

$E(+, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -ev ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )

**Définition :** Une norme sur  $E$  est une application  $\begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \|x\| \end{cases}$  qui vérifie :  $\forall (x, y) \in E^2$

- 1)  $\|x\| + \|y\| \geq \|x + y\|$  (inégalité triangulaire)
- 2)  $\|x\| \geq 0$  (positivité)
- 3)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (homogénéité)
- 4)  $\|x\| = 0 \implies x = 0$  (séparation)

**Définition :** soit  $A$  un ensemble quelconque (non-vidé) on définit sur le  $\mathbb{K}$ -ev  $\mathbb{K}^A$  la pseudo-norme :  
Si  $f$  appartient à  $\mathbb{K}^A$ ,

$$\|f\|_{\infty}^A = \sup_{x \in A} |f(x)|$$

C'est la norme uniforme. Si  $f$  n'est pas bornée, sa norme uniforme vaut  $+\infty$ .

Ça vérifie tout mais vu que la norme peut valoir l'infini, elle n'est pas exactement à valeur dans  $\mathbb{R}_+$ .

Si  $L^{\infty}(A, K)$  est le sous espace vectoriel des fonctions uniformément bornées sur  $A$  à valeurs dans  $K$ , muni de la norme uniforme, dans ce cas, c'est bien une norme.

**Définition :** pour une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^A)^{\mathbb{N}}$  et  $f \in \mathbb{K}^A$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty}^A = 0$$

Il y a unicité de la limite uniforme car il y a unicité de la limite dans  $\mathbb{K}$ .

**Proposition :**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f \implies (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$ .

**Remarques :** • Il y a donc aussi unicité de la limite simple.

• La réciproque est évidemment fausse. (Contre-exemple : soit  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n: \begin{cases} [0,1[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n \end{cases}$ .

$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in A} f_n(x) = 1$ , mais  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur  $[0,1[$ .)

**Remarque :** pour  $f_n: x \mapsto 2nxe^{-nx^2}$ ,  $(f_n)$  converge simplement vers 0 mais pas uniformément. Par contre, elle converge uniformément vers 0 sur tout segment  $[a, 1]$  avec  $1 \geq a > 0$ .

**Définition :**  $\forall a \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{C}$ ,  $f$  continue en  $a$  signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \forall z \in A, |a - z| < \alpha \implies |f(a) - f(z)| < \varepsilon$$

**Théorème :** une limite uniforme de fonctions  $C^0$  est  $C^0$ .

**Théorème d'intégration terme à terme :** soient  $a < b \in \mathbb{R}^2$  et  $(f_n)_n \in C^0([a, b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$  tel que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

Preuve :

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq (b - a) \|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Version à hypothèses plus faibles : soient  $a < b \in \mathbb{R}^2$  et  $(f_n)_n \in L^1(]a, b[, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$  tel que  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$ . On a  $f \in L^1(]a, b[, \mathbb{K})$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$ .

Pour la preuve de la limite : même preuve, mais on a le droit d'écrire les intégrales si les fonctions sont intégrables. Il suffit donc de montrer que  $f \in L^1(]a, b[, K)$ . Pour ce faire :

$$\int_a^b |f| \leq \int_a^b |f - f_n| + \int_a^b |f_n| \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty + \int_a^b |f_n(t)| dt < +\infty$$

**Remarques :** • On n'a pas besoin de  $f$  ni  $f_n$  bornées pour que leur différence soit bornée.

- Puisque  $\int_{]0,1]} 2nxe^{-nx^2} dx = 1 \neq \int_{]0,1]} 0 dx$ , alors  $f_n: x \mapsto 2nxe^{-nx^2}$  ne converge pas uniformément vers 0.
- Pour  $f_n: x \mapsto x^n$ , ça marche pour l'intégrale même si ça ne converge pas uniformément.
- Il faut bien que l'on soit sur un intervalle borné, sinon c'est fichu pour la majoration dans la preuve de  $f \in L^1(]a, b[, \mathbb{K})$ .

**Mise au point CVU vs CVS :**

CVU :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

CVS :  $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

CVU : y'a un  $\varepsilon$  et un  $N$  qui marchent pour tous les  $x$ , donc y'en a bien un pour chaque  $x$ . Par contre, si y'en a un pour chaque  $x$ , ce n'est pas certain qu'il y en ait un commun à tous.

**Proposition :**  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f \iff \forall (x_n) \in A^\mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0$ .

Le sens réciproque est dur à prouver, mais le sens direct simple. On utilise le sens direct pour prouver la non-convergence uniforme en contraposant.

Preuve du sens direct :

$$0 \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Définition :** pour  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^A)^\mathbb{N}$  et  $f \in \mathbb{K}^A$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment contenu dans  $A \iff (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment  $I$  contenu dans  $A$ .

**Remarque :** la CVU sur tout intervalle ne suffit pas à démontrer la CVU sur  $A$  tout entier.

Pour la continuité, la CVU sur tout segment suffit. Mais elle ne suffit pas pour l'intégration.

**Théorème de primitivation terme à terme :**

Soit  $I$  un intervalle réel non dégénéré. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^0(I, \mathbb{K})^\mathbb{N}$

Soit  $a \in I$  et soit  $F_n: x \rightarrow \int_a^x f_n$ .

Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  CVU sur tout segment inclus dans  $I$  vers  $f$  (qui est donc dans  $C^0(I, \mathbb{K})$ ), alors, posant  $F: x \rightarrow \int_a^x f$ ,  $F_n$  CVU vers  $F$  sur tout segment fermé inclus dans  $I$ .

**Théorème de dérivation terme à terme :**

Soit  $I$  un intervalle réel non dégénéré. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^1(I, \mathbb{K})^\mathbb{N}$

- $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  CVU sur tout segment contenu dans  $I$ .
- Il y a au moins un point  $a \in I / (f_n(a))_n$  converge (pour le programme :  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  CVS).

Alors :

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  CVU vers une fonction  $f$
- $f \in C^1(I, \mathbb{K})$
- La fonction vers laquelle les  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent est  $f'$ .

Preuve : on primitive terme à terme les  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en disant que les  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendent vers une certaine fonction  $g$ . On pose alors  $f = G + \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$  et on montre que  $f_n \rightarrow f$  uniformément. Puis, soit  $J = [\min(u, a), \max(a, v)]$  :

$$\left| f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) - \int_a^x g \right| \leq |f_n(a) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)| + |F_n(x) - G(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|F_n - G\|_\infty^J \leq \varepsilon$$

Donc  $(f_n)$  CVU vers  $f$ .

### Version itérée :

$(f_n) \in C^p(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ ,  $p \geq 1$  tels que :

- $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$  CVU sur tout segment contenu dans  $I$ .
- Pour chaque  $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$  il y a au moins un point  $a \in I$  /  $(f_n^{(k)}(a))_n$  converge.

Alors,

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  CVU vers une fonction  $f$  sur tout  $[a, b] \subset I$
- $f \in C^p(I, \mathbb{K})$
- $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ ,  $(f_n^{(k)}) \xrightarrow{[a, b]}^{CVU} f^{(k)}$  pour tout  $(a, b) \in I^2$

### Théorème de la double limite :

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$  telle que :

- $(f_n) \xrightarrow{[a, b]}^{CVU} f$
- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f_n(x)$  existe.

Alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  existe.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow b^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

Preuve : on découpe  $|f(x) - \beta|$  pour prouver le deuxième point. Mais pour cela, il faut avoir le premier point. Pour démontrer le premier point, on montre qu'elle est bornée et n'a qu'une valeur d'adhérence.

Version « séries de fonctions » du chapitre

Introduction et motivation :

Soit  $(u_n) \in (\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$ , avec  $I$  un intervalle quelconque non-dégénéré.

On pose :  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

- Si les  $u_n$  sont  $C^k$ , les  $S_n$  sont  $C^k$  et réciproquement.
- $S_n^{(p)} = \sum_{k=0}^n u_k^{(p)}$
- $\int_a^b S_n = \sum_{k=0}^n \int_a^b u_k$
- Si les  $u_k$  ont une limite finie  $\beta_k$  en sup  $I$  à gauche  $\iff$  les  $S_n$  ont une limite finie en sup  $I$  à gauche  $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \beta_k$ .

**Intégration terme à terme :** (Marche aussi version HP avec  $I$  un intervalle borné).

Si les  $u_k$  sont  $C^0$  sur  $[a, b]$  et  $S_n$  CVU vers  $S$  sur  $[a, b]$  :  $\int_a^b S = \sum_{k=0}^\infty \int_a^b u_k$

**Primitivation terme à terme :**

Si  $\sum_n u_n$  CVU sur tout segment contenu dans  $I$  vers une fonction  $g$  et  $a \in I$ , posant  $U_k: x \rightarrow \int_a^x u_k$  et  $G: x \rightarrow \int_a^x g$ . Alors  $\sum U_k$  CVU sur tout segment contenu dans  $I$  vers  $G$ .

**Dérivation terme à terme :**

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^1(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$  telle que :

- $\exists a \in I / \sum_n u_n(a) \text{ CV}$
- $\sum u'_n \text{ CVU sur tout segment contenu dans } I$ .

Alors :

- $\sum u_n \text{ CVU sur tout segment contenu dans } I \text{ vers une fonction } h$
- $h \in C^1(I, \mathbb{K})$
- $\forall x \in I, h'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$

**Version itérée :**

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^p(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$  telle que :

- $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad \exists a \in I / \sum_n u_n^{(k)}(a) \text{ CV}$
- $\sum u_n^{(p)} \text{ CVU sur tout segment contenu dans } I$ .

Alors :

- $\sum u_n \text{ CVU sur tout segment contenu dans } I \text{ vers une fonction } h$
- $h \in C^p(I, \mathbb{K})$
- $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \sum u_n^{(k)} \text{ CVU sur tout segment inclus dans } I \text{ et a fortiori : } \forall x \in I, h^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(k)}(x)$

**Version itérée indéfinie :**

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^\infty(I, K)^{\mathbb{N}}$  telle que :

- $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_n f_n^{(k)} \text{ CVU sur tout segment contenu dans } I, \text{ alors, posant } f: x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) :$
- $f \in C^\infty(I, K)^{\mathbb{N}}$  et  $\forall x \in I, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$ .

**Théorème de la double limite :**

- $\sum u_n \xrightarrow{CVU} f: x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists u \in \mathbb{K} / \lim_{x \rightarrow b^-} u_n(x) = u$

En notant  $\beta_n = \lim_{x \rightarrow b^-} u_n(x) = u_n(b^-)$

Alors,

- $\sum_n \beta_n \text{ converge vers une limite } \beta \text{ et } \lim_{x \rightarrow b^-} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \beta = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow b^-} u_n(x)$

**Remarque :** ⚠ Ici, la convergence uniforme sur tout segment inclus dans  $I$  ne suffit pas.

**Définition :** on dit que  $\sum f_n$  converge normalement si :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty$$

La convergence normale implique la convergence uniforme. Mais il est fréquent qu'il y ait CVU sans CVN.

**Proposition :**  $\sum f_n \text{ CVU} \Leftrightarrow \left[ \sum f_n \text{ CVS et } (R_n) \xrightarrow{CVU} 0 \right]$

**Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass :**

$$\begin{aligned} \forall I = [a, b] \subset \mathbb{R}, \forall f \in C^0(I, \mathbb{K}), \exists (P_n) \in \mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}} \mid (P_n) \xrightarrow[I]{CVU} f \\ \Leftrightarrow \\ \forall I = [a, b] \subset \mathbb{R}, \forall f \in C^0(I, \mathbb{K}), \forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{K}[X] \mid \|P - f\|_{\infty}^I < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\zeta: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ s & \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \end{cases}$$

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n: x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$  et  $g: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \\ s & \longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^s} \end{cases}$ , la fonction  $\zeta$  alternée.

### • Domaines de définition

- $\zeta$  est définie sur  $I = ]1, +\infty[$  par comparaison aux sommes de Riemann.
- $g$  est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par le critère spécial des séries alternées.

### • Variations

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n$  est décroissante sur  $I$  donc  $\sum_{k=1}^n u_k$  est décroissante sur  $I$  et  $\zeta$  est décroissante sur  $I$  comme limite simple de fonctions décroissantes (sur  $I$  mais là ça devient lourd).

Pour les mêmes raisons,  $\zeta \geq 0$  sur  $I$ .

### • Continuité et dérivabilité

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, u_n^{(k)} = (-\ln n)^k u_n$$

Il n'y a pas de CVU sur  $I$  entier mais on peut en chercher sur tout segment de  $I$ .

Soit  $a > 1$ .

$$\|u_n\|_{\infty}^{[a, \infty[} = \frac{1}{n^a}, \text{ or } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \text{ converge donc } \sum_n u_n \text{ CVN (donc CVU) sur tout segment contenu dans } I$$

$\rightarrow \zeta$  est continue sur  $I$ .

$$\text{Mieux encore : } \|u_n^{(k)}\|_{\infty}^{[a, \infty[} = \frac{\ln^k n}{n^a}.$$

Or,  $\forall k \in \mathbb{N}, \ln n \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} o(n^{\frac{a-1}{2}})$  donc  $\frac{\ln^k n}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{a-1}{2}}}\right)$ , de somme convergente car  $\frac{a-1}{2} > 1$ .

Ainsi,  $\forall k \in \mathbb{N}, \sum_n u_n^{(k)}$  CVN sur tout segment.

$$\rightarrow \zeta \in C^{\infty}(I) \text{ et } \forall s \in I \quad \zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^k n}{n^s}$$

Pour  $g$ , tout est exactement pareil car  $\|(-1)^n u_n^{(k)}\|_{\infty}^{[a, \infty[} = \|u_n^{(k)}\|_{\infty}^{[a, \infty[}$ . Quid de  $]0, 1]$  ?

$$\forall s \in ]0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |R_n(s)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^s} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^s}$$

Néanmoins, cela ne nous donne pas de convergence uniforme car  $\frac{1}{(n+1)^s}$  dépend de  $s$ .

Mais sur tout segment :  $\forall a > 1, |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$  et on a la CVU sur tout segment.

$\rightarrow g \in C^0(\mathbb{R}_+^*)$ . On admet (même démo que pour  $\zeta$ ) que  $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+^*)$  et que  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{R}_+^*$

$$g^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{\ln^k n}{n^x}$$

### • Etude aux bornes

On a déjà vu la convergence uniforme de  $\sum_n u_n$ .

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = \delta_{n,1}$  donc par le théorème de la double limite :

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \zeta(s)$$