

Votre maître à tous : une famille de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension n est liée.

E est un \mathbb{K} -ev.

Définition : f est une forme linéaire si $f \in L(E, \mathbb{K})$.

Théorème : si G et H sont des supplémentaires de F dans E , $G \cong H$ (G et H sont isomorphes).

Preuve :

Soit p la projection de G sur H parallèlement à F . $p \in E^E$.

Soit $\phi = p|_G^H \in G^H$ est bien une application car $p(G) \subset H$ et donc $p^H = p$.

Donc $\phi \in L(G, H)$.

Tout élément de $p(G)$ a un antécédent dans E , mais on doit justifier qu'il a un antécédent dans G .

$(p^{\text{Im}(p)} \text{ surjective} \Rightarrow p|_{\text{osef}}^{\text{Im}(p)} \text{ surjective})$.

Soit $x \in G$.

$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$ et comme $F \cap G = \{0\}$

Donc $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$ donc ϕ est injective.

De plus, pour $y \in H = \text{Im}(p)$ quelconque, $y = p(y)$. Reste à montrer que $y \in G$.

$y = y_G + y_F$

$p(y) = p(y_G) + p(y_F) = p(y_G) = y \in G$

Donc y_G est un antécédent de y par ϕ et ϕ est surjective, donc bijective, et c'est l'isomorphisme recherché.

Remarques : • Ainsi, si F sev de E a un supplémentaire G de dimension finie, tous les supplémentaires de F ont la même dimension que G .

• On appelle $\text{codim}(F) = \dim(G)$ la codimension de F dans E . Si F n'a pas de supplémentaire de dimension finie, $\text{codim}(F) = +\infty$ (soit un supplémentaire de dimension infinie, soit pas de supplémentaire).

Définition : application linéaire par ses restrictions à 2 supplémentaires :

Si $F \oplus G = E$ et H est un \mathbb{K} -ev,

$$\forall f \in L(F, H), \forall g \in L(G, H), \exists! h \in L(E, H) / \begin{cases} h|_F = f \\ h|_G = g \end{cases}.$$

On note parfois $h = f \oplus g = f \circ p^F + g \circ q^G$ avec p et q les projecteurs sur F et sur G .

Théorème du rang : pour $f \in L(E, F)$.

$$\text{rg } f + \dim(\text{ker}(f)) = \dim E$$

Preuve : soit H est un supplémentaire de $\text{ker}(f)$ dans E . On donc $\dim H + \dim \text{ker } f = \dim E$.

$\dim(H) = \text{codim}(\text{ker}(f))$ (H existe forcément si on est en dimension finie). Montrons que $H \cong \text{Im}(f)$.

Pour cela, $\phi = f|_H^{\text{Im}(H)}$ est le candidat naturel.

Bien sûr, $x \in \text{Ker } \phi \Leftrightarrow x \in H \cap \text{ker } f = \{0\}$ donc $x = 0$ et ϕ est injective.

Et pour $y \in \text{Im}(f)$ quelconque soit x un antécédent de y par f . $x = x_K + x_H$.

$y = f(x) = f(x_H)$ donc x_H est un antécédent de y par f dans H , donc par ϕ , donc ϕ est bijective et $H \cong \text{Im}(f)$.

En dimension infinie :

Si $\text{rg}(f) = \infty$, on a l'alternative :

- $\text{Ker}(f)$ a un supplémentaire H et on applique la preuve ci-dessus.
- $\text{Ker}(f)$ n'a pas de supplémentaire et donc $\text{codim}(\text{Ker}(f)) = \infty$

Proposition : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et, E un espace vectoriel sur un corps infini.

Soient (E_1, \dots, E_n) tels que $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$.

Alors $\exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket / E = E_k$.

Preuve : par récurrence sur n . Trivial pour $n = 1$.

Pour passer de n à $n + 1$: si $E_0 \subset \bigcup_{k=1}^n E_k$ et H_n donne le résultat.

Sinon, supposons $E \neq E_0$, soit $x_0 \in E_0 \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k$ et $y_0 \in E \setminus E_0$.

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ deux à deux distincts et $(u_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket} = (\lambda_k x_0 + y_0)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$. Soit $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Alors $u_k = \lambda_k x_0 + y_0$ n'appartient pas à E_0 sans quoi $u_k - \lambda_k x_0 = y_0 \in E_0$.

Comme on a donc $n + 1$ vecteurs qui appartiennent à n ensembles (les E_k , $k \neq 0$), il y en a un (E_i) qui contient deux u_k , qu'on note u_p et u_q .

Alors $(\lambda_p - \lambda_q)x_0 = u_p - u_q \in E_i$, ce qui est contradictoire donc $E = E_0$

Définition : sous espace vectoriel propre d'une fonction.

Soit E un \mathbb{K} -ev et $f \in L(E)$.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda(f) := \ker(f - \lambda Id_E) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$ est un sev de E .

C'est le sev « propre » de f par λ . A dire vrai, il n'est propre que si $E_\lambda(f) \neq \{0\}$ (id. est $f - \lambda Id_E$ est non-injective). Mais en général, ce n'est pas le cas.

Définition : $\text{sp}(f) = \text{spec}(f) := \{\lambda \in \mathbb{K} / E_\lambda(f) \neq \{0\}\}$ est le spectre de f .

Définition : une valeur propre de f est un élément du spectre.

Un vecteur propre de f est un vecteur x non-nul tel que $(x, f(x))$ liée, soit $\exists \lambda \in \mathbb{K} / f(x) = \lambda x$.

L'ensemble des vecteurs propres est

$$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}} E_\lambda(f) \setminus \{0_E\} = \bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f) \setminus \{0_E\}$$

Remarque : un vecteur propre n'est pas nul mais une valeur propre peut l'être.

Théorème : des sevs propres sont toujours en somme directe.

$E^* := L(E, \mathbb{K})$ est l'espace des formes linéaires sur E .

C'est le dual de E . En algèbre linéaire, $E^* \neq E \setminus \{0\}$.

Théorème : (Si H hyperplan de E . $\text{codim } H = 1$) Les propositions suivantes sont équivalentes :

- H hyperplan de E .
- Tout supplémentaire de H est une droite.
- $\forall u \in E \setminus H, H \oplus \mathbb{K}u = E$ (et $E \setminus H \neq \emptyset$).
- H est le noyau d'une forme linéaire non-nulle.
- H est un sev strict maximal pour l'inclusion. (si $H \subsetneq F, F = E$)
- $\forall u \notin H, \exists! \phi \in E^* / \ker \phi = H$ et $\phi(u) = 1$

Proposition : Pour $f, g \in E^{*2} \setminus \{0_{E^*}\}$, f et g colinéaires $\iff \ker f = \ker g$.

Remarque : « hyperplan \leftrightarrow noyau d'une forme linéaire non-nulle » est un réflexe.

Formes linéaires sur \mathbb{K}^p

Par défaut, on identifie \mathbb{K}^p à $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ (on écrit les coordonnées d'un vecteur en colonne).

Au passage, pour pouvoir économiser du papier, on écrit $x = (x_1, \dots, x_p)^T$ pour que ce soit quand même une colonne.

Proposition : les formes linéaires sur \mathbb{K}^p sont les $\{\phi_\Lambda, \Lambda \in \mathbb{K}^p\}$, où $\phi_\Lambda: \begin{cases} \mathbb{K}^p & \rightarrow (\mathbb{K}^p)^* \\ x & \mapsto \Lambda^T x \end{cases}$ (i.e. $\phi_{(a_1, \dots, a_p)^T}: \begin{cases} \mathbb{K}^p & \rightarrow (\mathbb{K}^p)^* \\ (x_1, \dots, x_p)^T & \mapsto \sum_{k=1}^p a_k x_k \end{cases}$).
Plus encore : $\begin{cases} \mathbb{K}^p & \rightarrow (\mathbb{K}^p)^* \\ \Lambda & \mapsto \phi_\Lambda \end{cases}$ est un isomorphisme.

Remarque : par conséquent, H est un hyperplan de $\mathbb{K}^p \iff \exists \Lambda \in \mathbb{K}^p \setminus \{0_p\} / H = \ker \phi_\Lambda$, soit :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{0_p\} \text{ tq } H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p / \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k = 0 \right\}$$

Deux équations définissent le même hyperplan \iff elles sont proportionnelles.

Remarque : en dimension finie, tout sev a un supplémentaire donc pour un $u \in E \setminus \{0\}$, $\mathbb{K}u$ a un supplémentaire H qui est un hyperplan de E . Donc y'a une forme linéaire ϕ telle que $\phi(u) = 1$.

En dimension infinie, c'est moins évident (mais vrai quand même) mais c'est inutile dans certains cas :

- Si $\langle | \rangle$ est un produit scalaire sur E , $\langle u | \rangle: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \langle u | x \rangle \end{cases}$ est une forme linéaire non nulle.
- Si $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$, $\forall f \in E$ non constante, $\phi(g) = \int_a^b fg$ est une forme linéaire telle que $\phi(f) \neq 0$.

Proposition : soit $(f_1, \dots, f_p) \in E^{*p}$ et $h: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{cases}$. F est linéaire.
 h surjective $\iff (f_1, \dots, f_p)$ libre

Version duale : $h: \begin{cases} E^* & \rightarrow \mathbb{K}^p \\ f & \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_p)) \end{cases}$ où $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.
 h surjective $\iff (x_1, \dots, x_p)$ libre

Preuve (à connaître) :

- Tout sev strict (en dimension finie) est contenu dans un hyperplan :

Si $\dim E = n$, $\dim F = p < n$.

Alors si (e_1, \dots, e_p) est une base de F , on la complète en $(e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ base de E , $\text{vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = H$ est un hyperplan qui contient F .

• h non surjective $\iff \text{Im } h$ est un sev strict de $\mathbb{K}^p \iff \exists H$ hyperplan de \mathbb{K}^p tel que $\text{Im } h \subset H \iff \exists \varphi \in \mathbb{K}^{p*} \mid H = \ker \varphi$ et $\text{Im } h \subset H \iff \exists \Lambda \in \mathbb{K}^p$ tel que notant $\phi_\Lambda: \begin{cases} \mathbb{K}^p & \rightarrow & \mathbb{K} \\ X & \mapsto & \Lambda^T X \end{cases}$, $\text{Im } h \subset H = \ker \phi_\Lambda$.
Or $\text{Im } h = \left\{ (f_k(x))_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} \mid x \in E \right\}$ donc h non surjective $\iff \exists \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \mid \forall x \in E$, $\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) = 0$

Remarque : $\forall (\phi_1, \dots, \phi_p)$ formes linéaires de E , si $\phi = \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto & (\phi_1(x), \dots, \phi_p(x)) \end{cases}$, alors $\ker \phi = \bigcap_{k=1}^p \ker \phi_k$, qui est une intersection de p hyperplans.

Plus généralement, si F est une intersection de p hyperplans, $\text{codim } F \leq p$.

(Lorsque l'intersection de p hyperplans H_1, \dots, H_p est de codimension p exactement, ces hyperplans sont dits en « position générale ».)

Si $\text{codim } F = p$, F est l'intersection de p hyperplans en « position générale » et p hyperplans noyaux des formes non-nulles (ϕ_1, \dots, ϕ_p) .

Soit $H(F)$ l'ensemble des hyperplans contenant F et $G = \bigcap_{H \in H(F)} H$ (qui est un sev contenant F).

Si $u \notin F$, y'a un $H \in H(F)$ tq $u \notin H$ donc $u \notin G$ et $G \subset F$. $\Rightarrow F = \bigcap_{H \in H(F)} H$.

Question subsidiaire : F sev strict de E , $(u_1, \dots, u_p) \in E \setminus F$.

Montrer que : y'a un hyperplan H qui contient F et aucun u_k . (Lemme d'évitement). (Est dans la feuille d'exos).

Proposition : soit (H_1, \dots, H_p) hyperplans de E . $\text{codim} \bigcap_{k=1}^p H_k \leq p$ avec égalité SSI $\forall k \in \llbracket 2, p \rrbracket$, $\bigcap_{i=1}^{k-1} H_i \not\subset H_k$ (si les H_k sont en position générale).

Preuve (manque des bouts...) (...des gros bouts, même):

On prend $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ $\phi_k \in E^*/H_k = \ker \phi_k$ et $\phi = \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto & (\phi_1(x), \dots, \phi_p(x)) \end{cases}$.

$\bigcap_{k=1}^p H_k = \bigcap_{k=1}^p \ker \phi_k = \ker \phi$

Donc $\text{codim} \bigcap_{k=1}^p H_k = \text{rg}(\phi) \leq p$ puisque $\text{Im } \phi \subset \mathbb{K}^p$. Avec égalité SSI $\text{Im } \phi = \mathbb{K}^p$ SSI $(\phi_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ libre.

De plus, $(\phi_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ libre $\Leftrightarrow (\phi_k)_{k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket}$ libre et $\phi_p \notin \text{vect}(\phi_k)_{k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket}$.

Lorsque $(\phi_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ libre, on a $\begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{K}^{p-1} \\ x & \mapsto & (\phi_1(x), \dots, \phi_{p-1}(x)) \end{cases}$ surjective et également :

$\text{codim} \bigcap_{k=1}^{p-1} H_k = p - 1$.

Preuve manuelle : prendre un F de codimension q , et montrer uniquement avec la définition des codimensions et le fait que « H hyperplan $\iff \text{codim } H = 1$ », que :

Ou bien $F \subset H$ et $\text{codim } F \cap H = \text{codim } F$.

Ou bien $F \not\subset H$ et $\text{codim } F \cap H = q + 1$ et ça récuré.

Dans l'autre sens :

Soit F de codimension p . Montrons que F est l'intersection de p hyperplans bien choisis, qui sont donc en position générale.

Soit $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base d'un supplémentaire G de F .

Soit $G_k = \text{vect}((e_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{k\}})$.

$H_k = F \oplus G_k$ est un hyperplan de qui contient F . ($G = G_k \oplus \mathbb{K}e_k$ donc $\underbrace{F \oplus G_k}_{H} \oplus \mathbb{K}e_k = E$)

On a évidemment $F \subset \bigcap_{k=1}^p H_k$.

Preuve fausse : si $F' = \bigcap_{k=1}^p H_k$, on a $F \oplus G = F' \oplus G$ et $F \subset F'$ donc $F = F'$. (Attention : F' ne contient aucun des $e_k \Rightarrow F' \cap G = \{0\}$ est faux a priori.)

Preuve juste : soit $x \in F'$.

$x \in H_k$ donne $x = x_F + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \lambda_{i,k} e_i = \sum_{i=1}^p \lambda_{i,k} e_i$ avec $\lambda_{k,k} = 0$.

$x \in H_{k'}$ donne $x = x'_F + \sum_{i=1}^p \lambda_{i,k'} e_i$.

Or $F \oplus G = E$, par unicité de la décomposition de x sur F et G , $x_F = x'_F$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_{i,k} e_i = \sum_{i=1}^p \lambda_{i,k'} e_i$.

Et comme (e_i, \dots, e_p) libre, $\forall i, \lambda_{i,k} = \lambda_{i,k'}$, F ne contient aucun des e_k .

Donc en fait la preuve fausse fonctionne en ayant justifié $F' \cap G = \{0\}$.

Proposition : si $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i = E_i \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n E_i \right)$, posons $F_j = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n E_i$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons

$$p_i = p_{E_o // F_j}$$

Les $(p_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont les projecteurs « associés à la décomposition de E en somme directe ».

On a alors : $\sum_{i=1}^n p_i = Id_E$ et $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{L(E)}$

Preuve :

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $i \neq j$: $E_i = \text{Im } p_i \subset F_j = \ker p_j$ donne $p_i \circ p_j = 0_{L(E)}$

$\forall x \in E$, soit $(x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ le n -uplet de $\prod_{i=1}^n E_i$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i$.

$x_i \in E_i = \text{Im } p_i \Leftrightarrow p_i(x_i) = x_i$ et donc

$$\sum_{i=1}^n p_i(x) = \sum_{i=1}^n p_i \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \delta_{i,j} (p_i \circ p_j)(x_j) = \sum_{j=1}^n p_j(p_j(x_j)) = x$$

Donc $\sum_{i=1}^n p_i = Id_E$

Réciproquement, si p_1, \dots, p_n sont n projecteurs de E tels que $\sum_{i=1}^n p_i = Id_E$ et $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{L(E)}$

Alors, posons $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket E_i = \text{Im } p_i$ et $F_i = \ker p_i$ ($E_i \oplus F_i = E$).

Pour $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n p_i(x)$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i(x) \in E_i$ donc $E = \sum_{i=1}^n E_i$.

Montrons que cette somme est directe :

Posons : $G_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_j$

$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, si $i \neq j$: $\text{Im } p_j \subset \ker p_i = F_i$ donc $G_i \subset F_i$.

$G_i \cap E_i \subset F_i \cap E_i = \ker p_i \cap \text{Im } p_i = \{0\}$

Donc $E_i \oplus G_i = E$ est directe donc $E_i \oplus F_i = E = E_i \oplus G_i$ et $G_i \subset F_i$ donc $F_i = G_i$ et $\forall i, p_i(x) \in E_i$, $\ker p_i = \sum_{j \neq i} \text{Im } p_j$

Rappel : Si $F \oplus G = F \oplus G'$ et $G \subset G'$, $G = G'$

Preuve :

$x \in G'$ s'écrit $x = x_F + x_G$ mais lors x_F est nulle à cause de la deuxième somme directe, donc $x \in G$.

E est un \mathbb{K} -ev de dimension n .

$B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

Pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $\gamma_k: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \gamma_k(x) \end{cases}$ l'application (linéaire) qui à $x \in E$ associe sa coordonnée sur e_k dans B . Autrement dit, $\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \gamma_k(x) e_k$ puisqu'il y a existence et unicité de l'écriture de x comme CL d'éléments de B .

De plus, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si

$$0_{E^*} = \sum_{i=1}^n \mu_i \gamma_i$$

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \gamma_i \right) (e_k) = \sum_{i=1}^n \mu_i \gamma_i(e_k) = \mu_k \gamma_k(e_k) = \mu_k e_k$$

Donc $\mu_k = 0$

Ainsi, la famille des $(\gamma_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre et $\dim E^* = \dim L(E, \mathbb{K}) = \dim E \dim \mathbb{K} = \dim E$ donc c'est une base de E^* dite base duale de B et notée $B^* = (\gamma_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Note : dans les photocopies, on a noté $B^*: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto \text{ses coordonnées dans } B \end{cases}$ mais c'est la même chose si on considère que $\underbrace{(f_1, \dots, f_n)}_{n\text{-uplet appliqué à un vecteur}}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Ainsi, $B^*: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto (\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)) \end{cases}$

Remarque : lorsque $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , on note pour la k -ième coordonnée γ_k dans B e_k^* . Et donc, $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$, et $e_k^*(x) =$ coordonnée de x sur e_k .

Théorème : soit $B = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ et $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in (E^*)^n$ avec $n = \dim E$.

Sans même supposer B ou Γ libres ou génératrices, si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \gamma_i(e_j) = \delta_{i,j}$, alors B est une base de E et $B^* = \Gamma$.

Preuve : si $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \gamma_j(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = 0_{\mathbb{K}}$
 Mais également : $\gamma_j(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_j(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j$ donc $\lambda_j = 0$ donc B est libre et de cardinal n donc c'est une base de E . On a déjà vu que le même argument donne Γ libre donc base de E^* . Enfin, on montre mais pas le temps de copier que $\Gamma = B^*$.

Base anté-duale

Soit $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ une base de E^* ($\dim E = \dim E^* = n$).

Y-a-t-il et comment trouver une base B de E telle que $B^* = \Gamma$? Oui, et elle est unique.

Preuve : comme $\phi: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto (\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x)) \end{cases}$ est surjective (car $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ libre) et $\dim E = \dim \mathbb{K}^n$, ϕ est un isomorphisme. On cherche donc $B = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \gamma_i(e_j) = \delta_{i,j}$, id. est $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \phi(e_j) = (\delta_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, id. est $e_j = \phi^{-1}((\delta_{i,j})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}) = \phi^{-1}(C_j(I_n))$.
 Ainsi, $B = (\phi^{-1}(C_i(I_n)))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ convient.

Cette preuve est conceptuelle et donc non-constructive. Voici une preuve constructive :

Preuve : dans le cas où $E = \mathbb{K}^n$:

Les formes linéaires sur \mathbb{K}^n sont les $\phi_A : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \rightarrow \mathbb{K} \\ X & \mapsto A^T X \end{cases}$.

On a donc, pour $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in ((\mathbb{K}^n)^*)^n / \gamma_k = \phi_{A_k}$ où $A_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Et $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ libre $\Leftrightarrow (A_1, \dots, A_n)$ libre \Leftrightarrow (posant $A = (A_1 | \dots | A_n)$ (la matrice des colonnes)) $\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{K})$.

On cherche alors $\left(X_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{pmatrix} \right)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in (\mathbb{K}^n)^n$ tq $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \gamma_i(X_j) = A_i^T X_j = \delta_{i,j}$.

Autrement dit, si $X = (X_1 | \dots | X_n)$, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, C_i(A)^T * C_j(X) = \delta_{i,j}$.

Bref, on cherche X tq $(A^T X)_{i,j} = \delta_{i,j}$, soit $A^T X = I_n$.

Il y en a une et une seule, A étant inversible : $X = (A^{-1})^T$

Si $\gamma_k = \phi_{A_k}$, la base anté-duale est $(C_i(X))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$

Dans le cas où $E \neq \mathbb{K}^n$: soit B_0 est une base de E . Si $A_k = B_0^*(\gamma_k)$ et que $A = (A_1 | \dots | A_n)$ et que $M = (A^{-1})^T$, la base anté-duale de $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ $B = (e_1, \dots, e_n)$ est celle donnée par $B_0^*(e_k) = C_k((A^{-1})^T)$ via le processus précédent.

Sous-corps et sur-corps

Définition : \mathbb{L} est un sur-corps de \mathbb{K} si $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ et \mathbb{L} est un corps.

Proposition : soit \mathbb{L} un sur-corps de \mathbb{K} . Si $E_{\mathbb{L}} = (E, +, \times)$ est un \mathbb{L} -ev, alors $E_{\mathbb{K}} = (E, +, \times_{|\mathbb{K}})$ est un \mathbb{K} -ev. De plus, \mathbb{L} est un \mathbb{K} -ev.

Proposition : soit \mathbb{L} un sur-corps de \mathbb{K} . Si $\dim_{\mathbb{L}} E = m$ et $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = p$, alors :

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \dim_{\mathbb{L}} E = mp$$

Remarque : si E est un \mathbb{C} -ev de dimension n , c'est un \mathbb{R} -ev de dimension $2n$. En effet : si (e_1, \dots, e_n) est une \mathbb{C} -base de E , $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ est une \mathbb{R} -base de E .