

Définition : le déterminant d'une matrice est :

$$\det[x_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{j, \sigma(j)}$$

Proposition : $\det {}^t A = \det A$.

Proposition : Toute forme n linéaire alternée des colonnes (ou des lignes) sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est un multiple scalaire $\lambda \times \det$ du déterminant, et puisque $f(I_n) = \lambda \det I_n$, $\lambda = f(I_n)$.

Proposition : déterminant par bloc : pour $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \times \det B$$

Preuve : soit $f: \begin{cases} \mathfrak{M}_p(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ M & \longmapsto \det \begin{pmatrix} M & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \end{cases}$. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $C_k \begin{pmatrix} M & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_k(M) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui donne que pour $X, Y \in \mathbb{K}^{p+q}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\begin{pmatrix} X + \lambda Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc puisque le déterminant est linéaire par rapport aux colonnes, f est linéaire.
Par ailleurs, si pour des $i < j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $C_i(M) = C_j(M)$, $f(M) = 0$.
 f est donc p linéaire alternée des colonnes de M , donc $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid f = \lambda \times \det$.
De plus, $\lambda = f(I_p) = \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
De plus, le même argument donne que $g: \begin{cases} \mathfrak{M}_p(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ N & \longmapsto \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & N \end{pmatrix} \end{cases}$ est q linéaire alternée des lignes de N , et donc $g = g(I_n) \det N$. Or $g(I_n) = \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = 1$ car la matrice est triangulaire avec une diagonale de 1. Par conséquent, $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \times \det A = g(B) \det A = \det B \times \det A$.

Corollaire : par récurrence, le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

Proposition : formules de Cramer :

Pour $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^n$, la solution de $AX = B$ est donnée par $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$x_k = \frac{\det((C_k \leftarrow B)A)}{\det A}$$

Où $(C_k \leftarrow B)A$ signifie que la colonne k de A est remplacée par la colonne B .

Si $AX = B$, on a $B = \sum_{i=1}^n x_i C_i(A)$
 $\det((C_k \leftarrow B)A) = \det \left(\left(C_k \leftarrow \sum_{i=1}^n x_i C_i(A) \right) A \right) = \sum_{i=1}^n x_i \det[(C_k \leftarrow C_i(A))A]$
Si $i \neq k$, $A' = (C_k \leftarrow C_i(A))A$ a deux colonnes égales $C_k(A') = C_i(A) = C_i(A')$ donc $\det[(C_k \leftarrow C_i(A))A] = 0$.
Ainsi, $\det((C_k \leftarrow B)A) = x_k \det[(C_k \leftarrow C_k(A))A] = x_k \det A$, et finalement :
 $x_k = \frac{\det((C_k \leftarrow B)A)}{\det A}$

Proposition – définition : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Notant $A_{i,j}$ la matrice mineure de A obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A , et $\Delta_{i,j}(A) = \det A_{i,j}$, la comatrice de A se note ${}^cA = [(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A)]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. On a alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t cA$$

Cf. cours de sup. pour la (longue et fastidieuse) preuve.

Corollaire : pour \mathbb{A} sous anneau de \mathbb{K} , $\mathfrak{M}_n(\mathbb{A})$ est un sous anneau de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \in GL_n(\mathbb{A}) \iff \det A$ est inversible dans \mathbb{A} .

Définition : X est vu comme le polynôme formel X^1 .

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}[X])$, $(XI_n - A) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}[X])$, c'est la matrice caractéristique de A .

$\chi_A := \det(XI_n - A)$ est le polynôme caractéristique de A .

Proposition : $\chi_A \in X^n + \mathbb{K}_{n-1}[X]$

- $\text{coef}(X^n) = 1$
- $\text{coef}(X^{n-1}) = -\text{tr } A$
- $\text{coef}(X^0) = (-1)^n \det A$

Bribe de preuve :

$XI_n - A = [a'_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$, où $a'_{i,j} = \delta_{i,j}X - a_{i,j}$, qui est de degré 1 ssi $i = j$.

Par conséquent :

$$\chi_A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

Posant $P_\sigma = \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$, si $\sigma \neq \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$, $\deg P_\sigma < n$ et si $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$, $\deg P_\sigma = n$, donc $\deg \chi_A = n$ et son coefficient dominant est celui de $\prod_{i=1}^n (X - a_{i,i})$, soit 1. Ainsi :

$$\chi_A \in X^n + \mathbb{K}_{n-1}[X]$$

Corollaire : pour $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, $\chi_A = X^2 - \text{tr } A X + \det A$.

Remarques : • $\text{sp}_{\mathbb{K}} A = Z_{\mathbb{K}}(\chi_A)$

• Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, la multiplicité de λ dans χ_A est parfois appelée multiplicité de la valeur propre, ou encore dimension caractéristique.

Proposition – définition : deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

On peut donc définir le polynôme caractéristique de $f \in L(E)$ comme le polynôme caractéristique d'une matrice représentative de f dans une base quelconque.

Définition : soit $f \in L(E)$ et F sev de E tels que $f(F) \subset F$. $f|_F^F \in L(F)$ est l'endomorphisme induit par f sur F .

Proposition : $\chi_{f|_F^F} \mid \chi_f$ et $\Pi_{f|_F^F} \mid \Pi_f$

Preuve : on pose $g = f|_F^F$.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x \in F$, $P(g)(x) = P(f)(x)$ donc $\Pi_f(g) = \Pi_f(g)|_F^F = 0_{L(E)}$, et donc comme Π_f annule g , $\Pi_g \mid \Pi_f$.

On prend \mathcal{B}_F une base de F qu'on complète en une base \mathcal{B} de E .

$\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} M & Q \\ 0 & N \end{pmatrix}$ où $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F} f|_F^F$, ce qui donne :

$$\left| \begin{array}{l} \chi_f = \chi_A = \det(XI_n - A) = \det \begin{pmatrix} XI_p - M & -Q \\ 0 & XI_q - N \end{pmatrix} \text{ où } p = \dim F. \\ \chi_f = \det(XI_p - M) \times \det(XI_q - N) = \chi_{f|_F} \times \chi_N \text{ donc } \chi_{f|_F} \mid \chi_f. \end{array} \right.$$

Proposition : soit $f \in L(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, soit m_λ la multiplicité de λ dans χ_f . Alors :

$$\dim E_\lambda(f) \leq m_\lambda$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Preuve : soit } q = \dim E_\lambda(f) \text{ et } \mathcal{B}_\lambda \text{ une base de } E_\lambda(f), \text{ qu'on complète en une base } \mathcal{B} \text{ de } E. \\ \text{Puisque } f(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f), \text{ Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} \lambda I_q & osef \\ 0 & osef \end{pmatrix}, \text{ donc } (X - \lambda)^q \mid \chi_f \text{ donc } q \leq m_\lambda. \end{array} \right.$$

Diagonalisation des matrices

Préambule : pour $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$:

- $D \sim \Delta \iff \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_k = \lambda_{\sigma(k)}$
- Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $\dim E_\alpha(D)$ est le nombre d'occurrences de α sur la diagonale.
- Si $\text{sp } D = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ a $p < n$ éléments, soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ une énumération de $\text{sp } D$ et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $m_k = \dim E_{\alpha_k}(D)$, on a $D \sim \text{diag}(\alpha_1 I_{m_1}, \dots, \alpha_p I_{m_p})$.

Cela justifie l'intérêt de la diagonalisation des matrices.

Dans ce chapitre, E est un \mathbb{K} -ev de dimension n .

Définition :

- $f \in L(E)$ est diagonalisable s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in \text{Diag}_n(\mathbb{K})$.
- $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si $\exists D \in \text{Diag}_n(\mathbb{K}) \mid A \sim D$.

Remarque : on peut énoncer les mêmes théorèmes en termes matriciels : A est diagonalisable $\iff u_A$ est diagonalisable.

Théorème : pour $f \in L(E)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est diagonalisable
- Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f .
- $\bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} E_\lambda(f) = E$.
- $\sum_{\lambda \in \text{sp } f} \dim(E_\lambda(f)) = n$.
- f annule un polynôme scindé simple.
- Π_f est scindé simple ($\Pi_f = \prod_{\lambda \in \text{sp } f} (X - \lambda)$).
- χ_f est scindé et $\forall \lambda \in \text{sp } f$, $\dim E_\lambda(f) = m_\lambda(\chi_f)$.
- Pour toute base \mathcal{B} de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ est diagonalisable.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Preuves :} \\ \text{Dire que } \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)} f = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \text{ c'est dire que } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_k) = \lambda_k e_k, \text{ soit } e_k \in E_{\lambda_k}(f) \text{ et donc} \\ (e_1, \dots, e_n) \text{ sont des vecteurs propres de } f, \text{ et, le sens réciproque étant évident, } f \text{ est diagonalisable} \iff \\ \text{il existe une base de } E \text{ formée de vecteurs propres de } f. \end{array} \right.$$

Si $\bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} E_\lambda(f) = E$, prenant pour chaque $\lambda \in \text{sp } f$, \mathcal{B}_λ , comme la somme est (toujours) directe, $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \text{sp } f} \mathcal{B}_\lambda$ est une base de E formée de vecteurs propres de f donc f est diagonalisable et on a évidemment $\sum_{\lambda \in \text{sp } f} \dim(E_\lambda(f)) = n$.

Réciproquement, si f est diagonalisable, et que $\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)} f = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ une énumération du spectre de f . $\dim E_{\alpha_k}(f) = \#\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_i = \alpha_k\}$ et comme $(\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_i = \alpha_k\})_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ partitionne $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{\alpha \in \text{sp } f} \dim E_\alpha(f) = \sum_{k=1}^p \dim E_{\alpha_k}(f) = n$.

Soit $Q = \prod_{\lambda \in \text{sp } f} (X - \lambda)$, comme les $X - \lambda$ sont irréductibles et distincts, ils sont deux à deux premiers entre eux. Le théorème des noyaux donne :

$$\ker Q(f) = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} \ker(f - \lambda \text{Id}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} E_\lambda(f).$$

Par conséquent, f diagonalisable $\iff \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} E_\lambda(f) = \ker Q(f) = E$, soit $Q(f) = 0$, donc $\Pi_f \mid Q$.

De plus, $\text{sp } f = Z_{\mathbb{K}}(\Pi_f)$ donc tous les $X - \lambda$ divisent Π_f et $Q \mid \Pi_f$ également, donc finalement $\Pi_f = Q$.

Si Π_f est scindé simple, puisqu'il annule f , f annule un polynôme scindé simple.

Si f est diagonalisable, non seulement il y a une base \mathcal{B} de vecteurs propres de f dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ est diagonale, mais, notant $(\alpha_k)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ une énumération de $\text{sp } f$ et $\mu_k = \dim E_{\alpha_k}(f)$, pour \mathcal{B}_k base de $E_{\alpha_k}(f)$, et $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \llbracket 1, p \rrbracket} \mathcal{B}_\lambda$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \text{diag}(\alpha_1 I_{\mu_1}, \dots, \alpha_p I_{\mu_p}) = D$.

$$\chi_f = \chi_D = \det(X I_n - D) = \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{\mu_k}$$

On a donc que χ_f est scindé (pas simple) et $\mu_k = \dim E_{\alpha_k}(f)$ est la multiplicité de α_k dans χ_f .

Par ailleurs, si χ_f est scindé :

$$\chi_f = \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{\mu_k} = \prod_{\alpha \in \text{sp } f} (X - \alpha)^{\mu_\alpha}$$

Alors, $\sum_{\alpha \in \text{sp } f} \mu_\alpha = \deg \chi_f = n$ donc si pour tout $\alpha \in \text{sp } f = Z_{\mathbb{K}}(\chi_f)$, $\dim E_\alpha(f) = \mu_\alpha$, $\sum_{\alpha \in \text{sp } f} \dim(E_\alpha(f)) = n$, on a déjà vu que f est diagonalisable plus haut.

Remarques & trix :

- Une matrice P qui diagonalise la matrice A est une matrice inversible dont les colonnes sont des colonnes propres de A .

- Si on prend $P \in \mathbb{C}[X]$, il est scindé. Comment savoir si ses racines sont simples ?

$$v_\alpha(P) > 1 \iff [(X - \alpha) \mid P \text{ et } (X - \alpha) \mid P']$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{K} / v_\alpha(P) > 1 \iff \exists \alpha \in \mathbb{K} / (X - \alpha) \mid P \wedge P' \iff P \wedge P' \neq 1$$

- Pour $f \in L(E)$, avec E de dimension finie : f a un vecteur propre $\iff f$ a une valeur propre $\iff Z_{\mathbb{K}}(\Pi_f) \neq \emptyset$. Par conséquent, sur \mathbb{C} , tout endomorphisme a au moins un vecteur propre.

- Dire que la droite $D = d \cdot \mathbb{K}$ est stable par f , c'est dire que d est un vecteur propre de f .

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, f(E_\lambda(f)) \subset E_\lambda(f)$. De mêmes, les sevs des sevs propres sont stables par f .

- Si $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f(F_k) \subset F_k$, alors $f(\sum_{k=1}^p F_k) \subset \sum_{k=1}^p F_k$.

- Si f diagonalisable et $f(F) \subset F$, $f|_F^F$ est diagonalisable (car Π_f , scindé simple, annule $f|_F^F$).

- Pour une matrice triangulaire avec des termes diagonaux distincts, les termes diagonaux sont tous des valeurs propres et la matrice est semblable à la matrice diagonale formée de ses coefficients diagonaux.

- $ND = DN \implies N$ diagonale quand D diagonale à termes à termes diagonaux 2 à 2 distincts.

- $A \sim \lambda I_n \iff A = \lambda I_n$

- Les sevs stables de $f \in L(E)$ diagonalisable ? Les sevs des sevs propres sont stables et les sommes de sevs stables sont stables donc les $\bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} F_\lambda$ où $F_\lambda \subset E_\lambda(f)$ sont stables. Réciproquement si F stable par f , Π_f annule $f|_F^F$ qui est donc diagonalisable et $F = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} F_\lambda(f)$ avec $F_\lambda(f) = E_\lambda(f) \cap F$.
- Multiplier à droite par une inversible conserve l'image et à gauche par une inversible conserve le noyau.

Proposition – définition : Pour $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in X^n + \mathbb{K}_{n-1}[X]$, la matrice compagne de P est :

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} = [\delta_{i,j+1} - \delta_{j,n-1} a_i]_{(i,j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2}$$

De plus, $P = \chi_{C_P} = \Pi_{C_P}$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est P

(démonstration possible en développant par rapport à L_1 puis avec une récurrence ou en développant par rapport à la dernière colonne). Ou alors :

$$XI_n - C_P = [-\delta_{i,j+1} + X\delta_{i,j} + \delta_{j,n-1} a_i]_{(i,j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2} = \begin{bmatrix} X & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$B = [\delta_{i \leq j} X^{j-i}]_{(i,j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2} = \begin{bmatrix} 1 & X & \cdots & X^{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B(XI_n - C_P) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=0}^{n-1} X^k a_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sum_{k=i}^{n-1} X^{k-i} a_k \end{bmatrix}$$

Et a pour terme général :

$$\begin{aligned} [B(XI_n - C_P)]_{i,j} &= \sum_{k=0}^{n-1} (\delta_{i \leq k} X^{k-i}) (-\delta_{k,j+1} + X\delta_{k,j} + \delta_{j,n-1} a_k) \\ &= \sum_{k=i}^{n-1} X^{k-i} (-\delta_{k,j+1} + X\delta_{k,j} + \delta_{j,n-1} a_k) \\ &= -X^{j-i+1} + X^{j-i} X + \delta_{j,n-1} \sum_{k=i}^{n-1} X^{k-i} a_k \\ &= \delta_{j,n-1} \sum_{k=i}^{n-1} X^{k-i} a_k \end{aligned}$$

Sur la première ligne, le dernier terme est $P(X)$ et peu importe les termes en dessous.

On développe par rapport à la première ligne, et on a immédiatement $\det(B(XI_n - C_P)) = P(X)$

De plus, $\det B = 1$ (triangulaire supérieure) donc $\chi_{C_P} = \det(XI_n - C_P) = P(X)$

Le polynôme minimal de cette matrice est P .

Preuve : soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{n-1})$ base de E . On pose $f \in L(E)$ défini par $XI_n - C_P = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$.
 $\forall k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket, f(e_k) = e_{k-1} = f^{k-1}(e_0)$
 $f(e_{n-1}) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k e_k$
On remarque que (f^0, \dots, f^{n-1}) est libre donc $\deg \Pi_f \geq n$.
De plus, $f(e_{n-1}) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k e_k \implies f(e_{n-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f(e_{k-1}) = 0$ donc $P(f)(e_k) = 0$ pour tous les e_k et $P(f)$ est nul sur une base donc $\Pi_f \mid P$ et comme $\deg \Pi_f \geq \deg P$ et comme les deux sont unitaires, ils sont égaux.

Théorème de Cayley-Hamilton : $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \chi_A(A) = 0_{n,n}$.

→ le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Preuve : soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n , $f \in L(E)$ et $x \in E$.
Considérons F le plus petit sev stable par f contenant x .
Soit $p = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \left(f^i(x) \right)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket} \text{ est liée} \right\}$. Bien sûr, $p \leq n$ et $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)) = \mathcal{B}_x$ libre.
 $f^p(x) \in \text{vect}(\mathcal{B}_x)$
Si $f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x)$, posons $S = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k$ en sorte que $S(f)(x) = 0$.
On a évidemment $F \subset \text{vect} \left(\left(f^i(x) \right)_{i \in \mathbb{N}_x} \right)$ (par définition) et comme $f \left(\left(f^i(x) \right)_{i \in \mathbb{N}} \right) \subset \left(f^i(x) \right)_{i \in \mathbb{N}}$ et par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}, f^k(x) \in F$ donc $F = \text{vect} \left(\left(f^i(x) \right)_{i \in \mathbb{N}} \right) = \mathbb{K}[f]$.
En posant la DE pour tout polynôme P , $P = SQ + R$ et en évaluant en x , on trouve que \mathcal{B}_x est une base de F .
Soit $g = f|_F^F$. On a $\Pi_g \mid \Pi_f$ et $\chi_g \mid \chi_f$.
On remarque que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_x} g = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\lambda_0 \\ 1 & & & & & & -\lambda_1 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -\lambda_{n-1} \end{pmatrix}$. On a donc $\chi_g = S \mid \chi_f$ et $S = \Pi_g$ donc $\Pi_g \mid \chi_f$ donne $\chi_f(g) = 0$ donc $\chi_F(f)(x) = 0$, et tout cela étant pour un $x \in E$ quelconque, $\chi_f(f) = 0$.

Remarque : on peut croire à tort que ceci est bête puisque $\chi_A = \det(XI_n - A)$ donc $\chi_A(A) = 0$. Mais c'est faux puisqu'on ne peut pas évaluer ce X en A mais uniquement en un scalaire.

Proposition – définition : pour E \mathbb{K} -ev de dimension n , un drapeau est un $(n+1)$ -uplet (E_0, \dots, E_n) de sevs de E tels que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_{k-1} \subsetneq E_k$, soit de manière équivalente :

$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \dim E_k = k$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_{k-1} \subset E_k$.

Le drapeau est dit « incomplet » s'il lui manque E_0 (ce qui n'est pas bien grave puisque $E_0 = \{0\}$ dans un drapeau).

Une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est dite adaptée au drapeau $\mathcal{D} = (E_1, \dots, E_n)$ ou encore engendrant \mathcal{D} ssi $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{vect}(e_1, \dots, e_k) = E_k$.

Remarque : pour une base quelconque (e_1, \dots, e_n) , $\mathcal{D} = (\text{vect}(e_1, \dots, e_k))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un drapeau.

Exemple : pour $E = \mathbb{K}_n[X]$, $(\mathbb{K}_i[X])_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ n'est pas un drapeau (car $\dim \mathbb{K}_i[X] = i + 1$). Les familles à degrés étagés (P_n) telles que $\forall k, \deg P_k = k$ sont les drapeaux de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition : si $\mathcal{D} = (E_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un drapeau, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base $\iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_k \in E_k \setminus E_{k-1}$.

Proposition : pour \mathcal{B} base de E , $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in \mathcal{T}_n^{\geq}$ (est triangulaire supérieure) $\iff f$ stabilise le drapeau engendré par \mathcal{B} .

Il existe une base de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in \mathcal{T}_n^{\geq} \iff f$ stabilise un drapeau.

Preuve : pour $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, soit $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathcal{B}_k = (e_1, \dots, e_k)$ et $E_k = \text{vect}(\mathcal{B}_k)$.
 Soit $A = [a_{i,j}]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$.
 Si f stabilise E_j , $f(e_j) = \sum_{i=0}^n a_{i,j} e_i \in E_j = \text{vect}(\mathcal{B}_j)$. Et notant (b_j) les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base \mathcal{B}_j de E_j , $f(e_j) = \sum_{i=0}^j b_i e_i$ donc $\forall i > j, a_{i,j} = 0$. Ceci étant vrai pour tous les j , A est triangulaire supérieure. La réciproque relève de l'interprétation matricielle de la stabilité.

Proposition – définition : f est trigonalisable s'il existe \mathcal{B} base telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in \mathcal{T}_n^{\geq}$ (f stabilise un drapeau).

$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \mid P^{-1}AP \in \mathcal{T}_n^{\geq}$.

f trigonalisable $\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ trigonalisable pour toute base \mathcal{B} .

Proposition : $f \in L(E)$ trigonalisable $\implies \chi_f$ scindé et $\chi_f(f) = 0_{L(E)}$ (idem matrices).

Preuve : soit $f \in L(E)$ trigonalisable et \mathcal{B} base de E telle que $A = [a_{i,j}]_{i,j} = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in \mathcal{T}_n^{\geq}$.
 $\chi_f = \chi_A = \det(XI_n - A) = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i})$ car $XI_n - A \in \mathcal{T}_n^{\geq}$, donc χ_f scindé.
 Soit $(E_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ le drapeau engendré par \mathcal{B} .
 On a $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (f - a_{j,j}Id)(E_j) \subset E_{j-1}$. En effet, Id stabilise tout le monde donc $f - a_{j,j}Id$ stabilise les E_k donc $\forall k \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket, (f - a_{j,j}Id)(e_k) \in E_k \subset E_{j-1}$ et
 $(f - a_{j,j}Id)(e_j) = \sum_{i=1}^j a_{i,j} e_i - a_{j,j} e_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} e_i \in E_{j-1}$
 Ainsi, $f(E_j) = \text{vect}(f(e_i), i \in \llbracket 1, j \rrbracket) \subset E_{j-1}$.
 On a donc $(X - a_{n,n})(f)(E) = (f - a_{n,n}Id)(E_n) \subset E_{n-1}$.
 Si $\prod_{i=k}^n (X - a_{i,i})(f)(E) \subset E_{n-k}$, alors
 $\prod_{i=k-1}^n (X - a_{i,i})(f)(E) = (f - a_{k-1,k-1}) \left(\prod_{i=k}^n (X - a_{i,i})(f)(E) \right) \subset (f - a_{k-1,k-1})(E_{n-k}) \subset E_{n-k-1}$
 Par récurrence, $\chi_f = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i})$ annule f .

Lemme : pour $f \in L(E)$, si $\text{sp } f \neq \emptyset$, il y a un hyperplan stable par f .

Preuve : pour $\lambda \in \text{sp } f$, $\text{Im}(f - \lambda Id) \subsetneq E$ car $\text{rg}(f - \lambda Id) = n - \dim E_{\lambda}(f) < n$.
 Il y a donc un hyperplan H qui contient $\text{Im}(f - \lambda Id)$ et $\forall x \in H, f(x) - \lambda x \in H$ donc
 $f(x) - \lambda x + \lambda x \in H$ donc $f(x) \in H$ et H est stable par f .

Théorème : E est un \mathbb{K} -ev de dimension n . $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable ssi A annule un polynôme scindé, ssi Π_A scindé.

Preuve : Si f annule un polynôme scindé (non-nul), alors $\text{sp } f \neq \emptyset$ car si f annule $\prod_{\lambda \in Z}(X - \lambda)$, alors $\prod_{\lambda \in Z}(f - \lambda Id)$ (où le produit désigne la composition) n'est pas injectif, et comme une composition d'injections est injective, une des $f - \lambda Id$ est non-injective et un des λ est une valeur propre de f .

Par récurrence sur $n = \dim E$:

$n = 1$: $\mathfrak{M}_1(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_1^{\geq}$.

$n \geq 1$: et on suppose le résultat quand $\dim E = n$. Si $\dim E = n + 1$, soit $f \in L(E)$ qui annule un polynôme scindé P . $\text{sp } f \neq \emptyset$ donc y'a un hyperplan E_n de $E = E_{n+1}$ stable par f .

$f|_{E_n}^{\uparrow E_n}$ annule P donc stabilise un drapeau (E_0, \dots, E_n) de E_n . Puisque f stabilise (E_0, \dots, E_{n+1}) , alors f est trigonalisable.

Fin de la récurrence.

Réciproquement, si A est trigonalisable, A est semblable à une $T \in \mathcal{T}_n^{\geq}$ donc $XI_n - A \sim XI_n - T$ et comme deux matrices semblables ont le même déterminant, $\chi_A = \chi_T$. Si les $(\alpha_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sont les termes diagonaux de T , on a alors : $\chi_A = \chi_T = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$, qui est donc scindé.

Deuxième équivalence :

Si P est scindé, $Q \mid P \implies Q$ scindé, donc si f est trigonalisable, soit P scindé tel que $P(f) = 0$. $\Pi_f \mid P$ donc Π_f scindé, et si Π_f scindé annule f , f annule un polynôme scindé.

Théorème de Cayley-Hamilton (restreint) : $\chi_A(A) = 0$ sur tout sous-corps de \mathbb{C} car sur \mathbb{C} les polynômes sont scindés, et que le polynôme minimal sur \mathbb{C} annule toujours la matrice.

Cela se résume en : l'ensemble des matrices trigonalisables sur \mathbb{C} est $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Lemme 1 : si $(u, v) \in L(E)$ sont nilpotents, $u + v$ aussi.

Preuve : si $u^m = 0$ et $v^p = 0$:

$$(u + v)^{m+p-1} = \sum_{k=0}^{m+p-1} \binom{m+p-1}{k} u^k v^{m+p-k-1}$$

Si $k \geq m$, $u^k = 0$ et si $k \leq m$, $m + p - k - 1 \geq p$ donc $v^{m+p-k-1} = 0$ donc $(u + v)^{m+p-1}$ est nul.

Lemme 2 : si $(u, v) \in L(E)$ commutent et sont diagonalisables, ils sont simultanément diagonalisables (il y a une même base de vecteurs propres communs de u et v qui les diagonalise).

$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } u} E_{\lambda}(u)$ donc comme $u \circ v = v \circ u$, chaque $E_{\lambda}(u)$ est stable par v . On note $v_{\lambda} = v|_{E_{\lambda}(u)}^{\uparrow E_{\lambda}(u)}$.

$\Pi_{v_{\lambda}} \mid \Pi_v$ donc $\Pi_{v_{\lambda}}$ est également scindé simple et chaque v_{λ} est diagonalisable donc il y a une base \mathcal{B}_{λ} de $E_{\lambda}(u)$ formée de vecteurs propres de v_{λ} , donc de v .

Comme les éléments de \mathcal{B}_{λ} sont dans $E_{\lambda}(u)$, ce sont des vecteurs propres de u et $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \text{sp } f} \mathcal{B}_{\lambda}$ est une base formée de vecteurs propres de v et u à la fois.

Théorème de décomposition de Dunford : E \mathbb{K} -ev de dimension n et $f \in L(E)$ | χ_f est scindé sur \mathbb{K} .

Soit $\chi_f = \prod_{\lambda \in \text{sp } f} (X - \lambda)^{m_\lambda}$ sa factorisation. Alors :

- $\exists! (\delta, \nu) \in \mathbb{K}[f]^2$ | $f = \delta + \nu$, avec δ diagonalisable, ν nilpotent et $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$.
- Les $C_\lambda(f) = \ker[(f - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}]$ sont les sevs caractéristiques de f .
- $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} \ker[(f - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}] = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} C_\lambda(f)$.
- Les $C_\lambda(f)$ sont stables par f et pour $\lambda \in \text{sp } f$, $f|_{C_\lambda(f)}$ a une unique valeur propre λ , $f - \lambda \text{Id}_{C_\lambda(f)}$ est nilpotente et $\dim C_\lambda(f) = m_\lambda$ (ce sont les dimensions caractéristiques).

Preuve : posons $C_\lambda = \ker[(f - \lambda \text{Id}_E)^{m_\lambda}]$. Comme les $(X - \lambda)^{m_\lambda}$ sont deux à deux premiers entre eux, le lemme des noyaux donne que les C_λ sont stables par f , que les projecteurs liés à la décomposition (les $\Pi_\lambda = p_{C_\lambda}$) sont des polynômes en f et que : $\ker \chi_f(f) = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} C_\lambda$

De plus, par Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0_{L(E)}$ donc $\ker \chi_f(f) = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} C_\lambda = E$.

On pose pour $\lambda \in \text{sp } f$: $f_\lambda = f|_{C_\lambda(f)}$ et $\mu_\lambda = \dim C_\lambda$.

Par définition, on a $\forall x \in C_\lambda$, $(X - \lambda)^{m_\lambda}(f_\lambda)(x) = (f - \lambda \text{Id})^{m_\lambda}(x) = 0$.

f_λ annule $(X - \lambda)^{m_\lambda}$ donc $\text{sp } f_\lambda \subset \{\lambda\}$.

Par ailleurs, comme pour $k \geq 1$, $\ker g \subset \ker g^k$, alors $\ker(f - \lambda \text{Id}) = E_\lambda(f) \subset C_\lambda$ donc $\mu_\lambda \neq 0$ et puisque $(f_\lambda - \lambda \text{Id}_{C_\lambda})^{m_\lambda} = 0 \implies (f_\lambda - \lambda \text{Id}_{C_\lambda}) \notin GL(C_\lambda)$, soit $\lambda \in \text{sp } f_\lambda$ et donc $\text{sp } f_\lambda = \{\lambda\}$.

De plus, on obtient que $(f_\lambda - \lambda \text{Id}_{C_\lambda})$ est nilpotente d'ordre au plus m_λ et donc comme $\chi_{f_\lambda} \mid \chi_f$, $Z_{\mathbb{K}}(\chi_{f_\lambda}) = \{\lambda\}$. On a également $\deg \chi_{f_\lambda} = \dim C_\lambda = \mu_\lambda$.

$\chi_{f_\lambda} = (X - \lambda)^{\mu_\lambda} \mid \chi_f$ donne $\mu_\lambda \leq m_\lambda$.

Par ailleurs, $\bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} C_\lambda = E \implies \sum_{\lambda \in \text{sp } f} \mu_\lambda = n = \deg \chi_f = \sum_{\lambda \in \text{sp } f} m_\lambda$, ce qui donne finalement que $\sum_{\lambda \in \text{sp } f} (m_\lambda - \mu_\lambda)$ est une somme nulle de termes positifs, donc ils sont tous nuls et $\forall \lambda \in \text{sp } f, m_\lambda = \mu_\lambda$.

On pose $\delta = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} \lambda \text{Id}_{C_\lambda}$ et $\nu = \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } f} (f_\lambda - \lambda \text{Id}_{C_\lambda})$, définis par restrictions aux supplémentaires C_λ . ($\forall \lambda \in \text{sp } f, \forall x \in C_\lambda, \begin{cases} \delta(x) = \lambda x \\ \nu(x) = f(x) - \lambda x \end{cases}$). On a bien sûr $f = \delta + \nu$ sur chaque C_λ , donc sur E .

De même, $\forall \lambda \in \text{sp } f, \forall x \in C_\lambda, \delta(\nu(x)) = \lambda \nu(x) = \nu(\lambda x) = \nu(\delta(x))$ donc $\delta \circ \nu = \nu \circ \delta$ sur chaque C_λ , donc sur E .

Unicité de la décomposition diagonalisable + nilpotente :

$\forall \lambda \in \text{sp } f, \forall x \in C_\lambda, \delta(x) = \lambda x$ donne $(E_\lambda(f) \subset) C_\lambda \subset E_\lambda(\delta)$ donc :

$$\dim E \geq \sum_{\lambda \in \text{sp } \delta} \dim E_\lambda(\delta) \geq \sum_{\lambda \in \text{sp } f} \dim C_\lambda(f) = \sum_{\lambda \in \text{sp } f} m_\lambda = \dim E$$

Et donc $\text{sp } \delta = \text{sp } f$, $E_\lambda(f) = E_\lambda(\delta)$ et δ est diagonalisable.

De plus, comme $\forall \lambda \in \text{sp } f, m_\lambda \leq m = \max_{\lambda \in \text{sp } f} m_\lambda$, $(f - \lambda \text{Id}_{C_\lambda})^{m_\lambda} = 0 \implies (f - \lambda \text{Id}_{C_\lambda})^m = 0$ et donc ν est nilpotent d'ordre au plus m .

Pour $x \in E, x = \sum_{\lambda \in \text{sp } f} \Pi_\lambda(x)$ et comme $\Pi_\lambda(x) \in C_\lambda, \delta(\Pi_\lambda(x)) = \lambda \Pi_\lambda$, on a $\delta(x) = \sum_{\lambda \in \text{sp } f} \lambda \Pi_\lambda(x)$, soit $\delta = \sum_{\lambda \in \text{sp } f} \lambda \Pi_\lambda$. Comme $\forall \lambda \in \text{sp } f, \Pi_\lambda \in \mathbb{K}[f], \delta \in \mathbb{K}[f]$ et $\nu = f - \delta \in \mathbb{K}[f]$.

Si $\exists(N, D) \in L(E)$ respectivement nilpotent et diagonalisable tels que $f = N + D$ et $N \circ D = D \circ N$, alors :

$D \circ f = D \circ (N + D) = D \circ N + D^2 = N \circ D + D^2 = f \circ D$ donc f et D commutent (idem pour N).

Par récurrence, on obtient que $\forall k \in \mathbb{N}, f^k \circ N = N \circ f^k$ et $f^k \circ D = D \circ f^k$ et finalement que N et D commutent avec tout polynôme en f .

Ainsi, $N \circ \nu = \nu \circ N$ et $\delta \circ D = D \circ \delta$. Par le lemme 1, $N - \nu$ nilpote, et $\delta - D$ est naturellement diagonalisable.
 $N + D = \delta + \nu \implies N - \nu = \delta - D$ est donc à la fois diagonalisable et nilpotent.
 u nilpotent $\implies \Pi_u = X^k$
 u diagonalisable $\implies \Pi_u$ scindé simple donc $k = 1$.
 $\Pi_u = X$, donc $0 = \Pi_u(u) = u$.
Ainsi, $N = \nu$ et $\delta = D$.

Proposition : si f, g trigonalisables et commutent, ils sont simultanément trigonalisables (i.e. $\exists \mathcal{B} \mid \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in \mathcal{T}_n^{\geq}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} g \in \mathcal{T}_n^{\geq}$). Enoncé identique version matrices.

Preuve : χ_f et χ_g sont scindés et $f \circ g = g \circ f$. f et g ont un vecteur propre commun : en effet, soit λ une valeur propre de f . $E_{\lambda}(f)$ est stable par g donc $g' = g|_{E_{\lambda}(f)}$ annule $\chi_{g'}$ qui est scindé donc a au moins une valeur propre μ .
Par récurrence : $n = 1$ trivial.
Si $\dim E = n + 1$, soit e_0 un vecteur propre commun de f et g . On complète en une base $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$ de E .

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{bmatrix} \lambda & \text{osef} \\ 0 & Z \end{bmatrix} \text{ et } B = \text{Mat}_{\mathcal{B}} g = \begin{bmatrix} \mu & \text{osof} \\ 0 & Y \end{bmatrix}.$$

On a bien sur $\Pi_A(A) = \Pi_f(A) = 0$ donc $\Pi_f(Z) = 0$ et de même $\Pi_g(Y) = 0$ et ces matrices annulent donc un polynôme scindé. $AB = BA$ donc Z et Y commutent. Par hypothèse de récurrence, $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \mid P^{-1}ZP = T \in \mathcal{T}_n^{\geq}$ et $P^{-1}YP = \Theta \in \mathcal{T}_n^{\geq}$.
On pose $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. On a alors $\mathcal{P}^{-1}A\mathcal{P} \in \mathcal{T}_{n+1}^{\geq}$ et $\mathcal{P}^{-1}B\mathcal{P} \in \mathcal{T}_{n+1}^{\geq}$ donc avec \mathcal{P} la matrice de passage de \mathcal{B} à une certaine base \mathcal{C} , on a $\text{Mat}_{\mathcal{C}} f \in \mathcal{T}_{n+1}^{\geq}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{C}} g \in \mathcal{T}_{n+1}^{\geq}$.

Remarque : la condition de commutation n'est pas nécessaire. Par exemple, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ sont triangulaires mais ne commutent pas.

En revanche, si A, B sont simultanément diagonalisables, $AB = BA$ (preuve en les diagonalisant + les matrices diagonales commutent entre elles).


- Au passage, si $f \circ g = g \circ f$ sont trigonalisables, ils ont un vecteur propre commun.

Proposition : pour $(f, g) \in L(E)^2$, si $f \circ g = g \circ f$ et f, g trigonalisables, alors f et g stabilisent un même hyperplan. Se prouve version matricielle car on utilise la transposition.


Proposition : pour $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2$, avec \mathbb{K} infini. $\chi_{AB} = \chi_{BA}$


Preuve : pour $\lambda \in \mathbb{K}$, si A inversible :
 $\chi_{AB}(\lambda) = \det(\lambda I_n - AB) = \det[A(\lambda A^{-1} - B)] = \det(\lambda A^{-1} - B) \det A = \det[(\lambda A^{-1} - B)A] = \chi_{BA}(\lambda)$.
Si A quelconque :
Posons : $P: \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ \mu \longmapsto (\chi_{(A-\mu I_n)B} - \chi_{B(A-\mu I_n)})(\lambda) \end{cases}$
 $P(\mu) = (-1)^n (\det[(A - \mu I)B - \lambda I_n] - \det[B(A - \mu I) - \lambda I_n])$.
 $\forall \mu \in \mathbb{K} \setminus \text{sp } A$, $P(\mu) = 0$ et comme $\mathbb{K} \setminus \text{sp } A$ est infini, $P = 0$ et donc $P(0) = 0$ donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Proposition : les applications $\begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{cases}$ et $\begin{cases} L(E) & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ f & \longmapsto & \chi_f \end{cases}$ sont continues. (car les coefficients de χ_A sont polynômiaux en les coefficients de A).

Remarque :  l'application $\begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ A & \longmapsto & \Pi_A \end{cases}$ n'est pas continue.


Exemple : considérons la suite $(A_n) = \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$. $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} X^2 = X^2$.

Notons $\odot_n(\mathbb{C})$ les matrices sympathiques de taille n (qui ont n vecteurs propres distincts),  $_n(\mathbb{K})$ les matrices diagonalisables.

- $\odot_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{card}(\text{sp } A) = n\}$
-  $_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists P \in GL_n \mid P^{-1}AP \in \text{Diag}\}$

Proposition : $\overline{\odot_n(\mathbb{C})} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (plus la force pour la preuve mais la demander à quelqu'un elle est importante).

Proposition : $n \geq 2$.

- $\odot_n(\mathbb{R}) \in \mathcal{O}(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))$ (cf. exercice 53 pour la preuve absolument introuvable).
-  $_n(\mathbb{K})$ n'est pas ouvert.
- $\overset{\circ}{\odot}_n = \odot_n = \overset{\circ}{\text{cat}}_n$.

Proposition : $M \sim A$ avec A diagonale $\iff \Pi_A = \Pi_M$ et $\chi_A = \chi_M$.

Trix de diagonalisation / trigonalisation :

Si $\chi_A = (X - 3)(X - 2)^2$ et $\Pi_A = (X - 3)(X - 2)^2$, on a donc A trigonalisable :

$\dim E_3(A) = 1$ et $\dim \ker(A - \lambda I_n)^2 = 2$.

De plus, $(A - 3I_n)(A - 2I_n)^2 = 0$ donc $\text{Im}(A - 2I_n)^2 \subset \ker(A - 3I_n)$ et d'après les égalités précédentes, on a égalité des dimensions donc $\text{Im}(A - 2I_n)^2 = \ker(A - 3I_n)$. Ainsi, il suffit de calculer $(A - 2I_n)^2$, prendre une colonne (car dimension 1) et elle engendre $\ker(A - 3I_n) = E_3(A)$.

De même, $\ker(A - 2I_n)^2 = \text{Im}(A - 3I_n)$ donc 2 vecteurs de $A - 3I_n$ libres engendrent $\ker(A - 2I_n)^2$.

Ce procédé marche aussi pour la diagonalisation.