$$I_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^n du = n^x \left[ \frac{u^x}{x} (1-u)^n \right]_0^1 + n^x \int_0^1 \frac{u^x}{x} n(1-u)^{n-1} du = \frac{n^{x+1}}{x} \int_0^1 u^x (1-u)^{n-1} du$$

$$I_n(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{n}{n-1} \right)^{x+1} (n-1)^{x+1} \int_0^1 u^x (1-u)^{n-1} du = \frac{1}{x} \left( \frac{n}{n-1} \right)^{x+1} I_{n-1}(x+1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, I_n(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{n}{n-1} \right)^{x+1} I_{n-1}(x+1)$$

Montrons alors par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, I_n = \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}$ .

$n = 1$  :

$$I_1 = \int_0^1 t^{x-1} (1-t) dt = \int_0^1 t^{x-1} - t^x dt = \left[ \frac{t^x}{x} - \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)} = \frac{1}{x(x+1)} = I_1$$

$n \geq 1$  et supposons que  $I_n = \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}$ .

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{x+1} I_n(x+1) = \frac{1}{x} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{x+1} \frac{n! n^{x+1}}{\prod_{k=0}^n (x+k+1)} = \frac{(n+1)! (n+1)^x}{x \prod_{k=1}^{n+1} (x+k)} = \frac{(n+1)! (n+1)^x}{\prod_{k=0}^{n+1} (x+k)}$$

D'après le principe de récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, I_n = \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}$

Enfin :

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^\infty f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}}$$

• **Formule des compléments** : démonstration dans le DM sur la fonction  $\Gamma$  version suites et séries de fonctions :  $\forall x \in ]0,1[, \boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$ .

On remarque alors que :

$$0 < \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

→ C'est l'intégrale de Gauss.