

Définition : un produit scalaire sur un \mathbb{R} -ev E est une forme bilinéaire symétrique définie positive, i.e. toute application $\langle \cdot | \cdot \rangle : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- Bilinéarité : $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R} : \langle \lambda x + \mu y | z \rangle = \lambda \langle x | z \rangle + \mu \langle y | z \rangle$.
- Symétrique : $\forall (x, y) \in E^2 : \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$.
- Définie (= séparation) : $\forall x \in E : \langle x | x \rangle = 0 \iff x = 0_E$.
- Positivité : $\forall x \in E : \langle x | x \rangle \geq 0$.

Définition : un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un \mathbb{R} espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.
Si, de plus, E est de dimension finie, c'est un espace Euclidien.

Proposition – définition : le produit scalaire canonique est défini par : $\forall X = (x_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n, Y = (y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle (x_k) | (y_k) \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \text{tr } {}^t X Y$$

Définition : produit scalaire de Frobenius (= produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})$).

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{Frob}} : \begin{cases} \mathfrak{M}_{m,n}(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto \text{tr } {}^t A B \end{cases}$$


Proposition – définition : une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}$

Remarque : pour $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque, posant $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{B}} : (x, y) \mapsto \langle \mathcal{B}^*(x) | \mathcal{B}^*(y) \rangle$, \mathcal{B} est une base orthonormée pour ce produit scalaire \rightarrow en choisissant le produit scalaire, toute base peut être orthonormée.

Proposition – définition : soit I intervalle réel non-dégénéré.

- $L_c^2(I, \mathbb{R}) = \{f \in C^0(I, \mathbb{R}) \mid f^2 \in L^1(I, \mathbb{R})\}$ est un sev de $C^0(I, \mathbb{R})$
- On le munit du produit scalaire :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_I : \begin{cases} L_c^2(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto \int_I f g \end{cases}$$

Remarque :  la séparation n'est pas vérifiée pour les fonctions uniquement continues par morceaux, car alors : $\|f\| = 0 \iff \int_I f^2 = 0 \iff f$ est nulle là où elle est continue.

Proposition – définition : soit I un index.

- $l^2(I, \mathbb{R}) = \{(a_i)_{i \in I} \mid (a_i^2) \in l^1(I, \mathbb{R})\}$ est un sev de \mathbb{R}^I
- On le munit du produit scalaire :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_I : \begin{cases} l^2(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) & \longmapsto \sum_{i \in I} a_i b_i \end{cases}$$

Proposition : pour $(x, y) \in (E, \langle \cdot | \cdot \rangle)^2$:

- $x \perp y \iff \|x - y\| = \|x + y\|$ Rectangle
- $\|x\| = \|y\| \iff x + y \perp x - y$ Losange
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ Parallélogramme
- $\langle x | y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ Polarisation

Théorème de Pythagore : si $(x_1, \dots, x_n) \in (E, \langle \cdot | \cdot \rangle)^n$ sont deux à deux orthogonaux :

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 + 2 \sum_{(i \neq j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \underbrace{\langle x_i | x_j \rangle}_{=0} = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

⚠ la réciproque est fautive lorsque $n \geq 3$!

Définition : l'orthogonal d'un sev A de $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, a \perp x\} = \{x \in E \mid \forall a \in A, x \in \ker \langle a | \cdot \rangle\} = \bigcap_{a \in A} \ker \langle a | \cdot \rangle$$

Corollaire : on en déduit immédiatement que A^\perp est un sev fermé de E car $\langle a | \cdot \rangle$ est continue.

Remarques : • ⚠ en général, si $\dim E = \infty$, $F^{\perp\perp} \neq F$ sinon on aurait F systématiquement fermé en dimension infinie, ce qui est faux.

- En revanche, on a toujours $A \subset A^{\perp\perp}$.
- $A^\perp = (\text{vect } A)^\perp$. Par conséquent, pour (e_1, \dots, e_n) base de F , $F^\perp = \bigcap_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \ker \langle e_i | \cdot \rangle$.

Propositions : • $A \perp B \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall (x, y) \in A \times B, x \perp y \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$.

- En dimension finie, $F \oplus F^\perp = E$
- Soit p le projecteur orthogonal sur F . Soit $x \in E$: $d(x, F) = d(x, p(x)) = \|x - p(x)\|$
- Toute famille orthonormée de vecteurs non-nuls est libre.
- En dimension finie, $\varphi: \begin{cases} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \langle x | \cdot \rangle \end{cases}$ est un isomorphisme de E dans E^* (cf. infra théorème de Riesz).
- $\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k$, soit $\mathcal{B}^*(x) = (\langle x | e_i \rangle)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$
- Soit $f \in L(E, F)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ BON de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ BON de F . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} f = [\mathcal{C}^* (f(e_j))]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket} = [\langle \varepsilon_i | f(e_j) \rangle]_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket}$$

Théorème : soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

$$\exists \text{ base } (e_1, \dots, e_n) \text{ de } E \mid \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

La preuve est sans le procédé de Gram-Schmidt par récurrence sur n .

Méthode : orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ espace euclidien et (e_1, \dots, e_n) base de E .

Posant $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$u_k = \frac{e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle u_i | e_i \rangle u_i}{\|e_k - \sum_{i=0}^{k-1} \langle u_i | e_i \rangle u_i\|}$$

Alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{i,j}$ (orthonormée directe)

(u_1, \dots, u_n) est l'unique base orthonormée directe de E telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{vect}(u_1, \dots, u_k)$.

Théorème de représentation de Riesz : soit E euclidien et $\varphi \in E^*$.

$$\exists! a \in E \mid \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a | x \rangle$$

Preuve : soit (e_1, \dots, e_n) BON de E . Soit $a = \sum_{k=1}^n \varphi(e_k) e_k$. On remarque que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\langle a | e_i \rangle = \sum_{k=1}^n \varphi(e_k) \langle e_k | e_i \rangle = \sum_{k=1}^n \varphi(e_k) \delta_{k,i} = \varphi(e_i)$$

Par conséquent, $x \mapsto \langle a | x \rangle$ coïncide avec φ sur une base et elles sont égales.

Si a et a' sont tels que $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a | x \rangle = \langle a' | x \rangle$:

$$\langle a - a' | a - a' \rangle = \langle a | a \rangle - \langle a' | a \rangle - \langle a | a' \rangle + \langle a' | a' \rangle = \varphi(a) - \varphi(a) + \varphi(a') - \varphi(a') = 0 \implies a = a'$$

Pré-théorème de Parseval – Bessel : soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ préhilbertien et F sev de dimension n de E . Soit (e_1, \dots, e_n) une BON de F .

- $F \oplus F^\perp = E$
- $\forall x \in E, p_{F^\perp}(x) = \sum_{k=1}^n \langle e_k | x \rangle e_k$.
- $\forall x \in E, \sum_{k=1}^n \langle e_k | x \rangle^2 \leq \|x\|^2$ Inégalité de Bessel
- $\forall x \in E, \sum_{k=1}^n \langle e_k | x \rangle^2 = \|x\|^2 \iff x \in F$ Cas d'égalité de Parseval

Preuve : pour les 2 derniers points : soit $x \in E$. Les vecteurs $\sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k$ et $x - \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k$ sont orthogonaux. Pythagore :
 $\langle \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k | x - \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x | \langle x | e_k \rangle e_k \rangle - \|\sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k\|^2 = 0$
 $\|x\|^2 = \|\sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k\|^2 + \|x - \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle^2 + \|x - \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle e_k\|^2$.
 En particulier, $\sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2$, avec égalité ssi $x \in \text{vect}(e_1, \dots, e_p) = F$.

Théorème de Parseval – Bessel : soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ préhilbertien. Soit I dénombrable et $(e_i)_{i \in I}$ famille ON (donc libre) de E . Soit $F = \text{vect}(e_i)_{i \in I}$.


- $\forall x \in E, (\langle e_i | x \rangle^2)_{i \in I} \in l^1(I)$
- $\forall x \in E, \sum_{k \in I} \langle e_k | x \rangle^2 \leq \|x\|^2$ Inégalité de Bessel
- $\forall x \in E, \sum_{k \in I} \langle e_k | x \rangle^2 = \|x\|^2 \iff x \in \overline{F}$ Cas d'égalité de Parseval

(Bribe de) preuve : $\exists (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}_f(I)^\mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, I_n \subset I_{n+1}$ et $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ (par exemple pour $I = \{i_k, k \in \mathbb{N}\}$, prendre $I_n = \{i_k, k \in [0, n]\}$). Soit une telle famille.
 Pour chaque n , on pose $F_n = \text{vect}(e_i, i \in I_n)$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \subset F_{n+1}$ et $\dim F_n < \infty$.
 Pour $x \in F$, $\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{[I]}$ telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{i \in J_x} \lambda_i e_i$ avec $J_x = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$.
 Pour chaque $i \in J_x, \exists n_i \in \mathbb{N} \mid i \in I_{n_i}$. Soit $N = \max_{i \in J_x} n_i$. Ainsi :
 $x = \sum_{i \in J_x} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I_N} \lambda_i e_i \in F_N$
 Par conséquent, $\forall x \in E, \exists N \in \mathbb{N} \mid x \in F_N \iff F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Remarque : on a toujours $\|p(x)\| \leq \|x\|$ donc $\|p\| \leq 1$ et les projecteurs sont lipchitziens, continus...

Définition : on dit que la famille ON $(e_i)_{i \in I}$ est totale/complète/une base hilbertienne de E lorsque $\text{vect}(e_i)_{i \in I}$ est dense dans $E \iff$

$$\begin{aligned} & \forall x \in E, \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle^2 = \|x\|^2 && \text{Parseval pour tous} \\ \iff & \forall x \in E, \|x - \sum_{k=0}^n \langle x | e_k \rangle e_k\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \iff & \forall x \in E, \sum_{k=0}^n \langle x | e_k \rangle e_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_2} 0 \end{aligned}$$

Remarques :  on ne peut écrire $\sum_{k=0}^\infty \langle x | e_k \rangle e_k$ si le support de la famille n'est pas fini, car il n'existe de combinaisons linéaires infinies. De même que $x = \text{vect}(e_i, i \in \mathbb{N})$ n'a pas de sens.

Par exemple, lorsque l'on parle de polynômes, on a une base $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ mais un polynôme a un degré fini ! Il ne s'écrit jamais $\sum_{n=0}^\infty a_n X^n$ avec a_n non presque-nulle. Sinon, c'est une série entière.

Exemple : $E = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est l'espace des suites de réels de carré sommable.

Soit $e_k = (\delta_{k,i})_{i \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Alors puisque $\langle e_k | e_j \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{i,k} \delta_{i,j} = \delta_{k,j}$, (e_k) est ON.

Soit $(F_k) = (\text{vect}((e_i)_{i \in [1, n]}))_{n \in \mathbb{N}}$, suite d'ev de suites presque nulles à support de plus en plus grands, et F leur « limite » (l'ensemble de suites, quoi...).

(e_k) n'est pas une base de E , mais une famille totale/complète.

Définition : les polynômes de Legendre sont les $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$, orthonormalisés de Schmidt de $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour le produit scalaire $\begin{cases} \mathbb{R}[X]^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto \int_{[-1,1]} PQ. \end{cases}$

Remarque : • Le théorème d'approximation polynômiale de Weierstrass donne que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $C^0([-1,1])$ pour la norme infinie. Mais puisque $\|f\|_2^2 = \int_{-1}^1 f^2 \leq \int_{-1}^1 \|f\|_\infty^2 dt = 2\|f\|_\infty^2$, alors $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $C^0([-1,1])$ pour la norme définie ci-dessus.

• En général, $(\sum_{k=0}^n \langle f|L_k \rangle L_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_2} f$ n'entraîne pas $(\sum_{k=0}^n \langle f|L_k \rangle L_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_\infty} f$, mais (sans démonstration) si $f \in C^2$, c'est vrai.

Définition : on note E_n un espace euclidien orienté de dimension n . Les groupes orthogonaux sont :

$$O_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}$$

$$O(E) := \{f \in E^E \mid \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x)|f(y) \rangle = \langle x|y \rangle\} = \{f \in L(E) \mid \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|\}$$

Proposition : soit E euclidien $f \in O(E) \iff$ l'image de toute BON par f est une BON
 \iff pour toute BON \mathcal{B} , $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in O_n(\mathbb{R})$

Proposition – définition : soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det M = \pm 1$ car $(\det M)^2 = \det {}^tMM = \det I_n = 1$.

$$SO(E) := \{f \in O(E) \mid \det f = 1\} \text{ et } SO_n(\mathbb{R}) := \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}.$$

Ce sont les groupes spéciaux orthogonaux.

- $(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$
- $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$

Remarque : on ne s'intéresse pas à l'ensemble des endomorphismes de déterminant -1 car n'étant pas stable par \times (le produit de matrices de déterminant -1 a pour déterminant 1), il ne forme pas un groupe.

Théorème :

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\{M \in O_2(\mathbb{R}) \mid \det M = -1\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Corollaire : $SO_2(\mathbb{R})$ est un groupe abélien (commutatif).

Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}_0 deux BOND. On en déduit que pour $f \in SO(E_2)$, soit $M_\theta = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0} f$ et $M_\varphi = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0} \mathcal{B}$.
 $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = M_\varphi^{-1} M_\theta M_\varphi = M_\varphi^{-1} M_\varphi M_\theta = M_\theta \rightarrow f$ a la même matrice dans toutes les BOND.

⚠ Ceci est faux en dimension supérieure.

Proposition : soit $f \in O(E)$.

- $\text{sp } f \subset \{-1, 1\}$
- si F stabilise f , F^\perp aussi.
- si F stabilise f , $f|_F \in O(F)$.

Preuve : • si $x \neq 0$, $f(x) = \lambda x \implies |\lambda| \|x\| = \|f(x)\| = \|x\| \implies \lambda = \pm 1$.

• pour $y \in F^\perp$, $\forall x \in F$, $\langle f(y)|f(x) \rangle = \langle y|x \rangle = 0$ donne $f(y) \in f(F)^\perp$. Mais $f(F) \subset F$ et $f \in GL(E)$ donc $\dim F = \dim f(F)$ donc $f(F) = F$ et enfin $\forall y \in F^\perp$, $f(y) \in F^\perp$.

• si F stable par f , $\forall x \in F$, $\|f(x)\| = \|x\|$ donc $f|_F^F \in O(F)$.

Corollaire : soit $f \in O(E_n)$. $\exists \mathcal{B}$ BOND de E_n telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{bmatrix} I_p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & M_{\theta_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & M_{\theta_r} \end{bmatrix}$$

Définition :

$$S(E) := \{f \in L(E) \mid \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x)|y \rangle = \langle x|f(y) \rangle\}$$

$$A(E) := \{f \in L(E) \mid \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x)|y \rangle = -\langle x|f(y) \rangle\}$$

$$S_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M\}$$

$$A_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = -M\}$$

Proposition : pour \mathcal{B} BON de E de dimension n :

$$f \in O(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in O_n(\mathbb{R})$$

$$f \in S(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in S_n(\mathbb{R})$$

$$f \in A(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in A_n(\mathbb{R})$$

Théorème spectral : $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est ortho diagonalisable $\iff A \in S_n(\mathbb{R}) \iff$ il y a une BON de vecteurs propres de A . Les matrices symétriques réelles sont les matrices ortho-diagonalisables.

Preuve :

• Pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ donc elle a une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ et un vecteur propre $X \in E_\lambda^\mathbb{C}(A)$.

$$AX = \lambda X \implies {}^t X A = {}^t X {}^t A = \lambda {}^t X \implies {}^t \overline{X} A = \overline{\lambda} {}^t \overline{X} \implies {}^t \overline{X} A = \overline{\lambda} {}^t \overline{X} \implies {}^t \overline{X} A X = \overline{\lambda} {}^t \overline{X} X$$

$$\implies \lambda {}^t \overline{X} X = \overline{\lambda} {}^t \overline{X} X$$

$$\text{Notant } X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, {}^t \overline{X} X = \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \neq 0 \text{ donc } \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

On en conclut que $\text{sp}_\mathbb{C} A = \text{sp}_\mathbb{R} A$.

• Soit $f \in S(E)$ et F stable par f . Alors F^\perp est stable par f car pour $y \in F^\perp$, $\forall x \in F$, $\langle f(y)|x \rangle = \langle y|f(x) \rangle = 0$ car $f(x) \in F$ et donc $f(y) \in F^\perp$.

• On montre le théorème spectral par récurrence sur $n = \dim E$.

$n = 1$: trivial.

$n \geq 1$: et supposons le résultat vrai en dimension n . Soit E de dimension $n + 1$.

Soit $f \in S(E)$, $\lambda \in \text{sp } f$ et e_0 un vecteur propre de f pour λ normé.

On a donc $e_0 \mathbb{R}$ stable par f donc $F = (e_0 \mathbb{R})^\perp$ aussi et $\dim F = n$. Soit donc (e_1, \dots, e_n) BON de F constituée de vecteurs propres de f .

Puisque e_0 est orthogonal à tous les vecteurs de F donc en particulier à ses vecteurs de base, (e_0, \dots, e_n) est une BON de E diagonalisant f .

Réciproquement : si f est ortho-diagonalisable, soit \mathcal{B} une BON telle que $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ est diagonale. D est symétrique donc f est symétrique.

Proposition – définition : (HP) Soit $(E, \langle | \rangle)$ euclidien et $f \in L(E)$.

$$\exists! g \in L(E) \mid \forall (x, y) \in E^2, \langle x | f(y) \rangle = \langle g(x) | y \rangle$$

Ce g est dit adjoint de f et est noté f^* .

Preuve : soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ BON de E et $(f, g) \in L(E)^2$.

On pose $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}} g$.

$\forall (x, y) \in E^2$:

$$\langle x | f(y) \rangle = \langle g(x) | y \rangle \iff {}^t \mathcal{B}^*(x) A \mathcal{B}^*(y) = {}^t (B \mathcal{B}^*(x)) \mathcal{B}^*(y)$$

$$\iff {}^t \mathcal{B}^*(x) A \mathcal{B}^*(y) = {}^t \mathcal{B}^*(x) {}^t B \mathcal{B}^*(y)$$

Cela équivaut à : $\forall (X, Y) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), {}^t X A Y = {}^t X {}^t B Y$

En appliquant cela aux $L_i(I_n) = X$ et $C_j(I_n) = Y$, on trouve que cela équivaut à ${}^t B = A$.

L'adjoint est donc l'unique endomorphisme défini par $\text{Mat}_{\mathcal{B}} g = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ dans une base \mathcal{B} ON.

Exemples :

- Si $f \in S(E), \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$ donc $f^* = f$.
- Si $f \in A(E), \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) | y \rangle = -\langle x | f(y) \rangle$ donc $f^* = -f$.
- Si $f \in O(E), \forall (x, y) \in E^2, \langle x | f(y) \rangle = \langle f(f^{-1}(x)) | f(y) \rangle = \langle f^{-1}(x) | y \rangle$ donc $f^* = f^{-1}$.

Dans ces trois cas, on remarque que $f \circ f^* = f^* \circ f$.

Définition : • $f \in L(E)$ est normal si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

• $f \in S(E)$ est positive si $\forall x \in E, \langle f(x) | x \rangle \geq 0$. On note $S^+(E) := \{f \in S(E) \mid \forall x \in E, \langle f(x) | x \rangle \geq 0\}$ et $S^{++}(E) := \{f \in S(E) \mid \forall x \in E, \langle f(x) | x \rangle > 0\}$.

• $A \in S_n(\mathbb{R})$ est positive si $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t X A X \geq 0$. On note $S_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in S_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n, {}^t X A X \geq 0\}$ et $S_n^{++}(\mathbb{R}) := \{A \in S_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^t X A X > 0\} = S_n^+ \cap GL_n(\mathbb{R})$.

Remarque : • Evidemment, $f \in S^+(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in S_n^+(\mathbb{R}), f \in S^{++}(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}} f \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

• En fait, pour $(E, \langle | \rangle)$ euclidien, et $f \in L(E)$, si on pose $[|]_f : \begin{cases} E^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \langle x | f(y) \rangle \end{cases}$, $[|]_f$ est une forme bilinéaire. Si de plus $f \in S(E)$, $[|]_f$ est symétrique. Si de plus $f \in S^+(E)$, $[|]_f$ est positive. Si $f \in S^{++}(E)$, $[|]_f$ est aussi séparée et donc $f \in S^{++}(E) \iff [|]_f$ est un produit scalaire sur E .

• Exercice : montrer que $\begin{cases} L(E) & \longrightarrow \text{Bil}(E^2, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto [|]_f \end{cases}$ est un isomorphisme de \mathbb{R} -ev.

Exemple : soit $(E, \langle | \rangle)$ euclidien. Soit $u \in S(E)$ et $v \in S^{++}(E)$. Montrons que $u \circ v$ est diagonalisable.

Soit $[|]_v : \begin{cases} E^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \langle x | v(y) \rangle = \langle v(x) | y \rangle \end{cases}$, qui est un produit scalaire. Soit $(x, y) \in E^2$.

$$[u(v(x)) | y]_v = \langle u(v(x)) | v(y) \rangle \stackrel{u \in S(E)}{=} \langle v(x) | u(v(y)) \rangle = [u(v(y)) | x]_v$$

$u \circ v$ est symétrique pour $[|]_v$ donc il est ortho-diagonalisable par le théorème spectral.

Proposition : soit $(E, \langle | \rangle)$ euclidien et $f \in S(E)$.

- $f \in S^+(E) \iff \text{sp } f \subset \mathbb{R}_+$
- $f \in S^{++}(E) \iff \text{sp } f \subset \mathbb{R}_+^*$
- $\min_{\|x\|=1} \langle x | f(x) \rangle \in \text{sp } f$
- $\max_{\|x\|=1} \langle x | f(x) \rangle \in \text{sp } f$
- $\max_{\lambda \in \text{sp } f} |\lambda| = \max_{\|x\|=1} \langle x | f(x) \rangle = |||f|||$

Preuve : • Si $\lambda \in \text{sp } f$ et $f \in S^+(E)$, pour $x \in E_\lambda(f) \setminus \{0\}$, $\langle x|f(x) \rangle = \langle x|\lambda x \rangle = \lambda \|x\|^2 \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$ et $\text{sp } f \subset \mathbb{R}_+$. Idem pour $S^{++}(E)$ avec des inégalités strictes.

Réciproquement, soit (e_1, \dots, e_n) une BON de vecteurs propres de f (théorème spectral). $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_k) = \lambda_k e_k$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Si $\text{sp } f \subset \mathbb{R}_+$, pour $x \in E$, $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \implies f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k e_k$ et donc $\langle x|f(x) \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \geq 0$ donc $f \in S^+(E)$.

On déduit les autres propriétés de $\langle x|f(x) \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$.

Proposition – définition : racine carrée dans $S^+(E)$, $S_n^+(\mathbb{R})$.

Pour $f \in S^+(E)$ (resp. $A \in S_n^+(\mathbb{R})$) :

$$\begin{aligned} \exists! g \in S^+(E) \mid g^2 &= f \\ \exists! M \in S_n^+(\mathbb{R}) \mid M^2 &= A \end{aligned}$$

Puisque cette racine carrée est unique dans S^+ , on peut noter $g = \sqrt{f}$ et $M = \sqrt{A}$.

Preuve :

• Existence : soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Soit $P \in O_n(\mathbb{R}) \mid P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Comme $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ et posant $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $M = P\Delta P^{-1}$. D'une part :

$$M^2 = P\Delta^2 P^{-1} = A$$

• ${}^t M = {}^t(P\Delta P^{-1}) = {}^t P^{-1} {}^t \Delta {}^t P = P\Delta P^{-1} = M$ donc $M \in S_n(\mathbb{R})$. De plus, $\text{sp } M = \{\sqrt{\lambda_k}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \subset \mathbb{R}_+$ donc $M \in S_n^+(\mathbb{R})$.

• Unicité : rappel général :

Si f est diagonalisable, notant pour $\lambda \in \text{sp } f$, π_λ le projecteur sur $E_\lambda(f)$ parallèlement aux autres :

$$\forall x \in E, x = \sum_{\lambda \in \text{sp } f} \pi_\lambda(x) \implies f(x) = \sum_{\lambda \in \text{sp } f} \lambda \pi_\lambda(x) \implies f = \sum_{\lambda \in \text{sp } f} \lambda \pi_\lambda. \text{ Fin du rappel}$$

Soit $f \in S^+(E)$. Si $g \in S^+(E)$ tel que $g^2 = f$, alors, pour $\lambda \in \text{sp } g$ et $x \in E_\lambda(g)$, $g^2(x) = \lambda^2 x = f(x)$ donc $E_\lambda(g) \subset E_{\lambda^2}(f)$. Sur \mathbb{R}_+ , $\lambda \mapsto \lambda^2$ est bijective. Or $\text{sp } f \subset \mathbb{R}_+$ et $\text{sp } g \subset \mathbb{R}_+$.

On a donc :

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{\lambda \in \text{sp } g} E_\lambda(g) \implies \dim E = \sum_{\lambda \in \text{sp } g} \dim E_\lambda(g) \leq \sum_{\lambda \in \text{sp } g} \dim E_{\lambda^2}(f) = \dim E \\ \implies \sum_{\lambda \in \text{sp } g} \underbrace{\dim E_{\lambda^2}(f) - \dim E_\lambda(g)}_{\geq 0} &= 0 \end{aligned}$$

Comme on a déjà une inclusion, pour tout $\lambda \in \text{sp } g$, $E_\lambda(g) = E_{\lambda^2}(f)$.

• Fin classique : on a donc $\text{sp } f = \{\lambda^2, \lambda \in \text{sp } g\}$ et $\text{sp } g = \{\sqrt{\mu}, \mu \in \text{sp } f\}$. Les projecteurs orthogonaux sont donc les $\pi_\mu^{(f)} = \pi_{\sqrt{\mu}}^{(g)}$.

Enfin : $g = \sum_{\lambda \in \text{sp } g} \lambda \pi_{\sqrt{\lambda}}^{(g)} = \sum_{\mu \in \text{sp } f} \sqrt{\mu} \pi_\mu^{(f)}$ et g est donc exprimé en fonction de f et est unique.

• Fin alternative trop oufdingue :

Soit L le polynôme d'interpolation qui pour $\lambda \in \text{sp } f$ prend la valeur $\sqrt{\lambda}$.

Soit M une racine de A dans $S_n^+(\mathbb{R})$.

Alors A et M commutent donc sont simultanément diagonalisables et donc $\exists P \mid M = PDP^{-1}$, $A = P\Delta P^{-1}$. $E_\lambda(g) = E_{\lambda^2}(f)$ donc $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D^2$ avec $D = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$.

$$L(A) = L(P\Delta P^{-1}) = PL(\Delta)P^{-1} = PDP^{-1} = M$$

M est donc défini de manière unique comme $L(A)$ (on aurait pu prendre un autre polynôme d'interpolation mais il aurait pris la même valeur en A).

Décomposition QR : soit $A \in GL_n(\mathbb{R}) : \exists (\Omega, T) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^{\geq} \mid A = \Omega T$.

(C'est l'interprétation matricielle de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt).

Décomposition polaire inversible : soit $A \in GL_n(\mathbb{R}) : \exists! (\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \mid A = \Omega S$.

Preuve :

- Existence. ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$. Soit $S = \sqrt{{}^tAA} \in S_n^+(\mathbb{R})$ son unique racine carrée. Comme A est inversible, S l'est aussi.

$AS^{-1}({}^tAS^{-1}) = AS^{-1}{}^tS^{-1}{}^tA = A(S^2)^{-1}{}^tA = A({}^tAA)^{-1}{}^tA = I_n$ donc AS^{-1} est orthogonale.

- Unicité. Si $(\Omega, S) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \mid A = \Omega S$, alors ${}^tA = S\Omega^{-1}$ donc ${}^tAA = S^2$ mais comme tAA est symétrique positive, elle a une unique racine carrée dans $S_n^+(\mathbb{R})$ qui est donc S .

$\Omega = AS^{-1}$ assure son unicité.

Décomposition polaire : soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) : \exists(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R}) \mid A = \Omega S$.

(Esquisse de) Preuve : $O_n(\mathbb{R})$ est compact et $S_n^+(\mathbb{R})$ fermé. On applique donc le résultat de la décomposition polaire inversible à une suite de matrices inversibles tendant vers A . On a alors $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \Omega_k S_k$

On extrait de (Ω_k) une suite de matrices orthogonales qui converge vers Ω et on conclut avec $S_k = {}^t\Omega_k A_k$ qui a donc une limite dans $S_n^+(\mathbb{R})$. On a perdu l'unicité en devant prendre une suite extraite.

Décomposition Cholesky : soit $S \in S_n^+ : \exists T \in \mathcal{T}_n^{\geq} \mid S = {}^tTT$.

Preuve supposant l'existence de la racine carrée et la connaissance de la décomposition polaire :

Soit $A \in S_n^{++}$. Elle a une racine carrée. Soit $M = \sqrt{A} \in S_n^{++}$. Via QR, soit Ω, T telles que $M = \Omega T$.

$M = {}^tM$. $A = M^2 = {}^tMM = {}^t(\Omega T)(\Omega T) = {}^tT({}^t\Omega\Omega)T = {}^tTT$.

Déterminant de Gram : Soit $(E, \langle \mid \rangle)$ préhilbertien et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. $F_0 = \{0\}$; $F_k = \text{vect}(x_1, \dots, x_k)$.

On note $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) = [\langle x_i \mid x_j \rangle]_{(i,j) \in [1,n]^2}$ et $G = \det \mathcal{G}(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1 \mid x_1 \rangle & \dots & \langle x_1 \mid x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n \mid x_1 \rangle & \dots & \langle x_n \mid x_n \rangle \end{vmatrix}$.

$$G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=0}^{n-1} d^2(x_{k+1}, F_k)$$

Preuve : en admettant que (x_1, \dots, x_n) libre $\iff G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Soit p le projecteur orthogonal sur $\text{vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$

La dernière colonne du déterminant de Gram s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \langle x_1 \mid x_n \rangle \\ \vdots \\ \langle x_{n-1} \mid x_n \rangle \\ \|x_n\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x_1 \mid x_n \rangle \\ \vdots \\ \langle x_{n-1} \mid x_n \rangle \\ \|p(x_n)\|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \|x_n - p(x_n)\|^2 \end{pmatrix}$$

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne :

$$G(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1 \mid x_1 \rangle & \dots & \langle x_1 \mid x_{n-1} \rangle & \langle x_1 \mid x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_{n-1} \mid x_1 \rangle & \dots & \langle x_{n-1} \mid x_{n-1} \rangle & \langle x_{n-1} \mid x_n \rangle \\ \langle x_n \mid x_1 \rangle & \dots & \langle x_n \mid x_{n-1} \rangle & \|p(x_n)\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle x_1 \mid x_1 \rangle & \dots & \langle x_1 \mid x_{n-1} \rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_{n-1} \mid x_1 \rangle & \dots & \langle x_{n-1} \mid x_{n-1} \rangle & 0 \\ \langle x_n \mid x_1 \rangle & \dots & \langle x_n \mid x_{n-1} \rangle & \|x_n - p(x_n)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \langle x_1 \mid x_1 \rangle & \dots & \langle x_1 \mid x_{n-1} \rangle & \langle x_1 \mid x_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_{n-1} \mid x_1 \rangle & \dots & \langle x_{n-1} \mid x_{n-1} \rangle & \langle x_{n-1} \mid x_n \rangle \\ \langle x_n \mid x_1 \rangle & \dots & \langle x_n \mid x_{n-1} \rangle & \|p(x_n)\|^2 \end{vmatrix} = G(x_1, \dots, x_{n-1}, p(x_n)).$$

Mais comme $p(x_n) \in \text{vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$, le déterminant de Gram $G(x_1, \dots, x_{n-1}, p(x_n))$ est nul.

En développant par rapport à la dernière colonne et sachant que $\|x_n - p(x_n)\|^2 = d(x_n, F_{n-1})^2$, on obtient :

$$\frac{G(x_1, \dots, x_n)}{G(x_1, \dots, x_{n-1})} = d(x_n, F_{n-1})^2$$

Inégalité de Hadamard : soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$$|\det A| \leq \prod_{k=1}^n \|C_k(A)\|$$

Proposition : on sait que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f^* = {}^t \text{Mat}_{\mathcal{B}} f$ (dans une BON). Il en découle :

- $(f + \lambda g)^* = f^* + \lambda g^*$
- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- $\text{Id}^* = \text{Id}$
- $\text{rg } f = \text{rg } f^*$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \dim E_\lambda(f) = \dim E_\lambda(f^*)$
- $\chi_{f^*} = \chi_f, \Pi_f = \Pi_{f^*}$
- $\text{tr } f = \text{tr } f^*$

Proposition : $\forall f \in L(E) : |||f||| = |||f^*|||$ (pour la norme subordonnée à la norme euclidienne associée)

Preuve : Montrons que : $|||f||| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle f(x)|y \rangle$
 $|\langle f(x)|y \rangle| \leq \|f(x)\| \|y\| = \|f(x)\|$ donne $\sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle f(x)|y \rangle \leq \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = |||f|||$.
De plus, en dimension finie, la boule unité est compacte donc $\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \max_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. Soit x_0 de norme 1 tel que $\|f(x_0)\| = |||f|||$.
Si $f(x_0) = 0$, alors f est nulle et c'est trivial.
Sinon, pour $y = \frac{f(x_0)}{\|f(x_0)\|}$, $\langle f(x_0)|y \rangle = \|f(x_0)\| = |||f|||$ donc $\sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle f(x)|y \rangle \geq |||f|||$.
On conclut : $|||f||| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle f(x)|y \rangle = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \langle f^*(y)|x \rangle = |||f^*|||$.

Proposition : soit $f \in L(E)$. $\ker f^* = (\text{Im } f)^\perp$ et $\text{Im } f^* = (\ker f)^\perp$

Preuve : si $x \in \ker f^*$ et $y \in \text{Im } f^*$. $\exists z \mid f^*(z) = y$.
 $\langle x|y \rangle = \langle x|f^*(z) \rangle = \langle f(x)|z \rangle = \langle 0|z \rangle = 0$.
Par conséquent, $\ker f \perp \text{Im } f^*$ (ce qui signifie $\ker f \subset (\text{Im } f^*)^\perp$). Puisque $\text{rg } f = \text{rg } f^*$:
 $\dim(\text{Im } f^*)^\perp = \text{codim Im } f^* = \text{codim Im } f = \dim \ker f$ donc $\ker f = (\text{Im } f^*)^\perp$.
Pour la seconde, on passe à l'adjoint et c'est la même propriété.

Proposition : soit F stable par $f \in L(E)$. Alors F^\perp stable par f^* .

En passant à l'adjoint, on a la réciproque.

Proposition : soit $f \in L(E)$.

$$|||f||| \leq 1 \implies \ker(f - \text{Id}) = \text{Im}(f - \text{Id})^\perp$$

Preuve : par égalité des dimensions, il suffit de montrer que $\ker(f - \text{Id}) \perp \text{Im}(f - \text{Id})$ soit $\ker(f - \text{Id}) \subset \text{Im}(f - \text{Id})^\perp$.
Soit $x \in E_1(f) = \ker(f - \text{Id})$.
 $\|f^*(x) - x\|^2 = \|f^*\|^2 - 2\langle f^*(x)|x \rangle + \|x\|^2$
 $\|f^*(x) - x\|^2 \leq |||f^*|||^2 \|x\|^2 - 2\langle f^*(x)|x \rangle + \|x\|^2$
 $\|f^*(x) - x\|^2 \leq 2(\|x\|^2 - \langle f(x)|x \rangle) = 0$ car $f(x) = x$.
Donc $f^*(x) = x$ et donc $x \in \ker(f^* - \text{Id}) = \ker(f - \text{Id})^* = \text{Im}(f - \text{Id})^\perp$.