

Mémoire de fin d'études de Master 2

Université d'Evry Val d'Essonne

Présenté par Oscar JARRIN

Modélisation de l'opérateur Laplacien Fractionnaire à travers d'un problème d'extension au demi-espace

Encadré par Diego CHAMORRO

Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry

IBGBI, Université d'Evry, 23 boulevard de France, 91037 Evry Cedex

07 Octobre 2014

Table des matières

1	Laplacien Fractionnaire.	3
1.1	Définition par Fourier.	3
1.2	Convolution.	3
1.3	Valeurs $0 < s < 1$	6
1.4	Opérateurs d'Intégrale Singulière.	8
2	Relation entre le Laplacien Fractionnaire et un problème d'extension au demi-espace	12
2.1	Le cadre $a = 0$	12
2.2	Le cadre $-1 < a < 1$. Noyaux de type Poisson.	14
2.2.1	Noyau de type Poisson et solutions classiques	14
2.2.2	Démonstration du Théorème 2.1	17
2.3	Le cadre $-1 < a < 1$. Transformation de Fourier et EDO	19
3	Applications aux fonctions harmoniques fractionnaires	25
3.1	Extensions par réflexion à l'espace tout entier	25
3.2	L'inégalité de Harnack	28
3.3	Formule de monotonie d'Almgren	33
4	Extension à d'autres opérateurs de dérivation fractionnaire.	39
4.1	Relation entre un opérateur différentiel de deuxième ordre et le problème d'extension au demi-espace	39
4.2	L'opérateur Laplacien Fractionnaire sur les variétés non compactes	53
5	Annexe	57
5.1	Des résultats utilisés pour étudier l'opérateur Laplacien Fractionnaire	57
5.2	La méthode de Perron	60

1 Laplacien Fractionnaire.

1.1 Définition par Fourier.

Nous commençons l'étude de l'Opérateur Laplacien Fractionnaire avec sa définition par Fourier pour les fonctions de la Classe de Schwartz.

Définition 1.1 (Définition par Fourier). *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < s < 1$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, l'opérateur $(-\Delta)^s$ est défini par sa transformée de Fourier*

$$\widehat{(-\Delta)^s f}(\xi) = (4\pi^2)^s |\xi|^{2s} \widehat{f}(\xi) \quad (1)$$

De la définition (1) nous obtenons que

$$|\widehat{(-\Delta)^s f}(\xi)| = c |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|.$$

Si $|\xi| < M$, avec $M > 0$, nous avons que $|\widehat{(-\Delta)^s f}(\xi)| \leq C |\widehat{f}(\xi)|$, donc, $\widehat{(-\Delta)^s f}$ est contrôlée par \widehat{f} sur toute boule centrée dans l'origine. Quand $|\xi| > M$, la fonction $\xi \mapsto |\xi|^{2s}$ croisse vers l'infinie mais comme $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, elle vérifiée que $|\widehat{f}(\xi)| \leq C_N \frac{1}{(1+|\xi|)^N}$, avec $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2s$, tout de suite nous avons que $|\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)| \leq C_N \frac{1}{(1+|\xi|)^{N-2s}}$, donc, nous pouvons en déduire que $|\xi|^{2s} \widehat{f}(\xi)$ décroisse rapidement vers l'infinie si nous prenons N suffisamment grand. En particulaire, nous avons que $\widehat{(-\Delta)^s f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, pour $1 \leq p \leq +\infty$.

Quand nous prenons une fonction f , nous voudrions que sa transformée de Fourier ait certains propriétés de décroissance à l'infinie, ce qui permet d'avoir plus des propriétés sur la fonction $\widehat{(-\Delta)^s f}$, comme nous l'avons vu dans la définition d'avant où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Voyons d'autres exemples.

- Si nous prenons $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ avec $m \geq 2$, nous savons que $(1 + |\cdot|^2)^{\frac{m}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pour $|\xi| > 1$ nous avons que $C |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)| \leq (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\widehat{f}(\xi)|$. Pour $|\xi| < 1$, nous avons vu que $\widehat{(-\Delta)^s f}(\xi) \leq C |\widehat{f}(\xi)|$. Donc nous pouvons en conclure que $\widehat{(-\Delta)^s f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Si maintenant nous prenons $f \in \dot{H}^m(\mathbb{R}^n)$, également avec $m \geq 2$ nous connaissons que $|\cdot|^m \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, par le même raisonnement nous pouvons en déduire que $\widehat{(-\Delta)^s f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
- Par contre, si nous prenons $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (ou $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$), en général nous ne pouvons rien dire sur des propriétés de $\widehat{(-\Delta)^s f}$.

La condition de décroissance à l'infinie de \widehat{f} implique une certaine régularité de la fonction f , comme nous l'avons vu dans les exemples d'avant.

Notons que, dans la définition (1) nous pouvons prendre un cadre beaucoup plus général dans l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Par exemple, pour la mesure δ_0 nous avons dans la définition (1) que $\widehat{(-\Delta)^s \delta_0}(\xi) = C |\xi|^{2s}$. Mais évidemment, on perd des propriétés de décroissance à l'infinie.

1.2 Convolution.

Nous avons défini l'Opérateur Laplacien Fractionnaire par sa transformée de Fourier, maintenant, nous allons calculer sa transformée de Fourier inverse. En regardant l'expression (1) nous trouvons le produit usuel des fonctions \widehat{f} et $|\cdot|^{2s}$. Par les propriétés de la transformée de Fourier nous connaissons que la transformée de Fourier inverse de (1) s'écrit comme

$$C (|\cdot|^{2s})^\vee * f.$$

Alors, nous cherchons la transformée de Fourier inverse de $|\cdot|^{2s}$ et la constante C .

Nous commençons pour étudier la fonction $\Phi_s(x) := |x|^z$ avec $z \in \mathbb{C}$ du point de vue des distributions. D'abord, Nous allons considérer le cas $Re(z) > -n$ où grâce à l'inégalité $|x|^z \leq |x|^{Re(z)}$ $\Phi_z \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.2 (Distributions Homogènes). Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > -n$. Nous définissons la distribution Φ_z comme :

$$\langle \Phi_z, f \rangle = c(n, z) \int_{\mathbb{R}^n} |x|^z f(x) dx, \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (2)$$

$$\text{Avec } c(n, z) = \frac{\pi^{\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right)}.$$

Notons que quand $z = 2s$ c'est évident que $2s > -n$, donc, $|\cdot|^{2s}$ est bien une distribution tempérée. Dans les annexes (référence) nous montrerons que nous pouvons étendre cette définition à \mathbb{C} , en obtenant que la fonction de \mathbb{C} dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$z \longmapsto \Phi_z$$

est une fonction entier, c'est à dire, analytique sur le plan complexe.

Maintenant, nous allons calculer la transformée de Fourier inverse de Φ_z au sens des distributions. Plus généralement, nous montrerons le théorème suivant.

Théorème 1.1 (Transformée de Fourier des Distributions Homogènes). Pour $z \in \mathbb{C}$, nous avons que

$$\widehat{\Phi_z} = \Phi_{-(n+z)}. \quad (3)$$

Au sens des distributions.

Preuve. Par le changement à coordonnées polaires $\xi = \rho \sigma$, avec $\rho \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in S^{n-1}$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{f}(\xi) d\xi &= \int_0^\infty \rho^{z+n-1} \int_{S^{n-1}} \widehat{f}(\rho\sigma) d\sigma d\rho \\ &= \int_0^\infty \rho^{z+n-1} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \rho \sigma \cdot x} \widehat{f}(x) dx d\sigma d\rho \end{aligned}$$

maintenant, par le changement de à coordonnées polaires dans x , $x = r\theta$, et après par Fubini nous obtenons

$$\int_0^\infty \rho^{z+n-1} r^{n-1} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\theta) \left(\int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i \rho \sigma \cdot r\theta} d\sigma \right) d\theta dr d\rho.$$

Notons $\varphi(t) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i t(\sigma \cdot \theta)} d\sigma = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i t\sigma_1} d\sigma$, donc, nous trouvons que $\int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i \rho \sigma \cdot r\theta} d\sigma = \varphi(\rho r)$ est indépendant de θ , alors, la dernière intégrale s'écrit

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \rho^{z+n-1} \varphi(\rho r) d\rho \right) \left(\int_{S^{n-1}} f(r\theta) d\theta r^{n-1} \right) dr &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty r^{-(z+n)+1} (r\rho)^{z+n-1} \varphi(\rho r) d\rho \right) \left(\int_{S^{n-1}} f(r\theta) d\theta r^{n-1} \right) dr \\ &= \int_0^\infty r^{-(z+n)} \left(\int_0^\infty (r\rho)^{z+n-1} \varphi(\rho r) d(r\rho) \right) \left(\int_{S^{n-1}} f(r\theta) d\theta r^{n-1} \right) dr \\ &= C(n, z) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{|x|^{z+n}} dx \end{aligned}$$

avec

$$C(n, z) = \int_0^\infty t^{z+n-1} \varphi(t) dt. \quad (4)$$

Maintenant, il faut étudier la constante $C(n, z)$. Nous allons chercher premièrement les bonnes valeurs de z tels que l'intégrale (4) soit convergente. Pour étudier cette intégrale nous écrivons $\int_0^M \varphi(t) t^{z+n+1} dt + \int_M^\infty \varphi(t) t^{z+n+1} dt$ avec un $M > 0$.

- Quand $n = 1$. Dans ce cas, nous avons que $\varphi(t) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi it\sigma_1} d\sigma = e^{-2\pi it} + e^{2\pi it} = 2 \cos(2\pi t)$, donc,

$$C(1, z) = \int_0^{+\infty} 2 \cos(2\pi t) t^z dt = \int_0^M 2 \cos(2\pi t) t^z dt + \int_M^\infty 2 \cos(2\pi t) t^z dt.$$

Nous voyons que, la première intégrale converge si $-1 < \operatorname{Re}(z)$. Par contre, la deuxième intégrale converge si $\operatorname{Re}(z) < 0$. Donc pour $-1 < \operatorname{Re}(z) < 0$ nous pouvons assurer la convergence.

- Quand $n \geq 2$. Comme $|\varphi(t)| \leq w_{n-1}$ pour tout $t \geq 0$, nous avons que, $\int_0^1 \varphi(t) t^{z+n-1} dt$ converge si $\operatorname{Re}(z) > -n$. Si $t > 1$, grâce à la formule suivante, pour f une fonction définie sur la sphère de rayon R , RS^{n-1} ,

$$\int_{RS^{n-1}} f(x) d\theta = \int_{-R}^R \int_{\sqrt{R^2-s^2}S^{n-2}} f(s\theta) \frac{R}{\sqrt{R^2-s^2}} d\theta ds$$

nous avons que, en prenant $R = 1$ et $f(x) = e^{-2\pi tx_1}$

$$\varphi(t) = \int_{-1}^1 e^{2\pi its} w_{n-2} \frac{(\sqrt{1-s^2})^{n-2}}{\sqrt{1-s^2}} ds = c J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi t),$$

où, $J_{\frac{n-2}{2}}$ est la fonction de Bessel (voir annexe). Par la propriété (voir annexe) nous avons que $|\varphi(t)| \leq ct^{-\frac{1}{2}}$, donc, nous obtenons que

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) t^{z+n-1} dt \leq \int_1^{+\infty} t^{z+n-1-\frac{1}{2}} dt,$$

cette dernière intégrale converge si $\operatorname{Re}(z) < -n + \frac{1}{2}$. Finalement nous avons que si $-n < \operatorname{Re}(z) < -n + \frac{1}{2}$, (4) converge.

Pour trouver une expression plus agréable de $C(n, z)$, nous prenons $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, f est telle que $f = \widehat{f}$, donc dans (3) nous avons que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z e^{-\pi|\xi|^2} d\xi = C(n, z) \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-(z+n)} e^{-\pi|x|^2} dx,$$

dans cordonnés polaires, nous écrivons

$$w_{n-1} \int_0^{+\infty} r^{z+n-1} e^{-\pi r^2} dr = w_{n-1} C(n, z) \int_0^\infty r^{-z-1} e^{-\pi r^2} dr.$$

Nous connaissons que $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, alors en prenant le changement de variable $\pi r^2 = t$ nous avons que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{z+n}{2}-1}}{\pi^{\frac{z+n}{2}-1}} e^{-t} dt = C(n, z) \int_0^\infty \frac{t^{\frac{z}{2}-1}}{\pi^{-\frac{z}{2}-1}} e^{-t} dt.$$

D'où nous obtenons

$$C(n, z) = \frac{\Gamma\left(\frac{z+n}{2}\right) \pi^{-\frac{z+n}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{z}{2}\right) \pi^{\frac{z}{2}}} = \frac{c(n, -(n+z))}{c(n, z)}. \quad (5)$$

Nous avons montré que $\widehat{\Phi}_z = \Phi_{-(z+n)}$, au sens des distributions pour

$$-1 < \operatorname{Re}(z) < 0 \quad \text{quand } n = 1 \quad \text{et pour } -n < \operatorname{Re}(z) - n + \frac{1}{2} \quad \text{quand } n \geq 2 \quad (6)$$

Las conditions dans (6) sont des conditions suffisantes pour que $C(n, z) < +\infty$. Mais grâce à la fonction $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$ nous avons vu que $C(n, z)$ s'écrit comme (5). Donc, nous espérons étendre (3) à d'autres valeurs de z . En effet, Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fixée nous considérons la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{R} ,

$$T_f(z) = \left\langle \widehat{\Phi}_z - \Phi_{-(n+z)}, f \right\rangle.$$

Cette est une fonction entière et bornée (vérifier), par le Théorème de Liouville nous avons que T_f est une constante, après par des conditions (6) nous avons que $T_f = 0$ dans cette région, alors nécessairement $T_f = 0$ sur tout le plan complexe. ■

Si dans le Théorème (1.1) nous prenons $-(n+z) = 2s$, alors $z = -(n+2s)$. Donc au sens des distributions nous avons que

$$(|\cdot|^{2s})^\vee = \frac{C}{|\cdot|^{n+2s}}.$$

De cette façon nous déduisons une deuxième définition de l'Opérateur Laplacien Fractionnaire.

Définition 1.3 (Définition par Convolution). *Soit $0 < s < 1$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ nous définissons*

$$(-\Delta)^s f(x) = C_2(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy \quad (7)$$

quand cette intégrale converge. Avec

$$C_2(n, s) = \frac{4^s}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(s + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-s)} \quad (8)$$

Étudions la convergence de (7). En écrivant $\int_{|x-y| < M} \frac{f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy + \int_{|x-y| > M} \frac{f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy$, nous voyons que :

Quand $|x-y| > M$, comme $\int_{|x-y| > M} \frac{1}{|x-y|^{n+2s}} dy$ converge, nous pouvons admettre même certaine explosion de la fonction f à l'infini. Si f vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{n+2s}} dx < +\infty. \quad (9)$$

En prenant $M > 1$, nous voyons que $|y| > M$ implique que $2|y| > 1 + |y|$, donc

$$\int_{|x-y| > M} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n+2s}} dx = \int_{|y| > M} \frac{|f(x-y)|}{|y|^{n+2s}} dy \leq \int_{|y| > M} \frac{|f(x-y)|}{(1+|y|)^{n+2s}} dy \quad (10)$$

$$\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{(1+|y|)^{n+2s}} dy \quad (11)$$

Nous voyons de cette façon que le cas critique se trouve dans l'origine, en revanche outre l'origine nous pouvons permettre certaine explosion exprimée dans (9)

1.3 Valeurs $0 < s < 1$.

Dans la définition de l'opérateur Laplacien Fractionnaire par Fourier 1 nous avons pris $0 < s < 1$. Évidemment cette définition continue d'avoir senti quand $s \in \mathbb{R}$. Dans cette sous-section nous étudierons les cadres quand $s \leq 0$ et $s \geq 1$.

(i) Le cadre $s < 0$. Potentials de Riesz.

Pour comprendre mieux nous allons écrire $-s$ avec $s > 0$. L'opérateur $(-\Delta)^{-s}$ se nomme Potentiel de Riesz. Nous commencerons par sa définition dans Fourier.

Définition 1.4 (Potentials de Riesz). *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^s)$ et $s > 0$.*

$$\widehat{(-\Delta)^{-s} f(\xi)} = (4\pi^2)^{-s} |\xi|^{-2s} \widehat{f}(\xi). \quad (12)$$

Par les définitions (1) et (12) nous voyons que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(-\Delta)^{-s} \widehat{(-\Delta)^s f(\xi)} = (-\Delta)^s \widehat{(-\Delta)^{-s} f(\xi)} = \widehat{f(\xi)}.$$

C'est à dire, les potentiels de Riesz sont les opérateurs inverses du laplacien fractionnaire.

Comme d'avance, nous étudierons (12) selon la "taille" de $|\xi|$.

- $|\xi| < M$. Dans ce cas nous avons la singularité de la fonction $\frac{1}{|\xi|^{2s}}$ dans l'origine, alors la fonction $\widehat{f}(\xi)$ doit convenablement s'approcher à zero. Par exemple, si pour $|\xi| < M$ et $\varepsilon > 0$, $\widehat{f}(\xi) \approx |\xi|^{2s+\varepsilon}$ alors $\widehat{(-\Delta)^{-s} f(0)}$ est défini et l'égal à zero. Par contre, si $f(\xi) \approx |\xi|^{2s-\varepsilon}$ la fonction $\frac{\widehat{f}(\xi)}{|\xi|^{2s}}$ est singulière dans l'origine.

En particulier notons que $\widehat{f}(0) = 0$ implique que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 0$, donc... «à consulter».

- $|\xi| > M$. Comme la fonction $\frac{1}{|\xi|^{2s}}$ est décroisse à l'infinie nous pouvons permettre certain explosion de la fonction \widehat{f} à l'infinie. Nous avons par exemple la relation suivante avec espaces de régularité négative. Si f est telle que $\widehat{(-\Delta)^{-2} f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pour tout $m > 2s$ nous avons que $f \in \dot{H}^{-m}(\mathbb{R}^n)$. De plus grâce à la majoration

$$(1 + |\xi|^2)^{-\frac{m}{2}} \leq (1 + |\xi|^2)^{-s} \leq |\xi|^{-2s}$$

nous obtenons aussi que $f \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$.

Étudions maintenant les potentiels de Riesz comme de produit de convolution. Comme d'avance pour trouver la transformée de Fourier inverse au sens des distributions de $\frac{1}{|\cdot|^{2s}}$ nous prenons $z = -n + 2s$ dans (1.1), alors nous avons la définition

Définition 1.5 (Potentials de Riesz comme convolution). Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

$$(-\Delta)^{-s} f(x) = C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2s}} dy \quad (13)$$

avec

$$C_{n,s} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - s\right)}{4^{2s} \pi^{2s + \frac{n}{2}} \Gamma(s)} \quad (14)$$

Notons que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|y|^{n-2s}} dy = \int_0^\infty \rho^{2s-1} d\rho = \int_0^M \rho^{2s-1} d\rho + \int_M^\infty \rho^{2s-1} d\rho := I_1 + I_2$$

I_1 est toujours convergente, donc si f es bornée nous avons que $\int_{|y|<M} \frac{|f(x-y)|}{|y|^{n-2s}} dy < +\infty$. En revanche I_2 diverge,

alors pour que l'intégrale 13 ait senti la fonction f doit suffisamment décroître rapide à l'infini.

Quand $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, grâce à la majoration $|f(x)| \leq \frac{C_N}{(1+|x|)^N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ nous voyons que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{|y|^{n+2s}} dy \leq C_N \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x-y|)^N |y|^{n-2s}} dy < +\infty,$$

si $N > 2s + 1$. «extension au cas $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ Th. 2 lection 3 Notes du cours université Central 2013»

(ii) Le cadre $s > 1$.

1.4 Opérateurs d'Intégrale Singulière.

Maintenant, nous passons à la troisième définition de l'Opérateur Laplacien Fractionnaire du point vue des opérateurs d'intégrale singulière.

Pour une meilleure compréhension du concept d'opérateur 'intégrale singulière nous commençons par donner un exemple, la Transformée de Hilbert.

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $h(x) = \frac{1}{x}$, la transformée de Hilbert de f est à grosso modo la convolution de f et h . Alors pour $x \in \mathbb{R}$ nous voulons étudier quand la nouvelle fonction $h(f)(x) := f * h(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y} dy$ a senti, c'est à dire, quand l'intégral converge. Commençons avec $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Comme d'avance, nous divisons l'intégrale

$$\int_{|y|<M} \frac{f(x-y)}{y} dy + \int_{|y|>M} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

Dans la deuxième nous avons que

$$\int_{|y|>M} \frac{|f(x-y)|}{|y|} dy \leq \frac{1}{M} \int_{|y|>M} |f(x-y)| dy < +\infty,$$

parce que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

En revanche la première intégrale non converge toujours bien que la fonction f soit dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. «donner un exemple» .Pour régler ce problème d'intégration dans l'origine (d'où le nom d'opérateurs d'intégrale singulière) nous considérons pour $0 < \varepsilon < M$

$$\int_{\varepsilon < |y| < M} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

Cette intégrale converge puisque nous avons "enlevé" la singularité dans l'origine . De plus, comme $\int_{\varepsilon < |y| < M} \frac{1}{y} dy = 0$ et par le théorème des accroissements $|f(x-y) - f(x)| \leq \|f'\|_{L^\infty} |y|$, nous avons que

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon < |y| < M} \frac{f(x-y)}{y} dy &= \int_{\varepsilon < |y| < M} \frac{f(x-y) - f(x)}{y} dy \leq \int_{\varepsilon < |y| < M} \frac{\|f'\|_{L^\infty} |y|}{|y|} dy \\ &= 2(M - \varepsilon) \|f'\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

D'où nous voyons que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < M} \frac{f(x-y)}{y} dy$$

converge. Cette limite s'appelle la valeur principale de la fonction $\frac{1}{y}$ et elle est notée par $vp \int_{|y|<M} \frac{f(x-y)}{y} dy$.

Finalement, nous définissons la Transformée de Hilbert de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ comme

$$H(f)(x) = vp \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

Remarque 1.1. Pour donner un sens à la transformée de Hilbert, nous avons étudié deux propriétés de la fonction f .

- (i) *Régularité dans l'origine.* Quand "y" s'approche de 0, $f(x-y)$ doit convenablement s'approcher de $f(x)$ pour équilibrer la singularité de $\frac{1}{y}$ dans 0. Dans le cas quand $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nous avons vu que c'était suffisant que $|f(x-y) - f(x)| \leq \|f'\|_{L^\infty} |y|$.
- (ii) *Décroissance à l'infinie.* Quand "y" est grand, la fonction f doit convenablement décroître à l'infini pour assurer que l'intégrale converge puisque la fonction $\frac{1}{y}$ n'est pas intégrable sur $|y| > M$.

Motivés à la remarque (i) nous avons la troisième définition de l'Opérateur Laplacien fractionnaire.

Définition 1.6 (Definition comme opérateur d'intégrale singulière). Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $0 < s < 1$ et $x \in \mathbb{R}^n$, nous définissons

$$(-\Delta)^s f(x) = C_{n,s} \text{vp} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \quad (15)$$

Avec

$$C_{n,s} = C_2(n, s) = \frac{4^s \Gamma\left(s + \frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(-s)} \quad (16)$$

Par le même argument étudié dans la définition du laplacien fractionnaire comme produit de convolution nous savons que, quand $|x - y| > M$ l'intégrale $\int_{|x-y|>M} \frac{1}{|x - y|^{n+2s}} dy$ converge, alors nous pouvons permettre certaine explosion de la fonction f dans l'infini, où la condition (9) est suffisante pour que l'intégrale $\int_{|x-y|>M} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy$ converge.

En effet il suffit remarquer que

$$\int_{|x-y|>M} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{n+2s}} dy \leq |f(x)| \int_{|x-y|>M} \frac{1}{|x - y|^{n+2s}} dy + \int_{|f(y)|} |x - y|^{n+2s} dy,$$

où la deuxième intégrale est majorée par (10).

En revanche, quand $|x - y| < M$, $f(x)$ doit convenablement s'approcher de $f(y)$ pour équilibrer la singularité de la fonction $\frac{1}{|x - y|^{n+2s}}$ dans x . Par exemple, prenons f telle que $f(y) = |y|^2$ pour $|y| < 1$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{(1 + |y|)^{n+2s}} dy < +\infty$ par (15) nous avons que

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s f(0) &= C_{n,s} \text{vp} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(0) - f(y)}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= C_{n,s} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{1 > |y| > \varepsilon} \frac{f(0) - f(y)}{|y|^{n+2s}} dy + C_{n,s} \int_{|y| > 1} \frac{f(0) - f(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy \\ &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{1,\varepsilon} + I_2 \end{aligned}$$

Comme f vérifie la condition (9) nous savons que I_2 converge. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons que

$$I_{1,\varepsilon} = \int_{1 > |y| > \varepsilon} \frac{f(0) - f(y)}{|y|^{n+2s}} dy \leq \int_{1 > |y| > \varepsilon} \frac{|y|^2}{|y|^{n+2s}} dy = \int_{\varepsilon}^1 \rho^{1-2s} d\rho = \frac{1^{2-2s} - \varepsilon^{2-2s}}{1-2s} \leq \frac{1}{1-2s}$$

Alors, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{1,\varepsilon}$ converge et par conséquent $(-\Delta)^s f(0) < +\infty$.

Remarque 1.2. Quand $0 < s < \frac{1}{2}$ dans la définition (15) on n'a pas besoin de la valeur principale. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'intégrale $\int_{|x-y|>1} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy$ converge. Il suffit d'étudier l'intégral $\int_{|x-y|<1} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy$. Par le Théorème des accroissements finis nous avons que

$$\int_{|x-\xi|<1} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{n+2s}} d \leq \|\nabla f\|_{L^\infty} \int_{|x-y|<1} \frac{|x - y|}{|x - y|^{n+2s}} dy,$$

comme $0 < s < \frac{1}{2}$ alors $1 - 2s > 0$, donc,

$$\int_{|x-\xi|<1} \frac{|x-\xi|}{|x-\xi|^{n+2s}} dx = \int_0^1 \rho^{-2s} d\rho < +\infty.$$

Maintenant nous allons montrer l'équivalence entre les définitions (7) et (15). Pour cela nous verrons premièrement que le Laplacien Fractionnaire peut être écrit comme un potentiel de Riesz. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ par la définition (1) nous avons que

$$\begin{aligned} \widehat{(-\Delta)^s f}(\xi) &= (4\pi^2)^s |\xi|^{2s} \widehat{f}(\xi) \\ &= (4\pi^2)^{s-1} |\xi|^{2(s-1)} (4\pi^2) |\xi|^2 \widehat{f}(\xi) . \\ &= \widehat{(-\Delta)^{s-1} (-\Delta f)}(\xi) \end{aligned}$$

Après par les définitions (7) et (13) nous obtenons que

$$(-\Delta)^s f(x) = C_2(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy = C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-\Delta f(y)}{|x-y|^{n-2(1-s)}} dy \quad (17)$$

Avec

$$C_{n,s} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1 - s\right)}{(4\pi)^{2(1-s)} \Gamma(1-s)}.$$

Maintenant nous allons montrer le lemme suivante «pour le cas n=2»

Lemme 1.1. Soient $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{-\Delta f(y)}{|x-y|^{2s}} dy$ converge. Nous avons que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{-\Delta f(y)}{|x-y|^{2s}} dy = C \text{ vp } \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{2+2s}} dy$$

Preuve. Par le Théorème de Convergence Dominée nous écrivons

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{-\Delta f(y)}{|x-y|^{2s}} dy = C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Delta_y(f(x) - f(y))}{|x-y|^{2s}} dy$$

Par tout $\varepsilon > 0$, par la Formule de Green sur $B(x, \varepsilon)$, nous avons que

$$\begin{aligned} \int_{|x-y|<\varepsilon} \frac{\Delta_y(f(x) - f(y))}{|x-y|^{2s}} dy &= \int_{|x-y|<\varepsilon} (f(x) - f(y)) \Delta_y \left(\frac{1}{|x-y|^{2s}} \right) dy \\ &+ \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^{2s}} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} f(x) - f(y) d\sigma(y) , \\ &- \int_{|x-y|=\varepsilon} (f(x) - f(y)) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \frac{1}{|x-y|^{2s}} d\sigma(y) \end{aligned}$$

Par intégration par parties nous avons que

$$\begin{aligned} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Delta_y(f(x) - f(y))}{|x-y|^{2s}} dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\Delta_y(f(x) - f(y))}{|x-y|^{2s}} dy - \int_{|x-y|<\varepsilon} \frac{\Delta_y(f(x) - f(y))}{|x-y|^{2s}} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) - f(y) \Delta_y \left(\frac{1}{|x-y|^{2s}} \right) dy - \int_{|x-y|<\varepsilon} \frac{\Delta_y(f(x) - f(y))}{|x-y|^{2s}} dy \end{aligned}$$

d'où nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Delta_y(f(x) - f(y))}{|x-y|^{2s}} dy &= \int_{|x-y|>\varepsilon} (f(x) - f(y)) \Delta_y \left(\frac{1}{|x-y|^{2s}} \right) dy \\
&- \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^{2s}} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} f(x) - f(y) d\sigma(y) \\
&+ \int_{|x-y|=\varepsilon} (f(x) - f(y)) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \frac{1}{|x-y|^{2s}} d\sigma(y) \\
&:= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

Pour I_1 , nous avons que $\Delta_y \left(\frac{1}{|x-y|^{2s}} \right) = \frac{(2s)(1+2s)}{|x-y|^{2+2s}}$, d'où

$$I_1 = \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{2+2s}} dy.$$

Pour I_2 , nous trouvons que

$$\frac{1}{\varepsilon^{2s}} \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \vec{n}} f(x) - f(y) d\sigma(y) = \frac{1}{\varepsilon^{2s}} \int_{|x-y|<\varepsilon} \Delta_y(f(x) - f(y)) dy \leq \frac{C}{\varepsilon^{2s}} \text{vol}(B(x, \varepsilon))$$

Donc,

$$I_2 \leq c\varepsilon^{2-2s},$$

comme $0 < s < 1$ alors $2 - 2s > 0$.

De plus, pour I_3 .

«Ici on doit monter que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|=\varepsilon} (f(x) - f(y)) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} \frac{1}{|x-y|^{2s}} d\sigma(y) = 0$$

Finalement si nous prenons la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ nous avons que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{-\Delta f(y)}{|x-y|^{2s}} dy = C \text{vp} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{2+2s}} dy$$

«Il manque monter I_3 et trouver la constante C » ■

«Il manque la relation entre les espaces de Holder et Besov»

2 Relation entre le Laplacien Fractionnaire et un problème d'extension au demi-espace

Après cette introduction dans laquelle on a étudié rapidement quelques définitions équivalentes de l'opérateur $(-\Delta)^s$ pour $0 < s < 1$, nous nous concentrons maintenant dans le coeur de ce mémoire : il s'agit, tout en suivant l'article de Caffarelli et Silvestre [4] de montrer qu'il est possible de relier l'opérateur $(-\Delta)^s$ à un problème d'extension au demi-espace via une équation aux dérivées partielles.

Pour cela et pour plus de commodité nous écrivons la puissance fractionnaire s comme :

$$s = \frac{1-a}{2}, \quad \text{avec} \quad -1 < a < 1.$$

Nous commençons par définir le problème d'extension au demi-espace :

Définition 2.1 (Problème d'extension). *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit le problème d'extension pour φ par :*

$$\partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \quad (18)$$

$$u(0, x) = \varphi(x). \quad (19)$$

Nous voyons bien que pour une donnée initiale φ définie sur l'espace \mathbb{R}^n , le problème d'extension consiste à poser une équation aux dérivées partielles au demi-espace : $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$: on a donc gagné une dimension supplémentaire et c'est dans ce sens que l'on parlera ici d'un *problème d'extension*.

Voici le théorème principal de cette section. Il permet de relier l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}$ avec les propriétés des solutions du problème d'extension défini ci-dessus. Plus précisément on a :

Théorème 2.1 (Relation entre le Laplacien Fractionnaire et le problème d'extension). *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $-1 < a < 1$. Alors :*

(i) *Il existe une fonction $P_a :]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 solution classique de l'équation (18) telle que la fonction*

$$u(t, x) = \varphi * P_a(t, \cdot)(x), \quad \text{pour tout } (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n,$$

est bien une solution classique du problème d'extension (18)-(19) pour φ .

(ii) *De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (20)$$

Comme annoncé, ce résultat nous donne l'action du Laplacien Fractionnaire sur la donnée initiale φ comme une limite particulière de la solution $u(t, x)$ du problème d'extension (18)-(19) et nous verrons qu'il existe plusieurs méthodes pour démontrer cette identité.

Avant de démontrer en toute généralité ce théorème, il est intéressant de traiter le cas $a = 0$ qui correspond à l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$. Ceci sera fait dans la Section 2.1 ci-après ; le cas général quant à lui sera étudié dans la Section 2.2.

2.1 Le cadre $a = 0$

Lorsque $a = 0$, le problème (18)-(19) devient

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \\ u(0, x) = \varphi(x). \end{cases} \quad (21)$$

Le traitement de ce type de problème est totalement classique (voir par exemple toute la théorie développée dans [12]), mais avant de nous y attaquer il est nécessaire d'introduire une notion qui sera de grande utilité par la suite.

Définition 2.2 (Noyau de Poisson). Une fonction $P(x)$ de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^n est un noyau de Poisson si elle vérifie :

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} P(x)dx = 1.$

(ii) La famille $(P_t)_{t>0}$ où $P_t(x) = t^{-n}P(\frac{x}{t})$ avec $t > 0$, est une approximation de l'identité.

(iii) $P(t, x) := P_t(x)$ est une fonction harmonique dans les variables $(t, x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, c'est à dire, pour tout $(t, x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ on a $\Delta_{t,x}P(t, x) = \partial_t^2 P(t, x) + \Delta_x P(t, x) = 0.$

L'exemple de base lorsque $n \geq 2$ est donné par la fonction $P(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ où $c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$, de sorte que $P_t(x) = \frac{c_n t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ est bien un noyau de Poisson au sens de la définition précédente (voir [9], Chapitre 2).

Une fois que nous disposons de ce noyau de Poisson $P_t(x)$ il est facile d'obtenir des solutions classiques du problème (21) : la fonction $u(t, x) = \varphi * P_t(x)$ est harmonique dans les variables $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n.$

Nous avons donc une solution $u(t, x)$ du problème (21) lorsque $a = 0$ et nous cherchons maintenant à relier l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ avec une limite lorsque $t \rightarrow 0^+$ de $\partial_t u(t, x)$. Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 2.2. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et soit $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la solution du problème d'extension (21) donnée par $u(t, x) = \varphi * P_t(x)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = -C \partial_t u(0, x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé. Par la définition de dérivée à droite par rapport au temps t et par la définition de la fonction $u(t, x)$ ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t u(0, x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(t, x) - u(0, x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\varphi * P_t(x) - \varphi(x)) \\ &= c_n \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\varphi(y) - \varphi(x))t}{(t^2 + |x - y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy \quad \text{ici on a utilisé le fait que } \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y)dy = 1 \\ &= c_n \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{(t^2 + |x - y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy = c_n \lim_{t \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{(t^2 + |x - y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy. \end{aligned} \tag{22}$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, on a par le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{(t^2 + |x - y|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy = \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{|x - y|^{n+1}} dy.$$

En changeant les limites dans l'expression (22), lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on obtient

$$\partial_t u(0, x) = -c_n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+1}} dy = -c_n \text{vp} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+1}} dy,$$

d'où, par la définition de l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ comme opérateur d'intégrale singulière on conclut que

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = -C \partial_t u(0, x),$$

avec $C = \frac{C_2(n, \frac{1}{2})}{c_n} > 0.$ ■

Nous voyons, grâce à cette démonstration, qu'il n'est pas très difficile d'obtenir la relation

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \partial_t u(t, x)$$

dans le cadre du problème (21) une fois que l'on dispose des bons outils. Nous allons voir dans la section qui suit comment généraliser ce résultat et sa démonstration au cas $-1 < a < 1.$

2.2 Le cadre $-1 < a < 1$. Noyaux de type Poisson.

Nous nous intéressons maintenant au problème d'extension :

$$\partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \quad (23)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \text{où } -1 < a < 1. \quad (24)$$

Dans cette section nous allons étudier ce problème et nous allons démontrer la relation

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x)$$

énoncée dans le Théorème 2.1 ; pour cela nous suivons essentiellement les mêmes étapes données dans le cas $a = 0$ de la section précédente, à savoir :

- 1) Recherche d'une solution classique à l'aide des noyaux de type Poisson.
- 2) Étude de la limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x)$.

De façon totalement similaire au cas $a = 0$ nous avons la définition suivante :

Définition 2.3 (Noyau de type Poisson). *Soit $-1 < a < 1$. Une fonction $P_a :]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est régulière dans les variables (t, x) , est solution classique du problème (23)-(24) et telle que la famille de fonctions $P_a(t, \cdot)$ est une approximation de l'identité, sera nommée un noyau de type Poisson.*

Grâce à cette notion de noyau de type Poisson on peut alors trouver des solutions classiques du problème (23)-(24) en prenant $\varphi * P_a(t, \cdot)$ où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2.2.1 Noyau de type Poisson et solutions classiques

La recherche d'un noyau de type Poisson pour le problème (23)-(24) n'est pas une tâche simple, mais nous allons expliquer ici comment obtenir ce noyau à partir d'un problème d'extension harmonique connu.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ soit $y \in \mathbb{R}^{1+k}$ et soit $x \in \mathbb{R}^n$. On note $\Delta_{y,x} = \Delta_y + \Delta_x$. On appelle $\tilde{u} : \mathbb{R}^{1+k+n} \rightarrow \mathbb{R}$ une extension harmonique de φ aux dimensions $1+k+n$ si $\tilde{u}(t, x)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \Delta_{y,x} \tilde{u}(y, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^{1+k} \\ \tilde{u}(0, x) = \varphi(x). \end{cases} \quad (25)$$

Il est bien connu que ce problème admet une solution fondamentale (voir [9] Chapitre 2 ou aussi [7] Partie I, Chapitre 2) donnée par la formule

$$Q(y, x) = C_{n,k} \frac{1}{(|y|^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+k}{2}}}, \quad \text{pour } (y, x) \neq 0.$$

Nous allons voir comment obtenir à partir de cette solution fondamentale un noyau de type Poisson adapté à nos besoins.

Supposons que l'extension harmonique $\tilde{u}(y, x)$ associée à φ est symétrique radiale dans la variable $y \in \mathbb{R}^{1+k}$ et faisons le changement de variable suivant $y \mapsto |y| := t$. Ainsi, le Laplacien $\Delta_{y,x}$ appliqué à $\tilde{u}(|y|, x)$ s'écrit :

$$\Delta_{y,x} \tilde{u}(y, x) = \partial_t^2 u(t, x) + \frac{k}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x).$$

On remarquera la similitude de cette équation avec notre problème initial donné dans l'équation (23) : en effet il suffit de remplacer k par $a \in]-1, 1[$ et cette identification nous donne une piste pour déterminer un noyau de type Poisson associé au problème (25). Ainsi, inspirés par cette similitude on pose

$$Q_a(t, x) = C_{n,a} \frac{1}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}}}, \quad (26)$$

avec la constante $C_{n,a} = -(n-1+a) \frac{2\pi^{\frac{n+1+a}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1+a}{2})}$ et nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.1. *Pour tout $-1 < a < 1$ la fonction*

$$Q_a(t, x) = C_{n,a} \frac{1}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}}},$$

est une solution classique de l'équation $\partial_t^2 Q_a(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t Q_a(t, x) + \Delta_x Q_a(t, x) = 0$, sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$.

Preuve. La fonction $Q_a(t, x)$ est régulière lorsque $(t, x) \neq 0$ et on a :

$$\Delta_x Q_a(t, x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 Q_a(t, x) = C_{n,a} \frac{(n-1+a)(n+1+a)|x|^2}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+2}} - C_{n,a} \frac{n(n-1+a)}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+1}},$$

d'autre part,

$$\frac{a}{t} \partial_t Q_a(t, x) = -C_{n,a} \frac{a(n-1+a)}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+1}} \quad \text{et} \quad \partial_t^2 Q_a(t, x) = C_{n,a} \frac{(n-1+a)(n+1+a)t^2}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+2}} - C_{n,a} \frac{(n-1+a)(n+1+a)}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+1}},$$

d'où,

$$\partial_t^2 Q_a(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t Q_a(t, x) + \Delta_x Q_a(t, x) = C_{n,a} (t^2 + |x|^2)^{\frac{(n-1+a)(n+1+a)}{2}} - C_{n,a} \frac{(n-1+a)(n+1+a)}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n-1+a}{2}+1}} = 0. \quad \blacksquare$$

Nous avons trouvé une solution classique de l'équation (23) donnée par la formule (26). Néanmoins la famille de fonctions $(Q_a(t, \cdot))_{t>0}$ n'est pas une approximation de l'identité et c'est pourquoi elle ne définit pas de noyau de type Poisson dans le sens de la Définition 2.3. En effet, si $Q_a(t, \cdot)$ est une approximation de l'identité alors on a pour $M > 0$ que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|x|>M} |Q_a(t, x)| dx = 0$, d'où par le théorème de convergence dominée on obtient $\int_{|x|>M} |Q_a(0, x)| dx = 0$, donc, presque pour tout $|x| > M$ on a $Q_a(0, x) = 0$. D'autre part, par la définition de la fonction $Q_a(t, x)$ on voit que $Q_a(0, x) = C_{n,a} \frac{1}{|x|^{n-1+a}}$ pour tout $|x| > M$ et on obtient une contradiction.

L'idée clef pour trouver le noyau de type Poisson est de considérer l'équation conjuguée de l'équation (23) définie par :

$$\partial_t^2 u(t, x) - \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x). \quad (27)$$

Il existe une relation très importante entre l'équation du problème d'extension (23) et son équation conjuguée (27) qui est annoncée dans le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Si u est une solution classique de l'équation (23), alors la fonction*

$$w(t, x) := t^a \partial_t u(t, x)$$

est une solution classique de l'équation conjuguée (27). Inversement, si w est une solution de l'équation (27), alors la fonction

$$u(t, x) = -t^{-a} \partial_t w(t, x)$$

est une solution classique de l'équation (23).

Preuve. Supposons que $u(t, x)$ est une solution classique de l'équation (23). Donc, en dérivant nous avons :

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 w(t, x) - \frac{a}{t} \partial_t w(t, x) + \Delta_x w(t, x) = \partial_t^2 (t^a \partial_t u)(t, x) - \frac{a}{t} \partial_t (t^a \partial_t u)(t, x) + \Delta_x (t^a \partial_t u)(t, x) \\ &= t^a \left(\partial_t \Delta_x u(t, x) - \frac{a^2}{t^2} \partial_t u(t, x) - \frac{a}{t} \partial_t^2 u(t, x) + \frac{a(a-1)}{t^2} \partial_t u(t, x) + \frac{2a}{t} \partial_t^2 u(t, x) + \partial_t^3 u(t, x) \right) \\ &= t^a \left(\partial_t \Delta_x u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t^2 u(t, x) - \frac{a}{t^2} \partial_t u(t, x) + \partial_t^3 u(t, x) \right) \\ &= t^a \left(\partial_t \left(\partial_t^2 u + \frac{a}{t} \partial_t u \right) (t, x) + \partial_t \Delta_x u(t, x) \right) = t^a \partial_t \left(\partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) \right) = 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $w(t, x)$ est une solution classique de l'équation (27). Alors :

$$\begin{aligned}
& \partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = \partial_t^2 (-t^{-a} \partial_t w)(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t (-t^{-a} \partial_t w)(t, x) + \Delta_x (-t^{-a} \partial_t w)(t, x) \\
& = -t^{-a} \left(\partial_t \Delta_x w(t, x) - \frac{a^2}{t^2} \partial_t w(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t^2 w(t, x) + \frac{a(a+1)}{t^2} \partial_t w(t, x) - \frac{a}{t} \partial_t^2 w(t, x) + \partial_t^3 w(t, x) \right) \\
& = -t^{-a} \left(\partial_t \Delta_x w(t, x) + \frac{a}{t^2} \partial_t w(t, x) - \frac{a}{t} \partial_t^2 w(t, x) + \partial_t^3 w(t, x) \right) \\
& = -t^{-a} \left(\partial_t \left(\partial_t^2 w - \frac{a}{t} \partial_t w \right) (t, x) + \partial_t \Delta_x w(t, x) \right) = -t^{-a} \partial_t \left(\partial_t^2 w(t, x) - \frac{a}{t} \partial_t w(t, x) + \Delta_x w(t, x) \right) = 0.
\end{aligned}$$

■

Maintenant nous avons les outils nécessaires pour trouver le noyau de type Poisson $P_a(t, x)$. Par la Proposition 2.1 on sait que

$$Q_{-a}(t, x) = C_{n, -a} \frac{1}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n-1-a}{2}}}$$

est une solution classique de l'équation (27). De plus, par le Lemme 2.1 on sait que,

$$-t^{-a} \partial_t Q_{-a}(t, x) = -C_{n, -a} (n-1-a) \frac{t^{1-a}}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$$

est une solution classique de l'équation (23). Définissons alors la fonction

$$P_a(t, x) = c_{n, a} \frac{t^{1-a}}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}, \quad \text{pour tout } (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n, \quad (28)$$

avec une constante $c_{n, a}$ qui sera définie après.

Notons que la différence principale entre la fonction $Q_a(t, x)$ et la fonction $P_a(t, x)$ est la puissance de l'expression $(t^2 + |x|^2)$: $\frac{n-1-a}{2}$ dans la première fonction et $\frac{n+1-a}{2}$ dans la deuxième fonction.

On a vu que $P_a(t, x)$ est bien une solution classique de l'équation (23) car la fonction $-t^{-a} \partial_t Q_{-a}(t, x) = -C_{n, -a} (n-1-a) \frac{t^{1-a}}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$ ci-dessus est une solution classique de l'équation (23). Maintenant, on va montrer que $P_a(t, \cdot)$ est une famille d'approximation de l'identité. Tout d'abord remarquons qu'on peut écrire

$$P_a(t, x) = t^{-n} P_a \left(1, \frac{x}{t} \right),$$

c'est à dire, $P_a(t, \cdot)$ est la dilatation par rapport au temps $t > 0$ de la fonction $P_a(1, \cdot)$. Ensuite on remarque que la fonction $P_a(1, x) = c_{n, a} \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, car

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} dx & = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(1 + \rho^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} d\rho \leq \int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{(1 + \rho^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} d\rho + \int_1^{+\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n+1-a}} d\rho \\
& = \int_0^1 \frac{\rho^{n-1}}{(1 + \rho^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} d\rho + \int_1^{+\infty} \rho^{a-2} d\rho < +\infty,
\end{aligned}$$

la première intégrale est toujours convergente. D'autre part, comme $-1 < a < 1$ alors $a-2 < -1$, donc la deuxième intégrale ci-dessus converge, également on a bien que $P_a(1, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

En choisissant la constante $c_{n,a}$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} P_a(1,x)dx = 1$, alors on obtient que $\|P_a(t,\cdot)\|_{L^1} = 1$ pour tout $t > 0$. Remarquons que $c_{n,a} > 0$ car $P_a(1,x)$ est une fonction positive.

Ensuite, puisque $1 - a > 0$, alors pour $M > 0$ et pour tout $|x| > M$ on a, $\frac{t^{1-a}}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow 0^+$ et de plus, pour $0 < t < 1$, on a la majoration

$$c_{n,a} \frac{t^{1-a}}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} \leq c_{n,a} \frac{1}{|x|^{n+1-a}}.$$

Comme la fonction $\frac{1}{|x|^{n+1-a}}$ est intégrable sur $|x| > M$ par le théorème de convergence dominée on conclut que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|x| > M} P_a(t,x)dx = 0,$$

donc, $P_a(\cdot, t)$ est une famille d'approximation de l'identité. En conclusion, la fonction $P_a(t, x)$ est le noyau de type Poisson recherché.

2.2.2 Démonstration du Théorème 2.1

Le Théorème 2.1 a deux parties (i) et (ii).

On étudie tout d'abord le premier point. À l'aide de la fonction $P_a(t, x)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on trouve des solutions classiques du problème d'extension au demi-espace (23)-(24) de la forme :

$$u(t, x) = \varphi * P_a(t, \cdot)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) P_a(t, x - y)dy = c_{n,a} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y) t^{1-a}}{(t^2 + |x - y|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} dy, \quad \text{pour } (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n.$$

En effet, comme $P_a(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors $u(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t > 0$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral on obtient donc, pour $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) &= \partial_t^2 (\varphi * P_a(t, \cdot))(x) + \frac{a}{t} \partial_t (\varphi * P_a(t, \cdot))(x) + \Delta_x (\varphi * P_a(t, \cdot))(x) \\ &= \varphi * \left(\partial_t^2 P_a(t, \cdot) + \frac{a}{t} \partial_t P_a(t, \cdot) + \Delta_x P_a(t, \cdot) \right) (x) = 0. \end{aligned}$$

De plus, comme φ est uniformément continue et bornée, la limite suivante a lieu uniformément pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(0, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi * P_a(t, \cdot)(x) = \varphi(x).$$

De cette façon on a montré la partie (i) du Théorème 2.1.

On étudie maintenant la partie (ii) du Théorème 2.1. Une fois qu'on a trouvé des solutions explicites du problème d'extension (23)-(24) on cherche maintenant à montrer l'égalité :

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x).$$

Afin de simplifier les calculs on va considérer le changement de variable suivant :

$$z = \left(\frac{t}{1-a} \right)^{1-a}, \quad \text{ou de façon équivalente, } t = (1-a)z^{\frac{1}{1-a}}. \quad (29)$$

Ce changement de variable nous permettra d'obtenir plus directement la relation recherchée. Avec ce changement de variable notons $u(t, x) = u\left((1-a)z^{\frac{1}{1-a}}, x\right) := v(z, x)$, alors on a

$$\partial_z v(z, x) = \frac{1}{(1-a)^a} t^a \partial_t u(t, x), \quad (30)$$

et on obtient $\partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) = z^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 v(z, x)$. La nouvelle équation dans les variables $(z, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ est alors

$$z^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 v(z, x) + \Delta_x v(z, x) = 0. \quad (31)$$

De cette façon, on considère le problème d'extension pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ suivant :

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 v(z, x) + \Delta_x v(z, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \text{ et } z > 0 \\ v(0, x) = \varphi(x). \end{cases} \quad (32)$$

En prenant le changement de variable (29) dans le noyau de type Poisson (28) on obtient

$$P_a(t, x) = P_a\left((1-a)z^{\frac{1}{1-a}}, x\right) = c_{n,a} \frac{(1-a)^{\frac{1}{1-a}} z}{((1-a)^2 z^{\frac{2}{1-a}} + |x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} := \tilde{P}_a(z, x).$$

Comme $P_a(t, x)$ est une solution classique de l'équation (23) par le changement de variable (29) on a vu que $\tilde{P}_a(z, x)$ est une solution classique de l'équation (31). D'autre part, $\tilde{P}_a(z, \cdot)$ est une famille d'approximation de l'identité puisque le changement de variable, $t = (1-a)z^{\frac{1}{1-a}}$, est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. Ainsi, la fonction $\tilde{P}_a(z, x)$ définie ci-dessus vérifie $\tilde{P}_a(z, x) > 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{P}_a(z, x) dx = 1$ et est bien un noyau de type Poisson dans le sens de la Définition 2.3 pour le problème d'extension (32).

De cette façon, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on obtient des solutions classiques du problème (32) de la forme :

$$v(z, x) = \varphi * \tilde{P}_a(z, \cdot)(x) = \tilde{c}_{n,a} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \tilde{P}_a(z, x-y) dy = \tilde{c}_{n,a} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y) z}{((1-a)^2 z^{\frac{2}{1-a}} + |x-y|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} dy,$$

pour $(z, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, où $\tilde{c}_{n,a} := (1-a)^{\frac{1}{1-a}} c_{n,a} > 0$.

Avec cette nouvelle formulation, revenons à l'étude du point (ii). Par la relation (30) on sait que

$$\partial_z v(z, x) = \frac{1}{(1-a)^a} t^a \partial_t u(t, x),$$

alors pour montrer l'identité $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x)$ on va montrer que l'on a pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ la relation suivante :

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = -C \partial_z v(0, x), \quad (33)$$

avec une constante $C > 0$.

Une fois que nous avons posé le problème en terme des variables z et x , l'obtention de la relation (33) suit le même schéma réalisé pour le cas $a = 0$. En effet, par la définition de dérivée et par les propriétés de $\tilde{P}_a(z, t)$ ci-dessus on a :

$$\begin{aligned} \partial_z v(0, x) &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{v(z, x) - v(0, x)}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{z} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(y) - \varphi(x)) \tilde{P}_a(z, x-y) dy = \lim_{z \rightarrow 0^+} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{z} \int_{|x-y| > \varepsilon} (\varphi(y) - \varphi(x)) \tilde{P}_a(z, x-y) dy. \end{aligned} \quad (34)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a par le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{z} \int_{|x-y| > \varepsilon} (\varphi(y) - \varphi(x)) \tilde{P}_a(z, x-y) dy &= C \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{z} \int_{|x-y| > \varepsilon} \frac{z(\varphi(y) - \varphi(x))}{((1-a)^2 z^{\frac{2}{1-a}} + |x-y|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}} dy \\ &= C \int_{|x-y| > \varepsilon} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{|x-y|^{n+1-a}} dy. \end{aligned}$$

Alors, en changeant les limites dans la dernière formule de l'expression (34) on obtient :

$$\partial_z v(0, z) = -C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+1-a}} dy = -C \text{vp} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{n+1-a}} dy = -C(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x),$$

avec la constante $C = \frac{C(n, \frac{1-a}{2})}{c_{n,a}} > 0$. ■

La relation entre l'opérateur Laplacien Fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}$ et le problème d'extension au demi-espace pour une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, exprimée à travers la formule $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = -C \partial_z v(0, x)$ et par conséquent par la formule $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x)$ nous montre comment la puissance fractionnaire $\frac{1-a}{2}$ avec $-1 < a < 1$ peut être récupérée via le problème d'extension au demi-espace (23)-(24).

2.3 Le cadre $-1 < a < 1$. Transformation de Fourier et EDO

Dans cette section on souhaite donner une autre démonstration du Théorème 2.1 sans passer par les noyaux de type Poisson. Plus précisément, on va résoudre le problème d'extension

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 v(z, x) + \Delta_x v(z, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \text{ et } z > 0 \\ v(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

au niveau de Fourier par rapport à la variable x . De cette façon on obtient pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixé, le problème de Cauchy suivant avec une équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 \widehat{v}(z, \xi) - |\xi|^2 \widehat{v}(z, \xi) = 0, & z > 0 \\ \widehat{v}(0, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi). \end{cases} \quad (35)$$

La relation entre l'opérateur Laplacien Fractionnaire et le problème d'extension exprimée dans l'égalité $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = -C \partial_z v(0, x)$ s'écrit au niveau de Fourier par :

$$|\xi|^{1-a} \widehat{\varphi}(\xi) = -C \partial_z \widehat{v}(0, \xi). \quad (36)$$

En utilisant la même stratégie que la section antérieure, tout d'abord nous chercherons des solutions classiques $\widehat{v}(z, \xi)$ du problème (35) et ensuite nous vérifierons l'égalité (36).

Étude de l'existence.

Pour résoudre le problème (35) considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}} \phi''(z) - \phi(z) = 0 & z > 0, \\ \phi(0) = 1, \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} \phi(z) = 0. \end{cases} \quad (37)$$

En effet, si nous supposons qu'il existe $\phi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une solution classique du problème (37) alors si on pose pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{v}(z, \xi) := \widehat{\varphi}(\xi) \phi(|\xi|^{1-a} z), \quad \text{pour tout } z \in]0, +\infty[$$

on obtient que $\widehat{v}(z, \xi)$ est bien une solution classique du problème (35) initial puisque l'on a $\partial_z \widehat{v}(z, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{1-a} \phi'(|\xi|^{1-a} z)$ et $\partial_z^2 \widehat{v}(z, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^{2(1-a)} \phi''(|\xi|^{1-a} z)$, alors

$$z^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 \widehat{v}(z, \xi) - |\xi|^2 \widehat{v}(z, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi)|\xi|^2 \left((|\xi|^{1-a} z)^{\frac{-2a}{1-a}} \phi''(|\xi|^{1-a} z) - \phi(|\xi|^{1-a} z) \right) = 0.$$

Une fois que nous avons vu comment obtenir un solution de problème (35) à partir du problème (37) nous nous concentrons maintenant dans la résolution de celui-ci. Pour cela nous utiliserons le résultat suivant :

Théorème 2.3 (Méthode de Perron). *Soient $I =]a, b[$ un intervalle (fini ou non), $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ et $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Notons \mathcal{D}^+ l'ensemble des distributions positives sur I . Soient*

$$S^- = \left\{ A \in H_{loc}^1(I) : -(-A'' + wA) \in \mathcal{D}^+, \lim_{z \rightarrow a^+} A(z) = a_1, \lim_{z \rightarrow b^-} A(z) = b_1 \right\} \quad (\text{sous - solutions})$$

et

$$S^+ = \left\{ B \in H_{loc}^1(I) : -B'' + wB \in \mathcal{D}^+, \lim_{z \rightarrow a^+} B(z) = a_1, \lim_{z \rightarrow b^-} B(z) = b_1 \right\} \quad (\text{sur - solutions})$$

Si $A \in S^-$ et $B \in S^+$, alors, il existe ϕ de classe C^2 telle que : $A(z) \leq \phi(z) \leq B(z)$ pour tout $z \in I$ et elle est une solution classique du problème

$$\begin{cases} -\phi''(z) + w(z)\phi(z) = 0 & \text{sur } I, \\ \lim_{z \rightarrow a^+} \phi(z) = a_1, \\ \lim_{z \rightarrow b^-} \phi(z) = b_1. \end{cases}$$

La démonstration détaillée de ce théorème se trouve dans l'annexe Section 5.2.

Afin d'utiliser ce théorème nous remarquons que l'équation différentielle

$$z^{\frac{-2a}{1-a}} \phi''(z) - \phi(z) = 0,$$

est équivalente à l'équation différentielle

$$-\phi''(z) + z^{\frac{2a}{1-a}} \phi(z) = 0,$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Évidemment, si on multiplie la première équation par -1 et après on la divise par $z^{\frac{-2a}{1-a}}$ ($z > 0$) on obtient la deuxième équation. De cette façon, on a écrit l'équation différentielle qu'on veut résoudre dans le problème (37) sous la forme qui permet d'utiliser le Théorème 2.3.

Prenons alors comme intervalle $I =]0, +\infty[$, les conditions au bord $a_1 = 1, b_1 = 0$ et la fonction $w(z) = z^{\frac{2a}{1-a}}$. La méthode de Perron est simple nous devons seulement trouver deux fonctions $A \in S^-$ et $B \in S^+$ et une application directe du Théorème 2.3 nous assure l'existence d'une solution classique ϕ du problème (37) telle que $A \leq \phi \leq B$ sur $]0, +\infty[$. On va commencer par trouver une fonction $A \in S^-$.

- Détermination de la fonction A .

On va diviser notre étude selon les valeurs du paramètre a :

(i) Si $0 \leq a < 1$. Dans ce cas $\frac{-2a}{1-a} \leq 0$. Soit la fonction A définie par :

$$A(z) = \begin{cases} f(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-z}, & 0 \leq z \leq 1, \\ 0, & z > 1, \end{cases} \quad (38)$$

où la fonction $f(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-z}$ avec $c_1 = \frac{e^{-1}}{e^{-1} - e} < 0$ et $c_2 = \frac{-e}{e^{-1} - e} > 0$ est une solution classique de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} f''(z) = f(z), & 0 < z < 1, \\ f(0) = 1, & f(1) = 0. \end{cases}$$

Par la définition de $A(z)$, il est évident que $\lim_{z \rightarrow 0^+} A(z) = \lim_{z \rightarrow 0^+} f(z) = f(0) = 1$ et $\lim_{z \rightarrow +\infty} A(z) = 0$. Montrons maintenant les autres propriétés de la fonction A . D'abord, on va montrer que pour tout $z \in]0, +\infty[$ on a $A''(z) - z^{\frac{2a}{1-a}} A(z) \geq 0$. Par la formule des sauts et la définition de $A(z)$ on a au sens des distributions

$$\begin{aligned} A''(z) - z^{\frac{2a}{1-a}} A(z) &= A''(z) \mathbb{1}_{]0,1[}(z) + (A'(1^+) - A'(1^-)) \delta_1 - z^{\frac{2a}{1-a}} A(z) \mathbb{1}_{]0,1[}(z) \\ &= (f''(z) - z^{\frac{2a}{1-a}} f(z)) \mathbb{1}_{]0,1[}(z) + (0 - f'(1^-)) \delta_1 = f(z) (1 - z^{\frac{2a}{1-a}}) \mathbb{1}_{]0,1[}(z) - f'(1^-) \delta_1. \end{aligned}$$

Pour $0 < z < 1$ on a : d'abord, $0 < z^{\frac{2a}{1-a}} < 1$ car $\frac{2a}{1-a} \geq 0$, donc $1 - z^{\frac{2a}{1-a}} > 0$. Ensuite, comme $\frac{c_2}{-c_1} = e^2 > e^{2z}$, alors $c_2 e^{-z} \geq -c_1 e^z$, c'est à dire, $f(z) = c_1 e^z + c_2 e^{-z} \geq 0$. Finalement, comme $f'(z) = c_1 e^z - c_2 e^{-z} < 0$ alors $-f'(1^-) > 0$.

De cette façon, par la formule précédent on obtient $A''(z) - z^{\frac{2a}{1-a}} A(z) \geq 0$. D'autre part, $A \in H_{loc}^1(]0, +\infty[)$ car : f et f' sont bornées sur $]0, 1[$ et $A = 0$ sur $]1, +\infty[$, alors A et A' sont intégrables sur tout compact de $]0, +\infty[$. Finalement, comme $A'' - z^{\frac{2a}{1-a}} A \in L_{loc}^1(]0, +\infty[)$ est une fonction positive on a que $A'' - z^{\frac{2a}{1-a}} A \in \mathcal{D}^+$ et alors on conclut que $A \in S^-$.

(ii) Si $-1 < a < 0$. Dans ce cas on a $0 < \frac{-2a}{1-a} < 1$. Maintenant, définissons une autre fonction A par :

$$A(z) = \begin{cases} 1 + \frac{(1-a)^2}{2a(1+a)} z^{\frac{-2a}{1-a}}, & 0 \leq z < z_0 \\ 0, & z \geq z_0, \text{ où } 0 < z_0 = \left(\frac{-2a(1+a)}{(1-a)^2} \right)^{\frac{-1-a}{2a}} < 1. \end{cases} \quad (39)$$

Montrons que $A \in S^-$. Tout d'abord, on voit par la définition de A que : $\lim_{z \rightarrow 0^+} A(z) = 1$ et $\lim_{z \rightarrow +\infty} A(z) = 0$. Ensuite, par la formule des sauts on a au sens des distributions que :

$$A''(z) - z^{\frac{2a}{1-a}} A(z) = \left(z^{\frac{-2a}{1-a}-2} - z^{\frac{2a}{1-a}} - \frac{(1-a)^2}{2a(1+a)} \right) \mathbb{1}_{]0, z_0[}(z) - A'(z_0^-) \delta_{z_0}.$$

Comme $0 < \frac{-2a}{1-a} < 1$ alors $\frac{-2a}{1-a} - 1 < 0$, donc pour $z \in]0, +\infty[$ on a :

$$0 < z < z_0 \Rightarrow z^{\frac{-2a}{1-a}-2} - z^{\frac{2a}{1-a}} > 0,$$

d'où on obtient que $\left(z^{\frac{-2a}{1-a}-2} - z^{\frac{2a}{1-a}} - \frac{(1-a)^2}{2a(1+a)} \right) \mathbb{1}_{]0, z_0[}(z) > 0$. D'autre part $-A'(z_0^-) = \frac{1+a}{1-a} z_0^{\frac{a+1}{2a}} > 0$ et comme $A \in L^1(]0, +\infty[)$ alors on conclut que $A'' - z^{\frac{2a}{1-a}} A \in \mathcal{D}^+$.

Finalement, $A \in H_{loc}^1(]0, +\infty[)$ car $A \in L^1(]0, +\infty[)$ et comme $0 < \frac{-2a}{1-a} < 1$ on a en plus que

$$A'(z) = \begin{cases} -\frac{1+a}{1-a} z^{\frac{a+1}{2a}}, & 0 \leq z < 1 \\ 0, & z > 0 \end{cases}$$

appartient à $L^1(]0, +\infty[)$. Donc on a bien que $A \in S^-$.

- Détermination de la fonction B .

Ici il n'est pas nécessaire de diviser notre étude en deux cas puisque la fonction donnée convient dans ces cas. En effet, définissons alors la fonction B par :

$$B(z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq 1, \\ z^{-\varepsilon}, & z > 1, \end{cases} \quad (40)$$

avec $\varepsilon > 0$. Montrons que $B \in S^+$. Tout d'abord par la formule des sauts on a au sens des distributions que

$$B''(z) = \varepsilon(\varepsilon + 1)z^{-(\varepsilon+2)}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(z) + (B'(1^+) - B'(1^-))\delta_1,$$

comme $B'(1^+) - B'(1^-) = \varepsilon$ on a alors

$$-B''(z) + z^{\frac{2a}{1-a}}B(z) = z^{\frac{2a}{1-a}}\mathbb{1}_{]0,1[}(z) + (z^{(\frac{2a}{1-a}-\varepsilon)} - \varepsilon(\varepsilon + 1)z^{-(\varepsilon+2)})\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(z) + \varepsilon\delta_1,$$

dans l'expression ci-dessus on voit que pour montrer $-B''(z) + z^{\frac{2a}{1-a}}B(z) \geq 0$ il suffit de montrer que

$$z^{(\frac{2a}{1-a}-\varepsilon)} - \varepsilon(\varepsilon + 1)z^{-(\varepsilon+2)} \geq 0.$$

Dans l'expression ci-dessus on a alors que $z^{(\frac{2a}{1-a}-\varepsilon)} - \varepsilon(\varepsilon + 1)z^{-(\varepsilon+2)} \geq 0$ lorsque $z \geq ((\varepsilon + 1)\varepsilon)^{\frac{1-a}{2}}$ et de cette façon, en prenant $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $z \geq ((\varepsilon + 1)\varepsilon)^{\frac{1-a}{2}}$ on obtient $-B''(z) + z^{\frac{2a}{1-a}}B(z) \geq 0$.

Comme les fonctions B et B' sont bornées on a bien que $B \in H_{loc}^1(]0, +\infty[)$, alors pour montrer que $B \in S^+$ on doit vérifier que $-B'' + z^{\frac{2a}{1-a}}B \in \mathcal{D}^+$. Pour cela tout d'abord on va montrer que $-B'' + z^{\frac{2a}{1-a}}B \in L_{loc}^1(]0, +\infty[)$. On a vu que presque pour tout $z \in]0, +\infty[$, on a

$$-B''(z) + z^{\frac{2a}{1-a}}B(z) = z^{\frac{2a}{1-a}}\mathbb{1}_{]0,1[}(z) + (z^{(\frac{2a}{1-a}-\varepsilon)} - \varepsilon(\varepsilon + 1)z^{-(\varepsilon+2)})\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(z).$$

Comme la fonction $(z^{(\frac{2a}{1-a}-\varepsilon)} - \varepsilon(\varepsilon + 1)z^{-(\varepsilon+2)})\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(z)$ appartient à $L_{loc}^1(]0, +\infty[)$ il reste de montrer que la fonction $z^{\frac{2a}{1-a}}\mathbb{1}_{]0,1[}(z)$ est localement intégrable dans $]0, +\infty[$. Pour cela on va considérer deux cas : d'abord, si $\frac{-2a}{1-a} \leq 0$ alors $\frac{2a}{1-a} \geq 0$ et il est évidente que la fonction $z^{\frac{2a}{1-a}}\mathbb{1}_{]0,1[}$ est localement intégrable dans $]0, +\infty[$. D'autre part, si $0 < \frac{-2a}{1-a} < 1$ alors $-1 < \frac{2a}{1-a} < 0$ et la fonction $z^{\frac{2a}{1-a}}$ est toujours intégrable près de l'origine et par conséquent localement intégrable dans $]0, +\infty[$. Finalement, comme $-B'' + z^{\frac{2a}{1-a}}B \in L_{loc}^1(]0, +\infty[)$ est une fonction positive sur $]0, +\infty[$, on a $-B'' + z^{\frac{2a}{1-a}}B \in \mathcal{D}^+$. De cette façon on conclut que $B \in S^+$.

Maintenant que nous disposons des hypothèses du théorème de Perron, nous pouvons l'appliquer pour obtenir l'existence d'une fonction ϕ solution du problème (37) et de cette façon nous avons terminé l'étude de l'existence des solutions du problème (35).

Étude de l'égalité.

On cherche maintenant à étudier l'identité

$$\partial_z \widehat{v}(0, \xi) = -C \widehat{\varphi}(\xi) |\xi|^{1-a}.$$

Nous savons que $\partial_z \widehat{v}$ s'écrit comme $\widehat{\varphi}(\xi) |\xi|^{1-a} \phi'(|\xi|^{1-a} z)$. Si on peut montrer que $\lim_{z \rightarrow 0^+} \phi'(z) = -C$ avec $C > 0$, alors on obtiendrait :

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \partial_z z \widehat{v}(z, \xi) = \lim_{z \rightarrow 0^+} (\widehat{\varphi}(\xi) |\xi|^{1-a} \phi'(|\xi|^{1-a} z)) = -C \widehat{\varphi}(\xi) |\xi|^{1-a}$$

qui est l'identité recherchée. Ainsi, la seule chose que l'on doit montrer est que l'on a

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \phi'(z) = -C \quad \text{avec } C > 0.$$

Mais comme ϕ est solution du problème (37) on a $A(z) \leq \phi(z) \leq B(z)$ pour tout $z \in [0, +\infty[$ alors par la définition des fonctions A et B (formules (38), (39) et (40)) on a que $0 \leq \phi(z) \leq 1$ pour tout $z \in [0, \infty[$. Cela nous montre que $\phi'(z)$ est bornée près de l'origine, car si l'on a que $\lim_{z \rightarrow 0^+} \phi'(z) = +\infty$ (ou $\lim_{z \rightarrow 0^+} \phi'(z) = -\infty$) alors la fonction $\phi(z)$ a un comportement asymptotique par rapport à l'axe $z = 0$ ce qui contredit le fait que $0 \leq \phi \leq 1$.

D'autre part, on a $\phi''(z) = z^{\frac{2a}{1-a}} \phi(z)$ alors $\phi''(z) \geq 0$, cela montre que $\phi'(z)$ est croissante et alors il existe $\lim_{z \rightarrow 0^+} \phi'(z) := l$. Montrons maintenant que $l < 0$. Comme $\phi(0) = 1$ et $\phi(z) \leq B(z) = 1$ sur l'intervalle $[0, 1[$ on a deux possibilités : $\phi(z) = 1$ près de l'origine ou $\phi(z)$ est décroissante près de l'origine. Si $\phi(z) = 1$ pour tout $z \in [0, \delta[$ (avec $\delta > 0$ petit) on a une contradiction car $\phi(z)$ vérifie l'équation $-\phi''(z) + z^{\frac{2a}{1-a}} \phi(z) = 0$. Alors nécessairement $\phi(z)$ est décroissante près de l'origine, ce qui montre que $\phi'(z) < 0$ près de l'origine. Finalement on conclut que $\lim_{z \rightarrow 0^+} \phi'(z) = l = -C$, avec $0 < C < +\infty$ et de cette façon on conclut la preuve de la relation (36) et la démonstration du Théorème 2.1 en utilisant la transformation de Fourier.

Remarque 2.1. La relation $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \partial_t u(t, x)$ peut également être étudiée directement au niveau de Fourier : $|\xi|^{1-a} \widehat{\varphi}(\xi) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha \partial_t \widehat{u}(t, \xi)$ en utilisant l'équation $\partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0$ au lieu du problème (35) étudié ci-dessus.

En effet, en prenant la transformation de Fourier par rapport à x on obtient l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \partial_t^2 \widehat{u}(t, \xi) + \frac{a}{t} \partial_t \widehat{u}(t, \xi) - |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) = 0, & t > 0 \\ \widehat{u}(0, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi). \end{cases} \quad (41)$$

Comme dans le cas antérieur, pour trouver une solution classique $\widehat{u}(t, \xi)$ on résoud d'abord le problème

$$\begin{cases} \psi''(t) + \frac{a}{t} \psi'(t) - \psi(t) = 0, & t > 0, \\ \psi(0) = 1, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0. \end{cases} \quad (42)$$

En utilisant le changement de variable $t = (1-a)z^{\frac{1}{1-a}}$ notons $\psi(t) = \psi\left((1-a)z^{\frac{1}{1-a}}\right) := \phi(z)$. Ensuite, on a que $t^a \psi'(t) = (1-a)^a \phi'(z)$ et $\phi''(z) = \psi''(t) z^{\frac{2a}{1-a}} + \left(\frac{a}{1-a} z^{\frac{2a-1}{1-a}}\right) \psi'(t)$, d'où :

$$\psi''(t) + \frac{a}{t} \psi'(t) = \phi''(z) z^{\frac{-2a}{1-a}}.$$

De cette façon on arrive au problème (37) avec la fonction inconnue $\phi(z)$. Par le Théorème 2.3 on a vu qu'il existe une solution classique $\phi(z)$, donc, en retournant à la variable t on obtient que $\psi(t) := \phi\left(\left(\frac{t}{1-a}\right)^{1-a}\right)$ est bien une solution classique du problème (42).

Soit maintenant

$$\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi) \psi(|\xi|t).$$

Comme $\partial_t \widehat{u}(t, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi) |\xi| \psi'(|\xi|t)$ et $\partial_t^2 \widehat{u}(t, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi) |\xi|^2 \psi''(|\xi|t)$ alors :

$$\partial_t^2 \widehat{u}(t, \xi) + \frac{a}{t} \partial_t \widehat{u}(t, \xi) - |\xi|^2 \widehat{u}(t, \xi) = |\xi|^2 \widehat{\varphi}(\xi) \left(\psi''(|\xi|t) + \frac{a}{|\xi|t} \psi'(|\xi|t) - \psi(|\xi|t) \right) = 0,$$

de plus le fait $\psi(0) = \phi(0) = 1$ implique que $\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{\varphi}(\xi)$. Alors $\widehat{u}(t, \xi)$ est bien une solution classique du problème (41).

Montrons maintenant l'égalité $|\xi|^{1-a}\widehat{\varphi}(\xi) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t \widehat{u}(t, \xi)$. Par la définition de $\widehat{u}(t, \xi)$ on voit que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t \widehat{u}(t, \xi) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \widehat{\varphi}(\xi) \psi'(|\xi|t)|\xi| = \lim_{t \rightarrow 0^+} (|\xi|t)^a \psi'(|\xi|t) |\xi|^{1-a} \widehat{\varphi}(\xi) = -C |\xi|^{1-a} \widehat{\varphi}(\xi),$$

avec $-C = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \psi'(t)$. Par la relation $t^a \psi'(t) = (1-a)^a \phi'(z)$ on obtient donc qu'il existe $C > 0$ tel que $-C = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \psi'(t)$.

3 Applications aux fonctions harmoniques fractionnaires

Dans cette section nous montrerons quelques applications de la relation entre l'opérateur Laplacien Fractionnaire et le problème d'extension au demi-espace. Plus précisément, nous monterons trois conséquences de la relation $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x)$:

- (i) Extension par réflexion de l'extension harmonique à l'espace tout entier,
- (ii) L'inégalité de Harnack,
- (iii) La formule de monotonie de Almgren.

Pour ces trois applications nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 3.1. Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}$ l'opérateur Laplacien Fractionnaire, avec $-1 < a < 1$ et $R > 0$ un réel. On dit que φ est harmonique fractionnaire dans un voisinage de l'origine si :

$$(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = 0 \quad \text{pour tout } |x| < R.$$

Il est important de remarquer que la relation entre l'opérateur $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}$, avec $-1 < a < 1$ et le problème d'extension exprimée par la formule $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x)$ nous permet de traiter cet opérateur non local via des techniques locales des équation aux dérivées partielles comme nous allons le voir tout au long de cette section.

3.1 Extensions par réflexion à l'espace tout entier

Nous avons travaillé jusqu'à présent sur un demi-espace du type $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$. Dans cette section nous allons voir comment étendre les problèmes étudiés à l'espace tout entier du type $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Si $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution classique du problème d'extension au demi-espace (23)-(24) pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction qui vérifie la relation $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x)$ nous allons montrer que lorsque $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = 0$ pour tout $|x| < R$, la fonction u peut s'étendre à des valeurs de t négatives de sorte qu'elle vérifie l'équation (23) au sens faible.

Tout d'abord, remarquons que l'équation du problème d'extension $\partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0$ est équivalente à l'équation $div_{t,x}(t^a \nabla_{t,x} u)(t, x) = 0$ dans le sens qu'une fonction régulière $u(t, x)$ vérifie l'équation du problème d'extension si et seulement si $u(t, x)$ vérifie l'équation ci-dessus, où $\nabla_{t,x} u(t, x) = (\partial_t u(t, x), \partial_1 u(t, x), \dots, \partial_n u(t, x))$ est le vecteur gradient de u dans le point $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ et $div_{t,x} = (\partial_t, \partial_1, \dots, \partial_n)$ est l'opérateur de divergence. En effet, pour $(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ on a :

$$div_{t,x}(t^a \nabla_{t,x} u)(t, x) = \partial_t(t^a \partial_t u(t, x)) + \sum_{i=1}^n \partial_i(t^a \partial_i u(t, x)) = t^a (\partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x)).$$

Cette remarque nous sera d'utilité dans l'énoncé et la démonstration du résultat suivant.

Théorème 3.1 (Extension par réflexion à l'espace tout entier). Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $R > 0$ et $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une solution classique du problème d'extension (23)-(24) :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \\ u(0, x) = \varphi(x), \end{cases}$$

telle qu'elle vérifie la relation : $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x)$. Si φ est harmonique fractionnaire dans le sens

de la Définition 3.1 pour tout $|x| < R$ alors la fonction,

$$\tilde{u}(t, x) = \begin{cases} u(t, x), & t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \\ u(-t, x), & t < 0 \end{cases}$$

est une solution faible de l'équation

$$\operatorname{div}_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) = 0$$

sur la boule $B_R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t^2 + |x|^2 < R^2\}$.

Démonstration. Soit $\phi \in C_0^\infty(B_R)$ une fonction test. On a alors

$$\int_{B_R} \operatorname{div}_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) \phi(t, x) dt dx = \int_{B_R} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) dt dx.$$

On considère les ensembles

$$B_{1,\varepsilon} = \{(t, x) \in B_R : |t| > \varepsilon\} \text{ et } B_{2,\varepsilon} = \{(t, x) \in B_R : |t| \leq \varepsilon\} \text{ pour } \varepsilon > 0$$

et par le théorème de la convergence dominée on a

$$\begin{aligned} I_R = \int_{B_R} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) dt dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_{1,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) dt dx \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_{2,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) dt dx. \end{aligned}$$

Supposons pour l'instant le lemme suivant :

Lemme 3.1.

$$\int_{B_{1,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) dt dx = \int_{B_R \cap \{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(\varepsilon, x) dx.$$

Nous donnerons la preuve de ce lemme un peu plus tard. Alors, en acceptant ce lemme on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{B_R} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) dt dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_{1,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) dt dx \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_{2,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) dt dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_R \cap \{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(\varepsilon, x) dx \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_{2,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) dt dx \\ &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{1,\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{2,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer maintenant que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{1,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{2,\varepsilon} = 0$. Pour montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{1,\varepsilon} = 0$ on commence par remarquer que

$$\int_{B_R \cap \{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x) dx = \int_{B_R^n} \phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x) \mathbb{1}_{B_{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}}(x) dx,$$

où B_R^n dénote la boule dans \mathbb{R}^n centrée dans l'origine et de rayon R . D'autre part, comme φ est harmonique fractionnaire dans la boule B_R^n on sait que :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x) = (-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = 0, \text{ pour tout } x \in B_R^n. \quad (43)$$

Comme $\phi(t, x)$ est une fonction test, elle est toujours bornée et par l'égalité (43) en écrivant ε en place de t , on a que la fonction

$$\varepsilon^a \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x) \mathbb{1}_{B^n_{\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}}}(x)$$

est aussi bornée sur B_R^n pour $\varepsilon > 0$ assez petite. Alors on a la majoration $|\phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x)| \leq C \mathbb{1}_{B_R^n}(x)$ pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. De plus,

$$\phi(\varepsilon, x) \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x) \varepsilon^a \mathbb{1}_{B^n_{\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}}}(x) \longrightarrow 0 \quad \text{pour tout } x \in B_R^n,$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, donc par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{1,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_R \cap \{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_R^n} \phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x) \mathbb{1}_{B^n_{\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}}}(x) dx = 0.$$

Montrons maintenant que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{2,\varepsilon} = 0$. Tout d'abord remarquons que comme u est de classe \mathcal{C}^2 dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ alors $\|\nabla_{t,x} u\|_{L^\infty} < +\infty$ sur l'ensemble compact $\overline{B_R \cap \{t \geq 0\}}$. Cela montre que la fonction $t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|$ appartient à $L^1(B_R \cap \{t \geq 0\})$. En effet, on a la majoration suivante :

$$\int_{B_R \cap \{t \geq 0\}} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)| dt dx \leq \|\nabla_{t,x} u\|_{L^\infty} \int_{B_R \cap \{t \geq 0\}} t^a dt dx \leq \|\nabla_{t,x} u\|_{L^\infty} \int_{|x| < R} \int_0^R t^a dt dx \leq C \|\nabla_{t,x} u\|_{L^\infty} \int_0^R t^a dt < +\infty,$$

où la dernière intégrale converge car $-1 < a < 1$. Ensuite, par la définition de la fonction $\tilde{u}(t, x)$ on obtient que

$$\int_{B_R} |t|^a |\nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x)| dt dx = 2 \int_{B_R \cap \{t \geq 0\}} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)| dt dx < +\infty.$$

De cette façon, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{2,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_{2,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) dt dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_R} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) \mathbb{1}_{\{|t| \leq \varepsilon\}}(t) dt dx = 0.$$

Nous avons démontré que la fonction $\tilde{u}(t, x)$ est solution faible de l'équation $\operatorname{div}_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) = 0$ sur la boule B_R . ■

Preuve du Lemme 3.1. Tout d'abord on va montrer que

$$\int_{B_{1,\varepsilon}} |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) \cdot \nabla_{t,x} \phi(t, x) dt dx = \int_{B_{1,\varepsilon}} \operatorname{div}_{t,x}(\phi(t, x) |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) dt dx. \quad (44)$$

En effet, on sait que

$$\int_{B_{1,\varepsilon}} \operatorname{div}_{t,x}(\phi(t, x) |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) dt dx = \int_{B_{1,\varepsilon}} \nabla_{t,x} \phi(t, x) \cdot |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) dt dx + \int_{B_{1,\varepsilon}} \phi(t, x) \operatorname{div}_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) dt dx,$$

alors pour montrer la formule (44) il suffit de montrer que $\int_{B_{1,\varepsilon}} \phi(t, x) \operatorname{div}_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) dt dx = 0$. Par la définition de $B_{1,\varepsilon}$ on obtient,

$$\begin{aligned} \int_{B_{1,\varepsilon}} \phi(t, x) \operatorname{div}_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) dt dx &= \int_{B_{1,\varepsilon} \cap \{t > \varepsilon\}} \phi(t, x) \operatorname{div}_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) dt dx \\ &+ \int_{B_{1,\varepsilon} \cap \{t < -\varepsilon\}} \phi(t, x) \operatorname{div}_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) dt dx. \end{aligned}$$

Comme $u(t, x)$ vérifie $\operatorname{div}_{t,x}(t^a \nabla_{t,x} u(t, x)) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, il est évident que la première intégrale dans la dernière formule est égale à zéro. De plus, lorsque $t < -\varepsilon$, par la définition de $\tilde{u}(t, x)$ on sait que $\nabla_{t,x} \tilde{u}(t, x) = \nabla_{t,x} u(-t, x)$, où $-t > \varepsilon > 0$, alors on a :

$$\int_{B_{1,\varepsilon} \cap \{t < -\varepsilon\}} \phi(t, x) \operatorname{div}_{t,x}(|t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) dt dx = - \int_{B_{1,\varepsilon} \cap \{-t > \varepsilon\}} \phi(t, x) \operatorname{div}_{t,x}((-t)^a \nabla_{t,x} u)(-t, x) d(-t) dx = 0,$$

d'où on vérifie la formule (44). Maintenant, comme $\phi(t, x) = 0$ sur le bord de la boule B_R et en utilisant la formule de Stokes, on a

$$\int_{B_{1,\varepsilon}} \operatorname{div}_{t,x}(\phi(t, x) |t|^a \nabla_{t,x} \tilde{u})(t, x) dt dx = \int_{B_R \cap \{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \nabla_{t,x} \tilde{u}(\varepsilon, x) dx.$$

Ce qui termine la preuve du lemme. ■

Remarque 3.1. *Le théorème antérieur reste vrai si la fonction φ est telle que $(-\Delta)^s \varphi = 0$ dans B_R^n au sens des distributions où nous remplaçons l'hypothèse (43) (où la limite est vérifiée uniformément pour tout $|x| < R$) par la condition plus faible $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, \cdot) = 0$ au sens des distributions, c'est à dire :*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{B_R^n} t^a \partial_t u(t, x) \psi(x) dx = 0, \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_R^n).$$

En effet, il suffit d'étudier l'intégrale $I_{1,\varepsilon}$ et on a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_R \cap \{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x) dx \right| &= \left| \int_{B_R^n} \phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x) \mathbb{1}_{B_{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}}(x) dx \right| \leq \int_{B_R^n} |\phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x)| dx \\ &\leq \int_{B_R^n} \psi(x) \varepsilon^a \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x) dx, \end{aligned}$$

où $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_R^n)$ est telle que $|\phi(\varepsilon, x)| \leq \psi(x)$ pour tout $x \in B_R^n$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit. Donc, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$ par la majoration antérieure on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{1,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_R \cap \{|t|=\varepsilon\}} \phi(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t \tilde{u}(\varepsilon, x) dx = 0.$$

3.2 L'inégalité de Harnack

Passons maintenant à notre deuxième exemple d'application du Théorème 2.1.

Dans le cadre des fonctions harmoniques classiques, c'est à dire des fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur un domaine Ω de \mathbb{R}^n qui vérifient l'équation de Laplace

$$\Delta f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \Omega,$$

l'inégalité de Harnack affirme que si en plus, $f \geq 0$ sur Ω , alors les valeurs de cette fonction sont comparables sur tout sous-domaine $U \subset\subset \Omega$, plus précisément, pour tout sous-domaine $U \subset\subset \Omega$ il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de n, Ω, U telle que

$$\sup_{x \in U} f(x) \leq C \inf_{x \in U} f(x).$$

Rappelons que la notation $U \subset\subset \Omega$ signifie qu'il existe un ouvert $V \subset \Omega$ tel que \overline{V} est compact et on a les inclusions $U \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega$.

Dans cette section nous voulons montrer le théorème suivant.

Théorème 3.2 (Inégalité de Harnack). Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ une fonction positive telle que $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}}\varphi(x) = 0$, pour tout $|x| < R$, avec $-1 < a < 1$ et $R > 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de n telle que

$$\sup_{x \in B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x) \leq C \inf_{x \in B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x).$$

Démonstration. Soit $v(z, x) = \varphi * \widetilde{P}_a(z, \cdot)(x)$ où $\widetilde{P}_a(z, x) = c_{n,a} \frac{(1-a)^{\frac{1-a}{2}} z}{((1-a)^2 z^{\frac{2}{1-a}} + |x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$ est le noyau de type Poisson solution de classe \mathcal{C}^2 du problème d'extension pour φ

$$\begin{cases} z^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 v(z, x) + \Delta_x v(z, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \text{ et } z > 0 \\ v(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

D'autre part, soit $\widetilde{v}(z, x)$ l'extension par réflexion par rapport à l'hyperplan $z = 0$ de la fonction $v(z, x)$, c'est à dire, la fonction $\widetilde{v}(z, x)$ est définie par :

$$\widetilde{v}(z, x) = \begin{cases} v(z, x), & z \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}^n \\ v(-z, x), & z < 0. \end{cases}$$

Nous allons montrer que la fonction $\widetilde{v}(z, x)$ vérifie l'inégalité

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z, x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z, x)$$

et alors comme $\widetilde{v}(0, x) = \varphi(x)$ on obtient l'inégalité de Harnack recherchée $\sup_{B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} \varphi(x)$.

Pour cela nous allons montrer que la fonction \widetilde{v} est la limite d'une suite de fonctions $(w_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ dans l'espace $\mathcal{C}(B_R)$ où w_ε vérifié l'inégalité

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z, x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z, x) \quad (45)$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et de cette façon en faisant $\varepsilon \rightarrow 0^+$ on a que $\sup_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z, x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} \widetilde{v}(z, x)$.

Pour trouver une telle suite de fonctions pour $\varepsilon > 0$ nous considérons alors le problème suivant :

$$\begin{cases} (|z| + \varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 w_\varepsilon(z, x) + \Delta_x w_\varepsilon(z, x) = 0 & (z, x) \in B_R, \\ w_\varepsilon(z, x) = \widetilde{v}(z, x) & (z, x) \in \partial B_R \end{cases} \quad (46)$$

L'équation $(|z| + \varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 w_\varepsilon(z, x) + \Delta_x w_\varepsilon(z, x) = 0$ est strictement elliptique (voir [8], Définition 6.2) et ses coefficients :

$$a_{i,j}(z, x) = \begin{cases} (|z| + \varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}} & \text{si } i = j = 1 \\ 1 & \text{si } i = j \text{ et } 2 \leq i, j \leq n+1 \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

sont fonctions höldériennes sur la boule B_R avec exposant de Hölder $0 < \sigma < \min\left(1, \frac{-2a}{1-a}\right)$. Nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 3.2 ([8], Théorème 6.13). Soit $Lf(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \partial_{i,j}^2 f(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j f(x) + c(x) f(x)$ un opérateur strictement elliptique sur un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, tel que $c(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$ et tel que tous ces coefficients $a_{i,j}, b_i, c$ appartiennent à l'espace de Hölder $\mathcal{C}^\sigma(\Omega)$, avec $0 < \sigma < 1$. De plus, on suppose que pour tout $x \in \partial\Omega$ il existe une boule B telle que $\overline{\Omega} \cap \overline{B} = \{x\}$ (condition de la sphère extérieure). Alors, pour $h \in \mathcal{C}^\sigma(\Omega)$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\partial\Omega$ il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^{2,\sigma}(\Omega)$ solution du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} Lf(x) = h(x) & x \in \Omega, \\ f(x) = g(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Ainsi, en prenant le domaine $\Omega = B_R$ (qui vérifie la condition de la sphère extérieure) et la condition au bord $g(z, x) = \tilde{v}(z, x)$ (remarquons que $\tilde{v}(z, x)$ est continue car est l'extension à l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de la fonction de classe \mathcal{C}^2 $v(z, x)$) on obtient par le lemme précédent que pour tout ε il existe une fonction $w_\varepsilon \in \mathcal{C}(\overline{B_R}) \cap \mathcal{C}^{2,\sigma}(B_R)$ solution unique du problème (46).

Montrons maintenant que telle fonction w_ε vérifié l'inégalité de Harnack (45). Pour cela nous allons utiliser le résultat suivant.

Pour $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière et strictement convexe, on note par $\text{coff}D^2\phi(z, x)$ la matrice de cofacteurs de la matrice hessienne de la fonction ϕ dans le point $(z, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ notée $D^2\phi(z, x)$. Alors pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 on définit l'équation de Monge-Ampère par

$$L_\phi f(z, x) = \text{tr}(\text{coff}D^2\phi(z, x)D^2f(z, x)), \quad (47)$$

où tr dénote la trace de la matrice $\text{coff}D^2\phi(z, x)D^2f(z, x)$. Dans ce cadre on a lemme suivant :

Lemme 3.3 ([3], Théorème 5). *Soit f une solution classique de l'équation de Monge-Ampère $L_\phi f = 0$ sur la boule $B((z_0, x_0), r)$. Alors il existe une constante $C > 1$ qui ne dépend pas de la fonction ϕ telle que, si f est de plus une fonction positive alors on a*

$$\sup_{B((z_0, x_0), \frac{r}{2})} f(z, x) \leq C \sup_{B((z_0, x_0), \frac{r}{2})} f(z, x). \quad (48)$$

Pour appliquer le résultat ci-dessus à notre cadre pour tout $\varepsilon > 0$ nous définissons la fonction $\phi_\varepsilon(z, x)$ par :

$$\phi_\varepsilon(z, x) = \frac{|x|^2}{2} + \frac{(|z| + \varepsilon)^{\frac{2}{1-a}}}{C(a)} - \frac{\varepsilon^{\frac{2}{1-a}}}{C(a)} \quad \text{pour tout } (z, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

avec la constante $C(a) = \frac{2(1+a)}{(1-a)^2} > 0$. On voit $\phi_\varepsilon(z, x)$ est bien une fonction strictement convexe et régulière car la puissance de l'expression $(|z| + \varepsilon)^{\frac{2}{1-a}}$ est telle que $\frac{2}{1-a} > 1$ ($-1 < a < 1$).

Comme w_ε est une solution classique de l'équation $(|z| + \varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 w_\varepsilon(z, x) + \Delta_x w_\varepsilon(z, x) = 0$ on a :

$$\begin{aligned} L_{\phi_\varepsilon} w_\varepsilon(z, x) &= \text{tr}(\text{coff}D^2\phi_\varepsilon(z, x)D^2w_\varepsilon(z, x)) = \text{tr}(\det(D^2\phi_\varepsilon(z, x))(D^2\phi_\varepsilon(z, x))^{-1}D^2w_\varepsilon(z, x)) \\ &= (|z| + \varepsilon)^{\frac{1}{1-a}} \left((|z| + \varepsilon)^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 w_\varepsilon(z, x) + \Delta_x w_\varepsilon(z, x) \right) = 0 \end{aligned}$$

d'où on voit que la fonction w_ε est de plus une solution classique de l'équation de Monge-Ampère $L_{\phi_\varepsilon} w_\varepsilon = 0$ sur la boule B_R

Comme la fonction v est positive sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, car $v(z, x) = \varphi * \widetilde{P}_a(z, \cdot)(x)$ où les fonctions φ et \widetilde{P}_a sont positives, on a que \tilde{v} est aussi une fonction positive et par le principe du maximum faible (voir [8], Corollaire 3.2) on obtient que w_ε est bien une fonction positive, ainsi, par le Lemme 3.3 il existe une constante $C > 1$ qui ne dépend pas de la fonction ϕ_ε et par conséquent ne dépend pas de ε telle que

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z, x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z, x)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Étudions maintenant la convergence de la suite $(w_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$. Pour cela nous allons accepter le lemme suivant

Lemme 3.4 ([4], Lemme 4.2). *Soit $(w_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ la famille des solutions classiques du problème (46). Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a que $\partial_z w_\varepsilon(0, x) = 0$ pour tout $|x| < R$ et de plus, il existe une constante $M > 0$ tel que*

$$\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^{1,\sigma}(B_R)} \leq M \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

Rappelons que $\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^{1,\sigma}(B_R)} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|\partial^\alpha w_\varepsilon\|_\infty + \sup_{|\alpha|=1} \sup_{(z,x)\neq(w,y)} \frac{|\partial^\alpha w_\varepsilon(z,x) - \partial^\alpha w_\varepsilon(w,y)|}{|(z,x) - (w,y)|^\sigma}$ et alors par la borne uniforme $M > 0$ donnée par le lemme précédent on a que les familles des fonctions $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\partial^\alpha w_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (pour tout multi-indice $|\alpha| = 1$) sont équicontinues sur la boule B_R et ensuite par le théorème d'Ascoli on obtient qu'il existe une sous-suite $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que les suites des fonctions $(w_{\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\partial^\alpha w_{\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$ (pour tout multi-indice $|\alpha| = 1$) convergent dans l'espace $\mathcal{C}(B_R)$ et donc sont suites de Cauchy dans $\mathcal{C}(B_R)$. Ceci implique que $(w_{\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $H^1(B_R)$, en effet on a la majoration

$$\begin{aligned} \|w_{\varepsilon_j} - w_{\varepsilon_k}\|_{H^1(B_R)}^2 &= \int_{B_R} |w_{\varepsilon_j}(z,x) - w_{\varepsilon_k}(z,x)|^2 dz dx + \sum_{|\alpha|=1} \int_{B_R} |\partial^\alpha w_{\varepsilon_j}(z,x) - \partial^\alpha w_{\varepsilon_k}(z,x)|^2 dz dx \\ &\leq C(\|w_{\varepsilon_j} - w_{\varepsilon_k}\|_\infty^2 + \|\partial^\alpha w_{\varepsilon_j} - \partial^\alpha w_{\varepsilon_k}\|_\infty^2) \end{aligned}$$

et donc il existe $w \in H^1(B_R)$ telle que $w_{\varepsilon_j} \rightarrow w$ dans $H^1(B_R)$.

Étudions maintenant trois propriétés importantes de la fonction w .

- (1) Tout d'abord remarquons que par la condition au bord $w_\varepsilon(z,x) = \tilde{v}(z,x)$ pour tout $(z,x) \in \partial B_R$ on a que $w(z,x) = \tilde{v}(z,x)$ pour tout $(z,x) \in \partial B_R$.
- (2) D'autre part, pour tout multi-indice $|\alpha| = 1$ la suite de fonctions $(\partial^\alpha w_{\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{C}(B_R)$ et par conséquent elle converge dans $L^2(B_R)$ grâce à la majoration ci-dessus, ainsi, comme $w_{\varepsilon_j} \rightarrow w$ dans $H^1(B_R)$ alors nécessairement les fonctions $\partial^\alpha w$ sont continues sur $\mathcal{C}(B_R)$ et ceci montre que $w \in \mathcal{C}^1(B_R)$.
Soit $B \subset\subset B_R \cap \{z \neq 0\}$ une boule, comme w_{ε_j} vérifie l'équation $(|z| + \varepsilon_j)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} \partial_z^2 w_{\varepsilon_j}(z,x) + \Delta_x w_{\varepsilon_j}(z,x) = 0$ au sens classique sur la boule B alors pour tout $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(B)$ on a

$$\int_B \partial_z w_{\varepsilon_j}(z,x) \partial_z ((|z| + \varepsilon_j)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} \psi)(z,x) dz dx + \int_B \nabla_x w_{\varepsilon_j}(z,x) \cdot \nabla_x \psi(z,x) dz dx = 0$$

et par le théorème de convergence dominée on obtient, lorsque $\varepsilon_j \rightarrow 0^+$, que

$$\int_B \partial_z w(z,x) \partial_z ((|z|)^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} \psi)(z,x) dz dx + \int_B \nabla_x w(z,x) \cdot \nabla_x \psi(z,x) dz dx = 0,$$

c'est à dire on a que $|\cdot| \cdot |\cdot|^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} \partial_z^2 w + \Delta_x w = 0$ au sens des distributions. Ensuite comme la fonction $|\cdot| \cdot |\cdot|^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur la boule $B \subset\subset B_R \cap \{0\}$ on a bien que l'opérateur strictement elliptique $|\cdot| \cdot |\cdot|^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} \partial_z^2 + \Delta_x$ a ces coefficients de classe \mathcal{C}^∞ et comme $|\cdot| \cdot |\cdot|^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} \partial_z^2 w + \Delta_x w = 0$ alors on obtient que w est de classe \mathcal{C}^∞ sur la boule $B \subset\subset B_R \cap \{z \neq 0\}$ et par conséquent est de classe \mathcal{C}^2 . Cela montre que la fonction w vérifie l'équation $|z|^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} \partial_z^2 w(z,x) + \Delta_x w(z,x) = 0$ au sens classique sur toute boule $B \subset\subset B_R \cap \{0\}$.

- (3) Finalement, par le Lemme 3.4 on a que $\partial_z w_\varepsilon(0,x) = 0$ pour tout $|x| < R$ et pour tout $\varepsilon > 0$ et alors on obtient que $\partial_z w(0,x) = 0$ pour tout $|x| < R$.

Avec ces propriétés qui caractérisent à la fonction w nous énonçons maintenant le lemme suivant

Lemme 3.5. *Il existe une unique fonction w telle que :*

- (i) $w(z,x) = \tilde{v}(z,x)$ pour tout $(z,x) \in \partial B_R$.
- (ii) $w \in \mathcal{C}^1(B_R)$, elle est localement de classe \mathcal{C}^2 sur $B_R \cap \{z \neq 0\}$ et pour toute boule $B \subset\subset B_R \cap \{0\}$ elle vérifie l'équation au sens classique

$$|z|^{\frac{-2\alpha}{1-\alpha}} \partial_z^2 w(z,x) + \Delta_x w(z,x) = 0$$

- (iii) $\partial_z w(0,x) = 0$.

Nous donnerons la preuve de ce lemme plus tard. En acceptant ce résultat nous allons montrer que la fonction $\tilde{v}(z, x)$ vérifie l'inégalité de Harnack $\sup_{B_{\frac{R}{2}}} \tilde{v}(z, x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} \tilde{v}(z, x)$. Pour cela tout d'abord nous allons montrer que la fonction w vérifie l'inégalité de Harnack ci-dessus.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons montré l'inégalité

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z, x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} w_\varepsilon(z, x)$$

où la constante $C > 1$ ne dépend pas de ε et par conséquent comme $w_{\varepsilon_j} \rightarrow w$ dans $\mathcal{C}(B_R)$ on a bien que

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}} w(z, x) \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} w(z, x).$$

De cette façon pour montrer que la fonction $\tilde{v}(z, x)$ vérifie l'inégalité de Harnack nous allons montrer que $\tilde{v}(z, x)$ vérifie les propriétés du Lemme 3.5 et alors par l'unicité d'une telle fonction on obtient que $\tilde{v} = w$ sur B_R .

Vérifions alors les propriétés du Lemme 3.5. La propriété (i) est évidente et donc nous passons à la vérification de l'autres propriétés.

- (ii) Comme $\tilde{v}(z, x)$ est la réflexion par l'hyperplan $z = 0$ de la fonction de classe \mathcal{C}^2 $v(z, x)$ pour montrer que $\tilde{v} \in \mathcal{C}^1(B_R)$ il suffit de montrer que $\partial_z \tilde{v}(0, x) = 0$ pour tout $|x| < R$. En effet, comme φ est harmonique fractionnaire, c'est à dire $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = 0$ pour tout $|x| < R$ par la relation $\partial_z v(0, x) = (-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = 0$ on obtient que $\partial_z v(0, x) = 0$ et par conséquent on a bien que $\partial_z \tilde{v}(0, x) = 0$ pour tout $|x| < R$.

D'autre part, comme la fonction $v(z, x)$ est de classe \mathcal{C}^2 et vérifie l'équation $z^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 v(z, x) + \Delta_x v(z, x) = 0$ au sens classique par la définition de la fonction $\tilde{v}(z, x)$ on obtient que cette fonction est localement de classe \mathcal{C}^2 sur $B_R \cap \{z \neq 0\}$ et vérifie l'équation $|z|^{\frac{-2a}{1-a}} \partial_z^2 \tilde{v}(z, x) + \Delta_x \tilde{v}(z, x) = 0$ au sens classique sur toute boule $B \subset\subset B_R \cap \{z \neq 0\}$.

- (iii) Par la partie (ii) on a vu que $\partial_z \tilde{v}(0, x) = 0$.

Maintenant que nous avons vérifié toutes les hypothèses du Lemme 3.5, nous pouvons invoquer ce résultat et de cette façon nous obtenons que $\tilde{v} = w$ sur B_R et nous avons montré ce théorème. \blacksquare

Preuve du Lemme 3.5.

L'existence d'une telle fonction w est déjà prouvée dans le théorème ci-dessus de cette façon il suffit de montrer l'unicité. Supposons alors qu'ils existent deux fonctions w_1, w_2 qui vérifient les hypothèses (i), (ii) et (iii). Pour $\varepsilon > 0$ soit

$$u(z, x) = w_1(z, x) - w_2(z, x) + \varepsilon|z|,$$

l'objectif est de montrer que $u(z, x) \leq \varepsilon R$ pour tout $(z, x) \in B_R$ de sorte que si l'on fait $\varepsilon \rightarrow 0^+$ on trouve que $u(z, x) \leq 0$, c'est à dire, $w_1(z, x) \leq w_2(z, x)$. Après, par le même raisonnement en définissant maintenant $u(z, x) = w_2(z, x) - w_1(z, x) + \varepsilon|z|$ on trouvera que $w_2(z, x) \leq w_1(z, x)$, donc $w_1(z, x) = w_2(z, x)$ pour tout $(z, x) \in B_R$.

Comme $w_1(z, x) = w_2(z, x) = \tilde{v}(z, x)$ pour tout $(z, x) \in \partial B_R$, alors, $u(z, x) = \varepsilon|z| < \varepsilon R$ sur ∂B_R . Supposons qu'il existe un point dans B_R tel que $u > \varepsilon R$, alors u atteint au moins un maximum dans la boule B_R dans un point $(z_0, x_0) \in B_R$, car u est continue et $u < \varepsilon R$ sur ∂B_R .

On va étudier les cas suivants :

Si $z_0 = 0$, en notant $\partial_z^+ u(0, x_0) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \partial_z u(z, x_0)$ et $\partial_z^- u(0, x_0) = \lim_{z \rightarrow 0^-} \partial_z u(z, x_0)$, on a, $\partial_z^+ u(0, x_0) = \varepsilon$ et $\partial_z^- u(0, x_0) = -\varepsilon$, alors $\partial_z^+ u(0, x_0) > \partial_z^- u(0, x_0)$, mais comme $(0, x_0)$ c'est un maximum et on a que $\partial_z^- u(0, x_0) \geq 0$ et $\partial_z^+ u(0, x_0) \leq 0$, c'est à dire, on a que $\partial_z^+ u(0, x_0) \leq \partial_z^- u(0, x_0)$, alors on obtient une contradiction.

Par contre, si $z_0 \neq 0$ prenons $r > 0$ assez petit tel que la boule $B := B((z_0, x_0), r) \subset\subset B_R \cap \{z \neq 0\}$. Par l'hypothèse (ii) on sait que w_1 et w_2 sont solutions de l'équation elliptique $|z|^{\frac{2a}{1-a}} \partial_z^2 w(z, x) + \Delta_x w(z, x) = 0$ sur la boule B , ensuite, par la définition de $u(z, x)$ on sait que cette fonction est aussi une solution de cette même équation sur B . Comme u atteint un maximum dans le point (z_0, x_0) dans $B_R \cap \{z \neq 0\}$ évidemment (z_0, x_0) est un point où u atteint un maximum dans B , mais par le principe du maximum faible (voir [8], Corollaire 3.2) on a que la fonction u ne peut pas atteindre des maximums dans l'intérieur de la boule B mais seulement au bord ∂B . De cette façon, on conclut que $u(z, x) \leq \varepsilon R$ sur $\overline{B_R}$. ■

3.3 Formule de monotonie d'Almgren

Nous passons maintenant à la troisième application du Théorème 2.1. Les formules de monotonie sont des outils très utiles dans l'étude des propriétés de régularité des équations différentielles elliptiques. En particulier, la formule de monotonie d'Almgren a été utilisée dans de nombreux problèmes reliés à la recherche des propriétés locales de régularité des équations différentielles elliptiques. Dans ce cadre pour une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur B_1 la boule de centre l'origine et de rayon 1, on a le résultat

Théorème 3.3 (Formule de monotonie d'Almgren, [10] Théorème 1). *Si u est harmonique sur la boule B_1 , c'est à dire, $\Delta u(x) = 0$ pour tout $|x| < 1$ alors la fonction $\Phi :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\Phi(R) = R \frac{\int_{B_R} |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{S}_R^{n-1}} |u(x)|^2 d\sigma(x)}$$

est monotone croissante dans l'intervalle $]0, 1[$.

Dans cette section nous montrons la formule de fréquence d'Almgren pour les fonctions harmoniques fractionnaires.

Commençons donc avec quelques notations et définitions. Soit $R > 0$, on définit la semi-boule supérieure par

$$B_R^+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t^2 + |x|^2 < R \text{ et } t > 0\}$$

et on définit la semi-sphère supérieure par

$$S_R^+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t^2 + |x|^2 = R^2 \text{ et } t > 0\}.$$

Remarquons que $\partial B_R^+ = S_R^+ \cup \{|x| \leq R\}$.

On veut monter le théorème suivant :

Théorème 3.4 (Formule de fréquence d'Almgren). *Soit $R_0 > 0$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une solution classique du problème d'extension pour φ :*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \\ u(0, x) = \varphi(x). \end{cases}$$

Si φ est de plus une fonction harmonique fractionnaire pour tout $|x| < R_0$ alors la fonction $\Phi :]0, R_0[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\Phi(R) = R \frac{\int_{B_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 dt dx}{\int_{\partial B_R^+} t^a |u(t, x)|^2 d\sigma(t, x)},$$

est monotone croissante dans l'intervalle $]0, R_0[$.

Démonstration. Tout d'abord remarquons que $\Phi(R)$ est croissante si et seulement si $\log(\Phi(R))$ est croissante car la fonction \log et son inverse sont croissantes. Pour montrer ceci il suffit de montrer que $(\log(\Phi(R)))' \geq 0$, pour tout $0 < R < R_0$. Soit donc $0 < R < R_0$. On a,

$$\log(\Phi(R)) = \log(R) + \log \left(\int_{B_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 dt dx \right) - \log \left(\int_{\partial B_R^+} t^a |u(t, x)|^2 d\sigma(t, x) \right),$$

donc

$$\begin{aligned} (\log(\Phi(R)))' &= \frac{1}{R} + \frac{\partial_R \int_{B_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 dt dx}{\int_{B_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 dt dx} - \frac{\partial_R \int_{\partial B_R^+} t^a |u(t, x)|^2 d\sigma(t, x)}{\int_{\partial B_R^+} t^a |u(t, x)|^2 d\sigma(t, x)} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{\int_{S_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 d\sigma(t, x)}{\int_{B_R^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 dt dx} - \frac{\int_{S_R^+} t^a \left(2u(t, x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) + (n+a) |u(t, x)|^2 \right) d\sigma(t, x)}{\int_{S_R^+} t^a |u(t, x)|^2 d\sigma(t, x)}. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $(t, x) = R(s, w)$, où $(s, w) \in B_1^+$, il suffit de montrer que $(\log(\Phi(1)))' \geq 0$. En prenant $R = 1$ dans la formule antérieure, on obtient

$$(\log(\Phi(1)))' = 1 + \frac{\int_{S_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 d\sigma(t, x)}{\int_{B_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 dt dx} - \frac{2 \int_{S_1^+} t^a \left(u(t, x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) + (n+a) |u(t, x)|^2 \right) d\sigma(t, x)}{\int_{S_1^+} t^a |u(t, x)|^2 d\sigma(t, x)} \quad (49)$$

Maintenant, on va étudier les intégrales $\int_{S_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 d\sigma(t, x)$ et $\int_{B_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 dt dx$ de la première fraction de la formule précédente.

Pour la première intégrale ci-dessus, comme $\nabla_{t,x} u(t, x) = \frac{\partial}{\partial \vec{\tau}} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x)$ et $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{\tau}} u(t, x) = 0$ on a

$$|\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 = \left| \frac{\partial}{\partial \vec{\tau}} u(t, x) \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) \right|^2 = \left| \frac{\partial}{\partial \vec{\tau}} u(t, x) \right|^2 - \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) \right|^2,$$

alors, on peut écrire

$$\int_{S_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 d\sigma(t, x) = \int_{S_1^+} \left(\left| \frac{\partial}{\partial \vec{\tau}} u(t, x) \right|^2 - \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) \right|^2 \right) d\sigma(t, x) + 2 \int_{S_1^+} \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) \right|^2 d\sigma(t, x).$$

Supposons pour l'instant le lemme suivant.

Lemme 3.6.

$$\int_{S_1^+} t^a \left(\left| \frac{\partial}{\partial \vec{\tau}} u(t, x) \right|^2 - \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) \right|^2 \right) d\sigma(t, x) = \int_{B_1^+} (n+a-1) t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 dt dx.$$

Alors par le lemme ci-dessus on a

$$\int_{S_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 d\sigma(t, x) = \int_{B_1^+} (n+a-1) t^a |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 dt dx + 2 \int_{S_1^+} \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) \right|^2 d\sigma(t, x). \quad (50)$$

Maintenant, pour la deuxième intégrale comme $u(t, x)$ est une solution classique de l'équation (23) on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_{t,x}(t^\alpha u(t, x) \nabla_{t,x} u(t, x)) &= \partial_t t^\alpha u(t, x) \partial_t u(t, x) + \sum_{i=1}^n \partial_i t^\alpha u(t, x) \partial_i u(t, x) = t^\alpha |\nabla_x u(t, x)| + t^\alpha u(t, x) \Delta_x u(t, x) \\
&\quad + \frac{\alpha}{t} t^\alpha u(t, x) \partial_t u(t, x) + t^\alpha (\partial_t u(t, x))^2 + t^\alpha \partial_t^2 u(t, x) \\
&= t^\alpha |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 + t^\alpha u(t, x) \underbrace{(\partial_t^2 u(t, x) + \frac{\alpha}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x))}_{=0 \text{ car } u(t,x) \text{ vérifie l'équation (23)}} = t^\alpha |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2,
\end{aligned}$$

donc, on peut écrire

$$\int_{B_1^+} t^\alpha |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 dt dx = \int_{B_1^+} \operatorname{div}_{t,x}(t^\alpha u(t, x) \nabla_{t,x} u(t, x)) dt dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_1^+ \cap \{t > \varepsilon\}} \operatorname{div}_{t,x}(t^\alpha u(t, x) \nabla_{t,x} u(t, x)) dt dx.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, par la formule de Stokes, on a

$$\int_{B_1^+ \cap \{t > \varepsilon\}} \operatorname{div}_{t,x}(t^\alpha u(t, x) \nabla_{t,x} u(t, x)) dt dx = \int_{S_1^+ \cap \{t > \varepsilon\}} t^\alpha u(t, x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) d\sigma(t, x) - \int_{|x| < \sqrt{1-\varepsilon^2}} \varepsilon^\alpha \partial_t u(\varepsilon, x) u(\varepsilon, x) dx.$$

Ensuite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, par le théorème de convergence dominée on a

$$\int_{S_1^+ \cap \{t > \varepsilon\}} t^\alpha u(t, x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) dt dx \rightarrow \int_{S_1^+} t^\alpha u(t, x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) dt dx$$

et

$$\int_{|x| < \sqrt{1-\varepsilon^2}} \varepsilon^\alpha \partial_t u(\varepsilon, x) u(\varepsilon, x) dx = \int_{|x| < 1} \varepsilon^\alpha \partial_t u(\varepsilon, x) u(\varepsilon, x) \mathbb{1}_{B(0, \sqrt{1-\varepsilon^2})}(x) dx \rightarrow 0.$$

Donc, on peut écrire

$$\int_{B_1^+} t^\alpha |\nabla_{t,x} u(t, x)|^2 dt dx = \int_{S_1^+} u(t, x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t, x) d\sigma(t, x). \tag{51}$$

Maintenant, en utilisant les formules (50) et (51) et on revenant à (49) on obtient

$$\begin{aligned}
(\log(\Phi(1)))' &= 1 + \frac{\int_{S_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)}{\int_{B_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dt dx} - \frac{2 \int_{S_1^+} t^a u(t,x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) d\sigma(t,x)}{\int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} - \frac{(n+a) \int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)}{\int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} \\
&= 1 + \frac{\int_{B_1^+} (n+a-1) t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dt dx + 2 \int_{S_1^+} \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) \right|^2 d\sigma(t,x)}{\int_{B_1^+} t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dt dx} - \\
&\quad (n+a) - \frac{2 \int_{S_1^+} t^a \left(u(t,x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) \right) d\sigma(t,x)}{\int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} \\
&= 1 + (n+a-1) - (n+a) + 2 \frac{\int_{S_1^+} t^a \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) \right|^2 d\sigma(t,x)}{\int_{S_1^+} t^a u(t,x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) d\sigma(t,x)} - 2 \frac{\int_{S_1^+} t^a u(t,x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) d\sigma(t,x)}{\int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} \\
&= 2 \left(\frac{\int_{S_1^+} t^a \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) \right|^2 d\sigma(t,x)}{\int_{S_1^+} t^a u(t,x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) d\sigma(t,x)} - \frac{\int_{S_1^+} t^a u(t,x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) d\sigma(t,x)}{\int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} \right) \\
&= 2 \left(\frac{\int_{S_1^+} t^a \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) \right|^2 d\sigma(t,x) \int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x) - \left(\int_{S_1^+} t^a u(t,x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) d\sigma(t,x) \right)^2}{\int_{S_1^+} t^a u(t,x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) d\sigma(t,x) \int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x)} \right) \quad (52) \\
&\quad \underbrace{\hspace{15em}}_{:=I}
\end{aligned}$$

Ensuite, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on sait que

$$\left(\int_{S_1^+} t^a u(t,x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) d\sigma(t,x) \right)^2 \leq \left(\int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x) \right) \left(\int_{S_1^+} t^a \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) \right|^2 d\sigma(t,x) \right),$$

alors, dans la formule (52) on a

$$I \geq \frac{\left(\int_{S_1^+} t^a \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) \right|^2 d\sigma(t,x) \right) \left(\int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x) \right) - \left(\int_{S_1^+} t^a u(t,x) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) d\sigma(t,x) \right)^2}{\left(\int_{S_1^+} t^a \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) \right|^2 d\sigma(t,x) \right) \left(\int_{S_1^+} t^a |u(t,x)|^2 d\sigma(t,x) \right)} \geq 0$$

car par l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons vu que le numérateur de la fraction ci dessus est positif. De cette façon on a montré que $(\log(\Phi(1)))' \geq 0$ et ceci termine la démonstration du Théorème 3.4. \blacksquare

Passons maintenant à la preuve du Lemme 3.6.

Preuve. Tout d'abord on va montrer que

$$2 \operatorname{div}_{t,x} \left(t^a \frac{|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2}{2} (t,x) - t^a ((t,x) \cdot \nabla_{t,x} u(t,x)) \nabla_{t,x} u(t,x) \right) = t^a (n+a-1) |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2. \quad (53)$$

Notons $w := (t,x) \cdot \nabla_{t,x} u(t,x)$, alors comme

$$\operatorname{div}_{t,x} \left(t^a \frac{|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2}{2} (t,x) - t^a w \nabla_{t,x} u(t,x) \right) = \operatorname{div}_{t,x} \left(t^a \frac{|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2}{2} \right) - \operatorname{div}_{t,x} (t^a w \nabla_{t,x} u(t,x))$$

on a par la définition de l'opérateur de divergence que

$$\operatorname{div}_{t,x} \left(t^a \frac{|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2}{2} (t,x) \right) = t^a (n+a+1) \frac{|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2}{2} + \Delta_{t,x} u(t,x) w.$$

D'autre part, pour l'expression $\operatorname{div}_{t,x} (t^a w \nabla_{t,x} u(t,x))$ on a que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{t,x} (t^a w \nabla_{t,x} u(t,x)) &= t^a w \Delta_{t,x} u(t,x) + \nabla_{t,x} (t^a (w \cdot \nabla_{t,x} u(t,x))) = t^a w \Delta_{t,x} u(t,x) + \sum_{i=1}^n \partial_i t^a w \partial_i u(t,x) + \partial_t t^a w \partial_t u(t,x) \\ &= t^a w (\Delta_x u(t,x) + \partial_t^2 u(t,x)) + \sum_{i=1}^n \partial_i t^a w \partial_i u(t,x) + \left(t^a \frac{a}{t} w + t^a \partial_t w \right) \partial_t u(t,x) \\ &= t^a \nabla_{t,x} w \cdot \nabla_{t,x} u(t,x) + t^a w \underbrace{(\partial_t^2 u(t,x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x))}_{=0 \text{ car } u(t,x) \text{ vérifie l'équation (23)}} \\ &= t^a \nabla_{t,x} w \cdot \nabla_{t,x} u(t,x) = t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 + \Delta_{t,x} u(t,x) w. \end{aligned}$$

D'où on obtient la formule (53) car

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{t,x} \left(t^a \frac{|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2}{2} (t,x) - t^a ((t,x) \cdot \nabla_{t,x} u(t,x)) \nabla_{t,x} u(t,x) \right) &= t^a (n+a+1) \frac{|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2}{2} + \Delta_{t,x} u(t,x) w \\ &\quad - t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 - \Delta_{t,x} u(t,x) w = t^a \frac{n+a-1}{2} |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2. \end{aligned}$$

De cette façon, par la formule (53) et le théorème de convergence dominée on a

$$\int_{B_1^+} (n+a-1) t^a |\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 dt dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2 \int_{B_1^+ \cap \{t > \varepsilon\}} \operatorname{div}_{t,x} \left(t^a \frac{|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2}{2} (t,x) - t^a ((t,x) \cdot \nabla_{t,x} u(t,x)) \nabla_{t,x} u(t,x) \right) dt dx,$$

ensuite, pour tout $\varepsilon > 0$, par la formule de Stokes on obtient que

$$\begin{aligned} &2 \int_{B_1^+ \cap \{t > \varepsilon\}} \operatorname{div}_{t,x} \left(t^a \frac{|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2}{2} (t,x) - t^a ((t,x) \cdot \nabla_{t,x} u(t,x)) \nabla_{t,x} u(t,x) \right) dt dx \\ &= 2 \int_{S_1^+ \cap \{t > \varepsilon\}} t^a \frac{|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2}{2} - t^a |(t,x) \cdot \nabla_{t,x} u(t,x)|^2 d\sigma(t,x) + 2 \int_{|x| < 1} -\varepsilon^{a+1} \frac{|\nabla_{t,x} u(\varepsilon, x)|^2}{2} dx \\ &\quad + 2 \int_{|x| < 1} (\varepsilon, x) \cdot \nabla_{t,x} u(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t u(\varepsilon, x) dx \\ &= \int_{S_1^+} t^a \left(|\nabla_{t,x} u(t,x)|^2 - 2 \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(x,t) \right|^2 \right) d\sigma(t,x) + 2 \int_{|x| < 1} -\varepsilon^{a+1} \frac{|\nabla_{t,x} u(\varepsilon, x)|^2}{2} + (\varepsilon, x) \cdot \nabla_{t,x} u(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t u(\varepsilon, x) dx \\ &= \int_{S_1^+} t^a \left(\left| \frac{\partial}{\partial \vec{\tau}} u(t,x) \right|^2 - \left| \frac{\partial}{\partial \vec{n}} u(t,x) \right|^2 \right) d\sigma(t,x) + 2 \int_{|x| < 1} -\varepsilon^{a+1} \frac{|\nabla_{t,x} u(\varepsilon, x)|^2}{2} + (\varepsilon, x) \cdot \nabla_{t,x} u(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t u(\varepsilon, x) dx. \end{aligned}$$

Pour montrer la formule de ce lemme on doit montrer que la deuxième intégrale de la dernière expression est égale à zéro lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Tout d'abord remarquons que :

$$\left| \int_{|x|<1} \varepsilon^{a+1} \frac{|\nabla_{t,x} u(\varepsilon, x)|^2}{2} + (\varepsilon, x) \cdot \nabla_{t,x} u(\varepsilon, x) \varepsilon^a \partial_t u(\varepsilon, x) dx \right| \leq \int_{|x|<1} \varepsilon^{a+1} \frac{|\nabla_{t,x} u(\varepsilon, x)|^2}{2} + c |\nabla_{t,x} u(\varepsilon, x)| |\varepsilon^a \partial_t u(\varepsilon, x)| dx.$$

Comme φ est harmonique fractionnaire pour tout $|x| < R < R_0$ par l'identité $(-\Delta)^{\frac{1-a}{2}} \varphi(x) = -C \lim_{t \rightarrow 0^+} t^a \partial_t u(t, x)$ en écrivant ε en place de t , on a que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^a \partial_t u(\varepsilon, x) = 0 \quad \text{pour tout } |x| < R,$$

alors on obtient par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x|<1} \varepsilon^{a+1} \frac{|\nabla_{t,x} u(\varepsilon, x)|^2}{2} + C |\nabla_{t,x} u(\varepsilon, x)| |\varepsilon^a \partial_t u(\varepsilon, x)| dx = 0$$

et nous avons montré ce lemme. ■

4 Extension à d'autres opérateurs de dérivation fractionnaire.

La relation entre l'opérateur Laplacien Fractionnaire et le problème d'extension au demi-espace, montrée dans le Théorème 2.1 dans la Section 2, ouvre la porte à des relations similaires pour d'autres opérateurs de dérivation fractionnaire. L'objectif de cette section est de montrer deux résultats récents exposés dans les articles [14] et [1] où, motivés par le Théorème 2.1, la relation entre le problème d'extension et un opérateur de dérivation fractionnaire est généralisée à des opérateurs différentiels linéaires de deuxième ordre L . D'autre part cette relation permet de définir l'opérateur de Laplace-Beltrami fractionnaire sur l'hyperboloïde \mathbb{H}^n .

4.1 Relation entre un opérateur différentiel de deuxième ordre et le problème d'extension au demi-espace

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, on dénote par L un opérateur différentiel linéaire de deuxième ordre, c'est à dire, pour $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ l'action de L sur f est donnée par l'expression :

$$Lf = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \partial_{i,j}^2 f + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i f + cf,$$

où l'on suppose que les fonctions $a_{i,j}, b_i$ et c sont continues sur Ω et de plus $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

Nous utiliserons comme principal outil la théorie spectrale et avant de commencer il convient de préciser quelques définitions et résultats qui seront utilisés ici. Toutes ces définitions et résultats se trouvent dans [11] Chapitres 12 et 13.

Définition 4.1 (Résolution de l'identité). *Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable et H un espace de Hilbert complexe avec produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Une fonction*

$$E : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{L}(H),$$

où $\mathfrak{L}(H)$ dénote l'espace des opérateurs linéaires et continus de H dans H , est dite une résolution de l'identité si elle vérifie :

- (i) Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $E(A) \in \mathfrak{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint et tel que $E(A) \circ E(A) = E(A)$ (composition d'opérateurs).
- (ii) $E(\emptyset) = 0$ et $E(X) = I_d$.
- (iii) Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $E(A \cap B) = E(A) \circ E(B)$.
- (iv) Si $A, B \in \mathcal{A}$ sont tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$.
- (v) Pour tous $f, g \in H$ la fonction $E_{f,g}$ définie par

$$\begin{aligned} E_{f,g} : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ A &\longmapsto E_{f,g}(A) = \langle E(A)f, g \rangle_H \end{aligned}$$

est une mesure complexe.

Remarque 4.1. Remarquons que par les propriétés (i) et (v) de la définition antérieure on a que pour tout $f \in H$ la mesure $E_{f,f}$ est positive et de variation totale $E_{f,f}(X) = \|f\|_H^2$.

L'outil le plus important repose sur le théorème suivant pour les opérateurs auto-adjoints. Rappelons que le spectre d'un opérateur auto-adjoint T , noté $\sigma(T)$, est tel que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Théorème 4.1 (Théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints). *Soit $T : \text{Dom}(T) \longrightarrow H$ un opérateur linéaire, auto-adjoint avec domaine dense $\text{Dom}(T) \subset H$. Alors il existe une unique résolution de l'identité $E : \text{Bor}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{L}(H)$ telle que :*

- (i) Pour tout $f \in \text{Dom}(T)$ et $g \in H$ on a

$$\langle Tf, g \rangle_H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{f,g}(\lambda). \quad (54)$$

(ii) $E(\sigma(T)) = I_d$ et on dit alors que la résolution de l'identité est concentrée dans le spectre de T .

$$(iii) \text{ Dom}(T) = \left\{ f \in H : \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 dE_{f,f}(\lambda) < +\infty \right\}.$$

Il est important de remarquer que si un opérateur linéaire auto-adjoint $T : \text{Dom}(T) \rightarrow H$ est de plus un opérateur positif, c'est à dire,

$$\langle Tf, f \rangle_H \geq 0, \quad \text{pour tout } f \in \text{Dom}(T),$$

alors on a que $\sigma(T) \subset [0, +\infty[$ (en fait c'est une condition équivalente) et dans le théorème antérieur on obtient dans l'expression (54) que

$$\langle Tf, g \rangle_H = \int_0^{+\infty} \lambda dE_{f,g}(\lambda),$$

pour tout $f \in \text{Dom}(T)$ et $g \in H$, de cette façon, dans le cadre des opérateurs linéaires auto-adjoints positifs on travaille uniquement sur le domaine d'intégration $[0, +\infty[$.

Ce théorème nous montre que tout opérateur linéaire auto-adjoint $T : \text{Dom}(T) \rightarrow H$ génère une unique résolution de l'identité E et de plus, on peut récupérer cet opérateur avec cette résolution de l'identité au sens de la formule (54). De cette façon on écrit formellement

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda).$$

Pour $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable et $T : \text{Dom}(T) \rightarrow H$ un opérateur linéaire auto-adjoint on veut donner un sens à l'expression $\phi(T)$, plus précisément, on souhaite obtenir un opérateur $\phi(T)$ défini dans un sous-ensemble dense de H . L'exemple le plus important est lorsqu'on prend la fonction ϕ de cette façon $\phi(\lambda) = e^{-\tau\lambda}$ avec $\tau > 0$ et de cette manière on obtient le semi-groupe associé à l'opérateur T , $(e^{-\tau T})_{\tau > 0}$, comme nous allons le voir plus tard. Tout d'abord énonçons le théorème qui donne un sens à l'expression $\phi(T)$.

Théorème 4.2 (Calcul symbolique). *Soit $T : \text{Dom}(T) \rightarrow H$ un opérateur linéaire auto-adjoint et $E : \text{Bor}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{L}(H)$ la résolution de l'identité générée par T . Alors pour toute fonction mesurable $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ l'opérateur*

$$\phi(T) : \text{Dom}(\phi(T)) \rightarrow H$$

défini par

$$\langle \phi(T)f, g \rangle_H = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda) dE_{f,g}(\lambda), \quad \text{pour tout } f \in \text{Dom}(\phi(T)), g \in H, \quad (55)$$

vérifie :

(i) $\text{Dom}(\phi(T)) = \left\{ f \in H : \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\lambda)|^2 dE_{f,f}(\lambda) < +\infty \right\}$ est un sous-espace dense de H .

(ii) $\phi(T) : \text{Dom}(\phi(T)) \rightarrow H$ est un opérateur linéaire normal, c'est à dire $\phi(T)(\phi(T))^* = (\phi(T))^*\phi(T)$.

(iii) Pour $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable on a que $\phi\psi(T) \subset \phi(T) \circ \psi(T)$ et $\text{Dom}(\phi(T) \circ \psi(T)) = \text{Dom}(\psi(T)) \cap \text{Dom}(\phi\psi(T))$. En particulier $\phi\psi(T) = \phi(T) \circ \psi(T)$ si et seulement si $\text{Dom}(\phi(T) \circ \psi(T)) = \text{Dom}(\psi(T)) \cap \text{Dom}(\phi\psi(T))$.

Remarque 4.2. Dans la propriété (iii) du théorème antérieur l'expression $\phi\psi(T) \subset \phi(T) \circ \psi(T)$ signifie que l'opérateur $\phi(T) \circ \psi(T)$ est une extension de l'opérateur $\phi\psi(T)$, c'est à dire, $\text{Dom}(\phi(T) \circ \psi(T)) \supset \text{Dom}(\phi\psi(T))$ et pour tout $f \in \text{Dom}(\phi\psi(T))$ on a $\phi\psi(T)(f) = \phi(T) \circ \psi(T)(f)$.

Par la formule (55) on écrit formellement

$$\phi(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda) dE(\lambda).$$

Une fois que nous avons exposé rapidement ces résultats de la théorie spectrale, maintenant, nous allons les utiliser pour définir le semi-groupe associé à l'opérateur différentiel linéaire de deuxième ordre L et l'opérateur de dérivation fractionnaire L^s avec la puissance $0 < s < 1$.

Dorénavant nous allons travailler uniquement sur l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$. Afin d'appliquer les résultats antérieurs il faut imposer sur l'opérateur $L : Dom(L) \rightarrow L^2(\Omega)$ les conditions suivantes :

- (i) $Dom(L)$ est un sous-espace dense de $L^2(\Omega)$.
- (ii) L est un opérateur auto-adjoint et positif.

De cette façon, par le Théorème 4.1 il existe une unique résolution de l'identité $E : Bor([0, +\infty[) \rightarrow \mathfrak{L}(L^2(\Omega))$ telle que $L = \int_0^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$. À partir de maintenant et dans tout qui suit E dénote la résolution de l'identité générée par l'opérateur L .

Nous avons alors les définitions suivantes :

Définition 4.2 (Semi-groupe associé à l'opérateur L). *Soit L un opérateur différentiel linéaire de deuxième ordre qui vérifie les hypothèses (i) et (ii) ci-dessus. La famille d'opérateurs $(e^{-\tau L})_{\tau > 0}$ avec domaine $L^2(\Omega)$, définie pour tout $\tau > 0$ par :*

$$\langle e^{-\tau L} f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_0^{+\infty} e^{-\tau \lambda} dE_{f,g}(\lambda), \quad \text{pour tout } f, g \in L^2(\Omega),$$

est le semi-groupe associé à l'opérateur L .

Il est important de remarquer que pour tout $\tau > 0$ l'opérateur $e^{-\tau L}$ a les propriétés suivantes pour tout $f \in L^2(\Omega)$ (voir [1], Section 3 et [14], Section 2) :

- (i) La famille $(e^{-\tau L})_{\tau > 0}$ est un semi-groupe avec générateur infinitésimal L , c'est à dire : $e^{-\tau_1 L} \circ e^{-\tau_2 L} = e^{-(\tau_1 + \tau_2)L}$ pour tout $\tau_1, \tau_2 > 0$, $e^{0L} = I_d$ et $Lf = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\tau L} f - f}{\tau}$ pour tout $f \in Dom(L)$.
- (ii) $\|e^{-\tau L} f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$.
- (iii) La fonction $u = e^{-\tau L} f$ vérifie, dans L^2 , l'équation d'évolution : $\partial_t u + Lu = 0$.
- (iv) $e^{-\tau L}$ est un opérateur auto-adjoint et positif.

Définition 4.3 (Puissances fractionnaires de l'opérateur L). *Soit $0 < s < 1$, à l'aide du Théorème 4.2 on définit l'opérateur L^s , avec domaine $Dom(L^s) \subset Dom(L)$, par :*

$$\langle L^s f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_0^{+\infty} \lambda^s dE_{f,g}(\lambda), \quad \text{pour tout } f \in Dom(L^s) \text{ et } g \in L^2(\Omega). \quad (56)$$

Il existe une relation intéressante entre les opérateurs $e^{-\tau L}$ et L^s , plus précisément, maintenant nous allons voir que l'opérateur L^s peut être défini à l'aide de l'opérateur $e^{-\tau L}$. En effet, motivés par l'identité

$$\lambda^s = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} (e^{-\tau \lambda} - 1) \frac{1}{\tau^{1+s}} d\tau, \quad \text{pour tout } \lambda > 0,$$

grâce à la formule (56) on écrit formellement :

$$\begin{aligned} L^s &= \int_0^{+\infty} \lambda^s dE(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-\tau \lambda} - 1) \frac{1}{\tau^{1+s}} d\tau dE(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-\tau \lambda} - 1) \frac{1}{\tau^{1+s}} dE(\lambda) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau \lambda} dE(\lambda) - \int_0^{+\infty} 1 dE(\lambda) \right) \frac{1}{\tau^{1+s}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} (e^{-\tau L} - I_d) \frac{1}{\tau^{1+s}} d\tau. \end{aligned}$$

De cette façon on obtient une caractérisation de l'opérateur L^s par

$$L^s = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} (e^{-\tau L} - I_d) \frac{1}{\tau^{1+s}} d\tau.$$

Cette caractérisation sera d'utilité dans la démonstration du Théorème 4.3 ci-après. Après ces définitions nous passons au résultat le plus important de cette section concernant l'opérateur L^s avec $0 < s < 1$. Il s'agit en fait d'une généralisation du Théorème 2.1 et nous allons étudier ici le problème suivant pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$:

$$\partial_t^2 u(t, x) + \frac{1-2s}{t} \partial_t u(t, x) - Lu(t, x) = 0, \quad x \in \Omega \text{ et } t > 0 \quad (57)$$

$$u(0, x) = \varphi(x). \quad (58)$$

Ce problème est donc un analogue au problème d'extension au demi-espace présenté dans les sections précédentes et nous allons voir qu'il est possible d'en donner une solution complète exactement de la même façon que précédemment mais en utilisant les outils issus de la théorie spectrale. Plus précisément nous avons le théorème suivant.

Théorème 4.3 (Relation entre l'opérateur L^s et le problème d'extension au demi-espace). *Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \subset \text{Dom}(L^s)$ et $0 < s < 1$. Une solution au sens de $L^2(\Omega)$ du problème d'extension pour φ au demi-espace (57)-(58) est donnée par*

$$u(t, x) = C_s \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega \text{ et } t > 0 \quad (59)$$

avec la constante $C_s = \frac{1}{\Gamma(s)}$.

De plus, on a l'égalité dans $L^2(\Omega)$:

$$c_s L^s \varphi = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-2s} \partial_t u, \quad (60)$$

avec la constante $c_s = C_s \frac{1}{2s} \Gamma(1-s)$.

Remarque 4.3. Dans la Section 2 on a écrit la puissance fractionnaire $s = \frac{1-a}{2}$, avec $-1 < a < 1$. Ce changement de variable a aidé à la recherche du noyau de type Poisson P_a . Néanmoins, dans cette section, pour simplifier les calculs on va travailler directement avec la puissance fractionnaire s . Remarquons que si dans l'équation (57) on prend $s = \frac{1-a}{2}$ et $L = -\Delta$, on récupère l'équation du problème d'extension pour le Laplacien Fractionnaire : $\partial_t^2 u + \frac{a}{t} \partial_t u + \Delta_x u = 0$. Ce fait n'est pas fortuit, nous verrons plus tard comment le Théorème 4.3 implique le Théorème 2.1 lorsqu'on prend l'opérateur $L = -\Delta$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Démonstration du Théorème 4.3. La preuve de ce théorème est divisée dans 6 étapes. Tout au long de cette preuve nous allons travailler avec deux mesures : $\frac{e^{-\frac{t^2}{4\tau}}}{\tau^{1-s}} d\tau$ et la mesure donnée par la résolution de l'identité, $E_{f,g}$. Il est intéressant de remarquer deux propriétés de ces mesures. D'abord, observons que pour tout $t > 0$ fixé la mesure $\frac{e^{-\frac{t^2}{4\tau}}}{\tau^{1-s}} d\tau$ est une mesure finie sur tout compact de $[0, +\infty[$ ceci nous permettra d'utiliser le théorème de Fubini. En effet, pour $0 < M < +\infty$ on a

$$\int_0^M \frac{e^{-\frac{t^2}{4\tau}}}{\tau^{1-s}} d\tau \leq C \int_0^M \frac{1}{\tau^{1-s}} d\tau,$$

où l'intégrale ci-dessus converge car $0 < s < 1$. D'autre part, remarquons que pour tout $f, g \in L^2(\Omega)$ la mesure $E_{f,g}$ est de variation bornée et de plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a que $|E_{f,g}|([0, +\infty]) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}$.

Étape 1. Pour tout $t > 0$ la fonction $u(t, \cdot)$ définie par la formule (59) appartient à $L^2(\Omega)$.

En effet, soit $t > 0$ et pour chaque $R > 0$ définissons la fonction $u_R(t, \cdot)$ par :

$$u_R(t, x) = C_s \int_0^R e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{1}{\tau^{1-s}} d\tau, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

Alors pour tout $g \in L^2(\Omega)$, par le théorème de Fubini et la formule (55) on a

$$\begin{aligned} \langle u_R(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} &= C_s \left\langle \int_0^R e^{-\tau L} L^s \varphi e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{1}{\tau^{1-s}} d\tau, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = C_s \int_0^R \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{1}{\tau^{1-s}} d\tau \\ &= C_s \int_0^R \int_0^{+\infty} e^{-\tau \lambda} \lambda^s dE_{\varphi, g}(\lambda) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{1}{\tau^{1-s}} d\tau = C_s \int_0^{+\infty} \int_0^R e^{-\tau \lambda} (\tau \lambda)^s e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{1}{\tau} d\tau dE_{\varphi, g}(\lambda), \end{aligned}$$

par le changement de variable $\tau = \frac{r}{\lambda}$ on trouve dans la dernière intégrale que

$$\langle u_R(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} = C_s \int_0^{+\infty} \int_0^{\lambda R} e^{-r} r^{s-1} e^{-\frac{t^2}{4r}} dr dE_{\varphi, g}(\lambda),$$

de cette façon on a la majoration suivante :

$$\left| \langle u_R(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} \right| \leq C_s \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{s-1} dr d|E_{\varphi, g}(\lambda)| \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)} < +\infty, \quad (61)$$

car $e^{-\frac{t^2}{4r}} \leq 1$. Cela nous montre, par dualité, que pour tout $t, R > 0$ la fonction $u_R(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ et de plus $\|u_R(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$. Maintenant, par la définition de la fonction $u_R(t, \cdot)$ on voit que

$$\lim_{R_1, R_2 \rightarrow +\infty} \langle u_{R_1}(t, \cdot) - u_{R_2}(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \text{ pour tout } g \in L^2(\Omega),$$

de cette façon, en prenant $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante dans \mathbb{R}^+ telle que $R_n \rightarrow +\infty$ et en prenant $g = u_{R_1}(t, \cdot) - u_{R_2}(t, \cdot)$, par la formule ci-dessus on voit que $(u_{R_n}(t, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et alors il existe une fonction $u(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ telle que $u_{R_n}(t, \cdot) \rightarrow u(t, \cdot)$ dans $L^2(\Omega)$.

Pour finir la preuve de l'étape 1 montrons que cette fonction $u(t, \cdot)$ s'écrit par la formule (59). En effet, pour $g \in L^2(\Omega)$, par le théorème de convergence dominée et la formule (55) on a

$$\begin{aligned} \langle u(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \langle u_R(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} = C_s \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^R e^{-\tau \lambda} (\tau \lambda)^s e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{1}{\tau} d\tau dE_{\varphi, g}(\lambda) \\ &= C_s \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = \left\langle C_s \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

alors on obtient l'égalité (59) au sens de $L^2(\Omega)$.

Étape 2. Maintenant, on va montrer la condition de type Dirichlet (58). Pour l'instant on va supposer que, pour tout $t > 0$ $u(t, \cdot) \in \text{Dom}(L)$. Soit $g \in L^2(\Omega)$, toujours par la formule (59) on a que

$$\langle u(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} = C_s \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\tau \lambda} (\tau \lambda)^s dE_{\varphi, g}(\lambda) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = C_s \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-r} r^s e^{-\frac{t^2 \lambda}{4r}} \frac{1}{r} dr dE_{\varphi, g}(\lambda),$$

par le changement de variable $\tau = \frac{r}{\lambda}$. On a vu dans la formule (61) que

$$\langle u(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} \leq C_s \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{s-1} dr d|E_{\varphi, g}(\lambda)| \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)} < +\infty,$$

ceci donne une borne uniforme sur $\langle u(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)}$ et alors, par le théorème de convergence dominée, lorsque $t \rightarrow 0^+$, on trouve que

$$\langle u(0, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle u(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} C_s \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-r} r^s e^{-\frac{t^2 \lambda}{4r}} \frac{1}{r} dr dE_{\varphi, g}(\lambda) = \langle \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Remarquons que, également par le théorème de convergence dominée, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-\tau} r^s e^{-\frac{t^2 \lambda}{4\tau}} \frac{1}{r} dr \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\tau} r^{s-1} dr = \Gamma(s) = (C_s)^{-1},$$

lorsque $t \rightarrow 0^+$. De cette façon, on a montré la condition (58) au sens de $L^2(\Omega)$.

Étape 3. La fonction u , définie par la formule (59), est deux fois différentiable par rapport à la variable t . En effet, par la formule (59) et le théorème de convergence dominée, pour tout $g \in L^2(\Omega)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \frac{u(t+h, \cdot) - u(t, \cdot)}{h}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \lim_{h \rightarrow 0} C_s \frac{1}{h} \left(\int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{(t+h)^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} - \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} C_s \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} \left(\frac{e^{-\frac{(t+h)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{t^2}{4\tau}}}{h} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\ &= \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} \partial_t \left(e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}. \end{aligned}$$

Alors on obtient l'identité suivante :

$$\langle \partial_t u(t \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle -C_s \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi \partial_t e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (62)$$

Nous voyons de plus que la fonction $\partial_t u(t, \cdot)$ définie par l'intégrale antérieure est absolument convergent au sens d'intégrale de Bochner et par le théorème d'intégration sous le signe-intégral elle est deux fois différentiable par rapport à la variable t . De cette façon on obtient que :

$$\langle \partial_t^2 u(t \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle -C_s \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi \partial_t^2 e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Étape 4. Maintenant on va montrer que la fonction $u(t, x)$, définie par la formule (59) vérifie dans $L^2(\Omega)$ l'équation (57) du problème d'extension pour φ au demi-espace.

Soit alors $g \in L^2(\Omega)$, par les deux formules précédentes on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_t^2 u(t, \cdot) + \frac{1-2s}{t} \partial_t u(t, \cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= C_s \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} \left(\partial_t^2 e^{-\frac{t^2}{4\tau}} + \frac{1-2s}{t} \partial_t e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\ &= C_s \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} \left(\frac{s-1}{\tau} + \frac{t^2}{4\tau^2} \right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\ &= C_s \underbrace{\int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} \frac{s-1}{\tau} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}}_{:= I_1} \\ &\quad + C_s \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} \frac{t^2}{4\tau^2} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, \end{aligned}$$

par une intégration par parties dans l'intégrale I_1 on trouve que

$$I_1 = - \int_0^{+\infty} \partial_\tau \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} - \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} \frac{t^2}{4\tau^2} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}},$$

de cette façon, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial_t^2 u(t, \cdot) + \frac{1-2s}{t} \partial_t u(t, \cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= -C_s \int_0^{+\infty} \partial_\tau \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= -C_s \int_0^{+\infty} \partial_\tau \left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau \lambda} \lambda^s dE_{\varphi, g}(\lambda) \right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= C_s \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\tau \lambda} \lambda^s dE_{\varphi, g}(\lambda) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\
&= C_s \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\tau \lambda} \lambda^s e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} dE_{\varphi, g}(\lambda) \\
&= C_s \int_0^{+\infty} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\tau \lambda} \lambda^s e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} dE_{\varphi, g}(\lambda) \\
&= \left\langle L \left(\int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right), g \right\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Finalement, par la formule (59) on a que

$$\left\langle \partial_t^2 u(t, \cdot) + \frac{1-2s}{t} \partial_t u(t, \cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Lu(t \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Étape 5. Finalement, on va montrer la relation qui existe entre l'action de l'opérateur L^s sur une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et le problème d'extension pour φ au demi-espace, (57)-(58).

Pour tout $g \in L^2(\Omega)$, par la formule (62), on a pour $t > 0$ fixé

$$\langle t^{1-s} \partial_t u(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} = -C_s t^{1-2s} \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} \frac{t}{2\tau} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}},$$

ensuite, par le changement de variable $\tau = \frac{t}{4r}$, dans l'intégrale ci-dessus on trouve que

$$\begin{aligned}
\langle t^{1-s} \partial_t u(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} &= C_s t^{1-2s} \int_0^{+\infty} \langle e^{-\frac{t^2}{4r} L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-r} \frac{t}{2r} \left(\frac{4r}{t^2} \right)^{1-s} dr \\
&= C_s \frac{2}{4^s} \int_0^{+\infty} \langle e^{-\frac{t^2}{4r} L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-r} r^{-s} dr,
\end{aligned}$$

comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} \langle e^{-\frac{t^2}{4r} L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)}$, par le théorème de convergence dominée on trouve dans l'expression antérieure que :

$$\begin{aligned}
\left\langle \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-2s} \partial_t u(t, \cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \langle t^{1-2s} \partial_t u(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} C_s \frac{2}{4^s} \int_0^{+\infty} \langle e^{-\frac{t^2}{4r} L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-r} r^{-s} dr \\
&= C_s \frac{2}{4^s} \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{-s} dr \langle L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle c_s L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Étape 6. Pour finir la preuve de ce théorème on va montrer que, pour tout $t > 0$, la fonction $u(t, \cdot)$ appartient à $Dom(L)$.

Pour cela, comme l'opérateur L est le générateur infinitésimal du semi-groupe $(e^{-\tau L})_{\tau>0}$ il suffit de montrer que pour tout $g \in L^2(\Omega)$ la limite suivante est bornée

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{e^{-\sigma L} u(t, \cdot) - u(t, \cdot)}{\sigma}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{e^{-\sigma L} u(t, \cdot) - u(t, \cdot)}{\sigma}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \frac{e^{-\sigma L} u(t, x) - u(t, x)}{\sigma} g(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma} g(x) \left(e^{-\sigma L} \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{g(x)}{\sigma \Gamma(s)} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+\tau)L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} - \int_0^{+\infty} e^{-\sigma L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{g(x)}{\sigma \Gamma(s)} \left(\int_0^{+\infty} \left(e^{-(\sigma+\tau)L} L^s \varphi(x) - e^{-\tau L} L^s \varphi(x) \right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{g(x)}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-(\sigma+\tau)L} L^s \varphi(x) - e^{-\tau L} L^s \varphi(x)}{\sigma} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} dx \end{aligned}$$

d'où en faisant $\sigma \rightarrow 0^+$ on a :

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} \frac{g(x)}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} -L e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} dx \quad \text{et par le théorème de Fubini} \\ &= - \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \frac{g(x)}{\Gamma(s)} L e^{-\tau L} L^s \varphi(x) dx e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, \end{aligned}$$

ensuite par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \frac{g(x)}{\Gamma(s)} L e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} e^{-\tau L} \varphi\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} e^{-\tau L} \varphi\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} + \int_1^{+\infty} \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} e^{-\tau L} \varphi\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right). \end{aligned}$$

Maintenant nous allons supposer que l'action du semi-groupe $(e^{-\tau L})_{\tau>0}$ est donnée par convolution avec un noyau suffisamment régulier K_{τ} , c'est à dire, pour tout $f \in L^2(\Omega)$ on a $e^{-\tau L} f = f * K_{\tau}$ et de cette façon dans l'expression ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} \varphi * K_{\tau}\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} + \int_1^{+\infty} \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} \varphi * K_{\tau}\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \|g\|_{L^2(\Omega)} \|L^{\frac{s}{2}+1} \varphi * L^{\frac{s}{2}} K_{\tau}\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} + \int_1^{+\infty} \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi * L^{1+s} K_{\tau}\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right) \\ &\leq \frac{\|g\|_{L^2(\Omega)}}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \|L^{\frac{s}{2}+1} \varphi\|_{L^2(\Omega)} \|L^{\frac{s}{2}} K_{\tau}\|_{L^1(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} + \int_1^{+\infty} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|L^{1+s} K_{\tau}\|_{L^1(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \right). \end{aligned}$$

Nous allons supposer également le résultat suivant par analogie avec l'opérateur Laplacien ; quitte à définir l'opérateur L de façon simple pour obtenir ces propriétés :

Lemme 4.1 ([5] Lemme 3.2). *Soit $s > 0$. Alors nous avons la majoration suivante.*

$$\|L^s K_{\tau}\|_{L^1(\Omega)} \leq C \tau^{-s}.$$

En appliquant ce lemme à l'expression ci-dessus on a que

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{e^{-\sigma L} u(t, \cdot) - u(t, \cdot)}{\sigma}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{C \|g\|_{L^2(\Omega)}}{\Gamma(s)} \left(\int_0^1 \|L^{\frac{s}{2}+1} \varphi\|_{L^2(\Omega)} \tau^{\frac{s}{2}-1} d\tau + \int_1^{+\infty} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \tau^{-2} d\tau \right) \\ &\leq \frac{C \|g\|_{L^2(\Omega)}}{\Gamma(s)} (\|L^{\frac{s}{2}+1} \varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}) < +\infty. \end{aligned}$$

On obtient donc que $u(t, \cdot)$ appartient au domaine de L et ceci termine la démonstration du théorème. ■

Nous avons montré dans ce théorème la relation qui existe entre l'opérateur de dérivation fractionnaire L^s avec $0 < s < 1$ et le problème d'extension au demi-espace. Tout au long de cette démonstration nous avons travaillé avec la solution $u(t, x)$ du problème d'extension (57)-(58) donnée par la formule (59). De la même manière que dans la Section 2 on cherche à trouver un noyau de type Poisson noté P_t^s qui nous permet d'écrire la fonction $u(t, x)$ sous la forme :

$$u(t, x) = \int_{\Omega} P_t^s(x, y) \varphi(y) dy.$$

De cette façon on recherche un noyau de type de Poisson dans le sens de la définition suivante :

Définition 4.4 (Noyau de type Poisson). *Pour tout $s \in]0, 1[$ et $t > 0$ une fonction $P_t^s(x, y)$ telle que pour tout $y \in \Omega$ fixé $P_t^s(\cdot, y) \in L^2(\Omega)$ et qui vérifie au sens de $L^2(\Omega)$ l'équation (57) :*

$$\partial_t^2 P_t^s(x, y) + \frac{1-2s}{t} \partial_t P_t^s(x, y) - L P_t^s(x, y) = 0,$$

c'est à dire, pour tout $g \in L^2(\Omega)$ on a que

$$\left\langle \partial_t^2 P_t^s(\cdot, y) + \frac{1-2s}{t} \partial_t P_t^s(\cdot, y) - L P_t^s(\cdot, y), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$$

et de plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ la limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \langle P_t^s(x, \cdot), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \varphi(x)$ a lieu pour presque tout $x \in \Omega$, est nommée un noyau de type Poisson.

Rappelons que dans la Section 2 pour trouver le noyau de type Poisson noté P_a (voir Définition 2.3) tout d'abord on a trouvé une solution classique de l'équation du problème d'extension (23)-(24) :

$$\partial_t^2 u(t, x) + \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0, \quad \text{avec } -1 < a < 1,$$

notée par Q_a et ensuite, à l'aide de l'équation conjugué $\partial_t^2 u(t, x) - \frac{a}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0$, on en a déduit le noyau de type Poisson recherché et on a pu écrire des solutions du problème d'extension (23)-(24) sous la forme

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_a(t, x - y) \varphi(y) dy.$$

Dans ce cadre, pour trouver le noyau de type Poisson P_t^s nous raisonnerons d'une manière similaire, c'est à dire, d'abord nous trouverons des solutions, qui appartiennent à $L^2(\Omega)$, de l'équation du problème d'extension (57)-(58) :

$$\partial_t^2 u(t, x) + \frac{1-2s}{t} \partial_t u(t, x) - L u(t, x) = 0, \quad \text{avec } 0 < s < 1$$

et ensuite, à l'aide de son équation conjuguée définie par la formule :

$$\partial_t^2 u(t, x) - \frac{1-2s}{t} \partial_t u(t, x) - L u(t, x) = 0, \tag{63}$$

on en déduira le noyau de type Poisson P_t^s .

Avant de commencer nous faisons les suppositions suivantes :

- (a) L'action du semi-groupe $(e^{-\tau L})_{\tau>0}$ générée par l'opérateur L est donnée par convolution avec un noyau non-négatif $K_\tau(x, y)$, c'est à dire, pour tout $f \in L^2(\Omega)$ on a

$$e^{-\tau L}f(x) = \int_{\Omega} K_\tau(x, y)f(y)dy, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

Remarquons que comme l'opérateur $e^{-\tau L}$ est auto-adjoint alors $K_\tau(x, y) = K_\tau(y, x)$.

- (b) Ce noyau $K_\tau(x, y)$ appartient au domaine de l'opérateur L et de plus il vérifie l'équation $\partial_\tau K_\tau(x, y) = -LK_\tau(x, y)$ pour tout $x, y \in \Omega$. En particulier, par le théorème de dérivation sous le signe intégrale cela implique que

$$\partial_\tau \int_{\Omega} K_\tau(x, y)f(y)dy = \int_{\Omega} \partial_\tau K_\tau(x, y)f(y)dy \quad \text{pour tout } f \in L^2(\Omega).$$

- (c) Pour $x \in \Omega$ fixé il existe une constante positive C_x et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\|K_\tau(x, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_\tau K_\tau(x, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_x \frac{(1 + \tau^\varepsilon)}{\tau^\varepsilon}.$$

Avant de continuer, il convient de donner un exemple d'un tel opérateur qui vérifie les hypothèses précédents. Motivés par la Section 2 il est naturel de prendre comme exemple $L = -\Delta$ avec $\Omega = \mathbb{R}^n$ l'espace tout entier. Dans ce cas il est connu que l'action du semi-groupe $(e^{\tau\Delta})_{\tau>0}$ est donnée par la convolution avec le noyau de la chaleur $h_\tau(x) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4\tau}}$, qui pour tout $\tau > 0$ est solution au sens classique de l'équation de la chaleur $\partial_t u - \Delta_x u = 0$. De cette façon, en prenant $K_\tau(x, y) = h_\tau(x - y)$ on vérifie sans problème les hypothèses (i) et (ii). De plus, comme $\|h_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = C\tau^{-\frac{n}{4}}$ et $\|\partial_\tau h_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\tau^{-(1+\frac{n}{4})}$ on a alors que $\|K_\tau(x, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_\tau K_\tau(x, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\tau^{-\frac{n}{4}}(1 + \tau^{-1})$.

On voit bien comment cette section généralise le cadre exposé dans la section 2.

Afin de rechercher le noyau de Poisson P_t^s , tout d'abord nous allons caractériser les solutions dans $L^2(\Omega)$ de l'équation (57) dans la proposition suivante :

Proposition 4.1. *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 < s < 1$, et $x \in \Omega$ fixé. Alors la fonction*

$$Q_x^s(t, y) = C_s \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \quad \text{pour tout } (t, y) \in]0, +\infty[\times \Omega \quad (64)$$

et avec la constante $C_s = \frac{1}{\Gamma(s)}$ vérifie :

(i) $Q_x^s(t, y) = Q_y^s(t, x)$, pour tout $x, y \in \Omega$.

(ii) Pour tout $t > 0$, $Q_x^s(t, \cdot)$ appartient à $L^2(\Omega)$ et vérifie l'équation $\partial_t^2 Q_x^s(t, y) + \frac{1-2s}{t} \partial_t Q_x^s(t, y) - LQ_x^s(t, y) = 0$ au sens de $L^2(\Omega)$, c'est à dire, pour tout $g \in L^2(\Omega)$ on a que

$$\left\langle \partial_t^2 Q_x^s(t, \cdot) + \frac{1-2s}{t} \partial_t Q_x^s(t, \cdot) - LQ_x^s(t, \cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

(iii) Si $x \in \text{Dom}(\varphi)$ alors on a que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{1}{2s} t^{1-2s} \partial_t Q_x^s(t, \cdot), \varphi \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{\Gamma(-s)}{4s\Gamma(s)} \varphi(x). \quad (65)$$

Preuve. La propriété (i) est évidente car on a que $K_\tau(x, y) = K_\tau(y, x)$. Montrons alors la propriété (ii). De même façon que l'étape 1 de la démonstration du Théorème 4.3, pour $x \in \Omega$ fixé et tout $g \in L^2(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\langle C_s \int_0^R K_\tau(x, \cdot) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle C_s \int_0^{+\infty} K_\tau(x, \cdot) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ & = C_s \int_0^{+\infty} \langle K_\tau(x, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = C_s \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} g(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} < +\infty. \end{aligned}$$

Cela montre que la fonction $Q_x^s(t, \cdot)$ appartient à $L^2(\Omega)$. Vérifions maintenant que la fonction $Q_x^s(t, \cdot)$ est une solution au sens de $L^2(\Omega)$ de l'équation (57), c'est à dire, pour tout $g \in L^2(\Omega)$ nous allons montrer l'identité

$$\left\langle \partial_t^2 Q_x^s(t, \cdot) + \frac{1-2s}{t} \partial_t Q_x^s(t, \cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle LQ_x^s(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_t^2 Q_x^s(t, \cdot) + \frac{1-2s}{t} \partial_t Q_x^s(t, \cdot), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= C_s \int_0^{+\infty} \langle K_\tau(x, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} \left(\partial_t^2 e^{-\frac{t^2}{4\tau}} + \frac{1-2s}{t} \partial_t e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \right) \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\ &= \underbrace{C_s \int_0^{+\infty} \langle K_\tau(x, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} \left(\frac{s-1}{t} + \frac{t^2}{4\tau} \right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}}_{:=I}, \end{aligned}$$

ensuite, par une intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} I &= -C_s \int_0^{+\infty} \partial_\tau \left(\langle K_\tau(x, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} \right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = -C_s \int_0^{+\infty} \langle \partial_\tau K_\tau(x, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\ &= C_s \int_0^{+\infty} \langle LK_\tau(x, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = C_s \int_0^{+\infty} \langle LK_\tau(x, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\ &= \langle LQ_x^s(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ceci montre (ii). Montrons maintenant (iii). Soit $x \in \text{Dom}(\varphi)$, alors par la définition de la fonction $Q_x^s(t, \cdot)$ et le théorème de dérivation sous le signe somme on a que

$$\begin{aligned} \frac{t^{1-2s}}{2s} \partial_t Q_x^s(t, y) &= \frac{t^{1-2s} C_s}{2s} \partial_t \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} = \frac{t^{1-2s} C_s}{2s} \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) \partial_t e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}} \\ &= -\frac{C_s}{4s} \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \left(\frac{t^2}{\tau} \right)^{1-s} \frac{d\tau}{\tau}, \end{aligned}$$

ensuite, par le changement de variable $\tau = \frac{t^2}{4r}$, on obtient que

$$-\frac{C_s}{4s} \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \left(\frac{t^2}{\tau} \right)^{1-s} \frac{d\tau}{\tau} = -\frac{C_s}{4^s s} \int_0^{+\infty} K_{\frac{t^2}{4r}}(x, y) e^{-r} \frac{dr}{r^s},$$

et alors, par l'identité ci-dessus on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{1}{2s} t^{1-2s} \partial_t Q_x^s(t, \cdot), \varphi \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= -\frac{C_s}{4^s s} \int_0^{+\infty} \left\langle K_{\frac{t^2}{4r}}(x, \cdot), \varphi \right\rangle_{L^2(\Omega)} e^{-r} \frac{dr}{r^s} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{C_s}{4^s s} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4r} L} \varphi(x) e^{-r} \frac{dr}{r^s} = -\frac{C_s}{4^s s} \varphi(x) \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{-s} dr \\ &= -\frac{\Gamma(1-s)}{4^s s \Gamma(s)} \varphi(x). \end{aligned}$$

Finalement, par l'identité $\Gamma(-s) = -\frac{\Gamma(1-s)}{s}$ on conclut que $-\frac{\Gamma(1-s)}{4^s s \Gamma(s)} f(x) = \frac{\Gamma(-s)}{4^s \Gamma(s)} f(x)$ et de cette façon on a bien montré la propriété (iii). ■

Dans le cadre du Laplacien Fractionnaire $(-\Delta)^s$ la relation qui existe entre l'équation du problème d'extension :

$$\partial_t^2 u(t, x) + \frac{1-2s}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_x u(t, x) = 0$$

et son équation conjuguée (voir Lemme 2.1) est généralisée rapidement au cadre de l'opérateur L^s , plus précisément on a le lemme suivant :

Lemme 4.2. Soit $0 < s < 1$. Si $u \in L^2(\Omega)$ est une solution au sens de $L^2(\Omega)$ de l'équation du problème d'extension :

$$\partial_t^2 u(t, y) + \frac{1-2s}{t} \partial_t u(t, y) - Lu(t, y) = 0,$$

alors la fonction $v = t^{1-2s} \partial_t u$ est une solution au sens de $L^2(\Omega)$ de l'équation conjuguée :

$$\partial_t^2 v(t, y) - \frac{1-2s}{t} \partial_t v(t, y) - Lv(t, y) = 0.$$

Inversement, si $v \in L^2(\Omega)$ est une solution au sens de $L^2(\Omega)$ de l'équation conjuguée alors la fonction $u = -t^{-(1-2s)} \partial_t v$ est une solution au sens de $L^2(\Omega)$ de l'équation du problème d'extension.

Preuve. Cette preuve suit le même schéma du Lemme 2.1 avec $a = 1 - 2s$. En effet, si $u \in L^2(\Omega)$ est une solution de l'équation du problème d'extension alors pour tout $g \in L^2(\Omega)$ on a que :

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_t^2 v - \frac{1-2s}{t} \partial_t v - Lv, g \right\rangle_{L^2(\Omega)} &= \left\langle -\partial_t^2 (t^{1-2s} \partial_t u) - \frac{1-2s}{t} \partial_t (t^{1-2s} \partial_t u) - L(t^{1-2s} \partial_t u), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\langle t^{1-2s} \partial_t \left(\partial_t^2 u + \frac{1-2s}{t} \partial_t u - Lu \right), g \right\rangle_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

La preuve de la relation inverse est analogue. ■

Maintenant nous avons les outils nécessaires pour trouver le noyau de type Poisson P_t^s dans le sens de la Définition 4.4. Tout d'abord on regarde la solution $Q_x^{1-s}(t, y)$ au sens de $L^2(\Omega)$ de l'équation conjuguée

$$\partial_t^2 v(t, y) - \frac{1-2s}{t} \partial_t v(t, y) - Lv(t, y) = 0$$

qui est donnée par la Proposition 4.1 en prenant la puissance $1 - s$. En effet dans ce cas on obtient que $1 - 2(1 - s) = -(1 - 2s)$ et de cette façon on récupère l'expression $-\frac{1-2s}{t}$ qui caractérise cette équation. Ensuite, par le Lemme 4.2 on récupère une solution de l'équation du problème d'extension

$$\partial_t^2 v(t, y) + \frac{1-2s}{t} \partial_t v(t, y) - Lv(t, y) = 0,$$

donnée par l'expression $-t^{-(1-2s)} \partial_t Q_x^{1-s}(t, y)$. Comme cette équation est linéaire on sait que la fonction $t^{-(1-2s)} \partial_t Q_x^{1-s}(t, y)$ est aussi une solution. Finalement, motivés par la propriété (iii) de la Proposition 4.1 avec la puissance $1 - s$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left\langle \frac{1}{2(1-s)} t^{-(1-2s)} \partial_t Q_x^{1-s}(t, \cdot), \varphi \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{\Gamma(-(1-s))}{4^{1-s} \Gamma(1-s)} \varphi(x) \text{ on définit la fonction } P_t^s \text{ par :}$$

$$P_t^s(x, y) = C(s) t^{-(1-2s)} \partial_t Q_x^{1-s}(t, y),$$

$$\text{avec la constante } C(s) = \frac{4^{1-s} \Gamma(1-s)}{\Gamma(-(1-s)) 2(1-s)}.$$

Le théorème suivant nous montre que la fonction P_t^s définie ci-dessus est en effet le noyau de type Poisson recherché et de plus, il nous montre les propriétés principales de cette fonction. Néanmoins, avant de continuer il convient de donner une expression explicite de la fonction $P_t^s(x, y)$. En calculant la dérivée par rapport au temps de la fonction Q_x^{1-s} on obtient que :

$$\begin{aligned} P_t^s(x, y) &= C(s) t^{-(1-2s)} \partial_t Q_x^{1-s}(t, y) = C(s) t^{-1+2s} C_{1-s} \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) \partial_t e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^s} \\ &= -C(s) \frac{t^{2s}}{2\Gamma(1-s)} \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} \end{aligned}$$

$$\text{et donc } P_t^s(x, y) = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}}.$$

Nous avons alors le théorème :

Théorème 4.4. Pour $0 < s < 1$ la fonction

$$P_t^s(x, y) = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}}$$

est telle que :

(i) Pour tout $y \in \Omega$ fixé la fonction $P_t^s(\cdot, y)$ appartient à $L^2(\Omega)$ et vérifie l'équation

$$\partial_t^2 P_t^s(x, y) + \frac{1-2s}{t} \partial_t P_t^s(x, y) - L P_t^s(x, y) = 0$$

pour presque tout $x \in \Omega$.

(ii) Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ la limite $\lim_{t \rightarrow 0^+} \langle P_t^s(x, \cdot), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \varphi(x)$ a lieu pour presque tout $x \in \Omega$.

(iii) Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ la solution du problème d'extension, (57)-(58) $u(t, x)$ donnée par la formule

$$u(t, x) = C_s \int_0^{+\infty} e^{-\tau L} L^s \varphi(x) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1-s}}$$

s'écrit sous la forme :

$$u(t, x) = \int_\Omega P_t^s(x, y) \varphi(y) dy, \quad \text{pour tout } t > 0 \text{ et pour presque tout } x \in \Omega.$$

Et de plus, $\sup_{t>0} |u(t, x)| \leq \sup_{\tau>0} |e^{-\tau L} \varphi(x)|$, pour presque tout $x \in \Omega$.

Démonstration. (i) Soit $y \in \Omega$ alors par l'hypothèse (c) faite sur le noyau $K_\tau(x, y) : \|K_\tau(\cdot, y)\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_\tau K_\tau(\cdot, y)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_y \frac{(1+\tau^\varepsilon)}{\tau^\varepsilon}$ on a la majoration

$$\|P_t^s(\cdot, y)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \|K_\tau(\cdot, y)\|_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} \leq C_y \int_0^{+\infty} (1+\tau^\varepsilon) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s+\varepsilon}}$$

de cette façon, pour montrer que $P_t^s(\cdot, y) \in L^2(\Omega)$ il suffit de montrer que la dernière intégrale ci-dessus converge. En effet, on a par le changement de variables $\tau = \frac{t^2}{4r}$ que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (1+\tau)^\varepsilon e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s+\varepsilon}} &= \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^{2\varepsilon}}{(4r)^\varepsilon}\right) e^{-r} r^{s+\varepsilon-1} dr = \int_0^1 \left(1 + \frac{t^{2\varepsilon}}{(4r)^\varepsilon}\right) e^{-r} r^{s+\varepsilon-1} dr \\ &+ \int_1^{+\infty} \left(1 + \frac{t^{2\varepsilon}}{(4r)^\varepsilon}\right) e^{-r} r^{s+\varepsilon-1} dr = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

comme $\Gamma(s+\varepsilon) = \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{s+\varepsilon-1} dr < +\infty$ et $0 < s < 1$ on a alors que $I_1 = \int_0^1 e^{-r} r^{s+\varepsilon-1} dr + \frac{t^{2\varepsilon}}{4^\varepsilon} \int_0^1 e^{-r} r^{s-1} dr < +\infty$

et de même, $I_2 \leq \int_1^{+\infty} e^{-r} r^{s+\varepsilon-1} dr < \Gamma(s+\varepsilon) < +\infty$.

D'autre part, comme l'opérateur $e^{-\sigma L}$ avec $\sigma > 0$ est un opérateur linéaire borné sur $L^2(\Omega)$ on a que

$$e^{-\sigma L} P_t^s(\cdot, y) = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma L} K_\tau(\cdot, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}}, \text{ d'où}$$

$$\frac{e^{-\sigma L} P_t^s(\cdot, y) - P_t^s(\cdot, y)}{\sigma} = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sigma L} K_\tau(\cdot, y) - K_t(\cdot, y)}{\sigma} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}}. \quad (66)$$

Alors par le théorème des accroissements finis il existe $\theta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{e^{-\sigma L} P_t^s(\cdot, y) - P_t^s(\cdot, y)}{\sigma} \right\|_{L^2(\Omega)} &= \|L e^{-\theta L} K_\tau(\cdot, y)\|_{L^2(\Omega)} = \|e^{-\theta L} L K_\tau(\cdot, y)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|L K_\tau(\cdot, y)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\partial_\tau K_\tau(\cdot, y)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_y (1+\tau^\varepsilon) \tau^{-\varepsilon} \end{aligned}$$

et alors on obtient une borne uniforme dans σ , de cette façon par le théorème de convergence dominée (pour les intégrales au sens de Bochner) on a dans la formule (66), lorsque $\sigma \rightarrow 0^+$, que

$$-LP_t^s(\cdot, y) = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \partial_\tau (K_\tau(\cdot, y)) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}}.$$

Maintenant nous disposons des outils nécessaires pour montrer que la fonction $P_t^s(x, y)$ vérifie l'équation (57) pour presque tout $x \in \Omega$. En effet, par le théorème de convergence dominée, les dérivées par rapport à t de la fonction $P_t^s(x, y)$ peuvent être calculées comme dérivation sous le signe intégral et de plus, par une intégration par parties, on a alors que

$$\begin{aligned} \partial_t^2 P_t^s(x, y) + \frac{1-2s}{t} \partial_t P_t^s(x, y) &= \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) \left(\frac{t^2}{4\tau^2} - \frac{1+s}{\tau} \right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} \\ &= -\frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \partial_\tau K_\tau(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = LP_t^s(x, y). \end{aligned}$$

De cette façon on conclut la preuve du point (i) de ce théorème.

(ii) Pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ comme $P_t^s(x, y) = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} K_\tau(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = C(s) t^{-(1-2s)} \partial_t Q_x^{1-s}(t, y)$, avec la constante $C(s) = \frac{4^{1-s} \Gamma(1-s)}{\Gamma(-(1-s)) 2(1-s)}$ par la propriété (iii) de la Proposition 4.1 on vérifie immédiatement que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \langle P_t^s(x, \cdot), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \varphi(x),$$

pour tout $x \in \text{Dom}(\varphi)$.

(iii) Pour montrer que la solution du problème d'extension $u(t, x)$ s'écrit sous la forme $u(t, x) = \int_\Omega P_t^s(x, y) \varphi(y) dy$ tout d'abord nous allons montrer que

$$u(t, x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} e^{-\tau L} \varphi(x) \frac{d\tau}{\tau^{1+s}}.$$

En effet, pour $g \in L^2(\Omega)$ par la formule (59) on a que

$$\langle u(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \langle e^{-\tau L} L^s \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\tau \lambda} (\tau \lambda)^s dE_{\varphi, g}(\lambda) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau}}_{:=I},$$

ensuite, par le changement de variables $\lambda \tau = \frac{t^2}{4r}$ on obtient dans l'intégrale ci-dessus que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4r}} \left(\frac{t^2}{4r} \right)^s dE_{\varphi, g}(\lambda) e^{-r\lambda} \frac{dr}{r} = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4r}} e^{-r\lambda} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} dE_{\varphi, g}(\lambda) \\ &= \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-r\lambda} dE_{\varphi, g}(\lambda) e^{-\frac{t^2}{4r}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \langle e^{-rL} \varphi, g \rangle_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{t^2}{4r}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} \end{aligned}$$

et en retournant à la variable τ dans la dernière intégrale ci-dessus on trouve que

$$\langle u(t, \cdot), g \rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} e^{-\tau L} \varphi \frac{d\tau}{\tau^{1+s}}, g \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

et de cette façon pour presque tout $x \in \Omega$ on a

$$u(t, x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} e^{-\tau L} \varphi(x) \frac{d\tau}{\tau^{1+s}}.$$

Cette identité nous permet d'écrire la fonction $u(t, x)$ sous la forme énoncée dans la propriété (iii) de ce théorème. En effet, comme $e^{-\tau L}\varphi(x) = \int_{\Omega} K_{\tau}(x, y)\varphi(y)dy$ dans l'identité ci-dessus on obtient pour tout $t > 0$ et pour presque tout $x \in \Omega$ que

$$u(t, x) = \frac{t^2}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \left(\int_{\Omega} K_{\tau}(x, y)\varphi(y)dy \right) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = \int_{\Omega} \frac{t^2}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} K_{\tau}(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} \varphi(y)dy = \int_{\Omega} P_t^s(x, y)\varphi(y)dy.$$

Finalement, montrons que pour presque tout $x \in \Omega$ on a la majoration $\sup_{t>0} |u(t, x)| \leq \sup_{\tau>0} |e^{-\tau L}\varphi(x)|$. Nous avons

montré que $u(t, x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\tau}} e^{-\tau\varphi} \varphi(x) \frac{d\tau}{\tau^{1+s}}$, alors par le changement de variable $r = \frac{t^2}{4\tau}$ on obtient dans l'expression ci-dessus que

$$u(t, x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4r}} L\varphi(x) e^{-r} \frac{dr}{r^{1-s}},$$

d'où pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $t > 0$ on a la majoration

$$|u(t, x)| \leq \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \left| e^{-\frac{t^2}{4r}} \varphi(x) \right| e^{-r} \frac{dr}{r^{1-s}} \leq \frac{1}{\Gamma(s)} \sup_{\tau>0} |e^{-\tau L}\varphi(x)| \int_0^{+\infty} e^{-r} r^{s-1} dr = \sup_{\tau>0} |e^{-\tau L}\varphi(x)|$$

et de cette façon on conclut la démonstration de ce théorème. ■

Pour terminer cette section, nous allons montrer comme annoncé que le Théorème 4.3 est une généralisation du Théorème 2.1, plus précisément, en prenant $L = -\Delta$ et $\Omega = \mathbb{R}^n$ l'espace tout entier nous allons montrer qu'on récupère le noyau de type Poisson trouvé dans la Section 2 donné par la formule

$$P_a(t, x) = \frac{t^{1-a}}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1-a}{2}}}$$

avec $-1 < a < 1$. En effet, tout d'abord par le changement de variable utilisé dans la Section 2 $s = \frac{1-a}{2}$ on obtient dans la formule ci-dessus que

$$P_{1-2s}(t, x) = \frac{t^{2s}}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+2s}{2}}}.$$

Ensuite, comme l'action du semi-groupe $(e^{\tau\Delta})_{\tau>0}$ est donné par convolution avec le noyau $K_{\tau}(x, y) = h_{\tau}(x - y) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\tau}}$ par la formule du noyau $P_t^s(x, y)$ qu'on a en déduit antérieurement on a alors

$$P_t^s(x, y) = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} K_{\tau}(x, y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} h_{\tau}(x - y) e^{-\frac{t^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}} = \frac{t^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{t^2+|x-y|^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}},$$

maintenant par le changement de variable $r = \frac{t^2+|x-y|^2}{4\tau}$ on obtient dans l'expression ci-dessus que

$$P_t^s(x, y) = C_2(s) \frac{t^{2s}}{(t^2 + |x - y|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} = C_2(s) P_{1-2s}(t, x - y)$$

avec la constante $C_2(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + s\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(s)}$ et de cette façon, on récupère le noyau de type Poisson $P_{1-2s}(t, x - y)$ trouvé dans la Section 2.

4.2 L'opérateur Laplacien Fractionnaire sur les variétés non compactes

Dans cette section nous allons exposer les résultats développés dans l'article [1] *Some Constructions for the Fractional Laplacian on Noncompact Manifolds* sur la relation entre l'opérateur Laplacien Fractionnaire et un problème

d'extension au demi-espace. Jusqu'à présent nous avons montré cette relation (Théorèmes 2.1 et 4.3) dans le cadre de l'espace \mathbb{R}^n doté de la norme euclidienne $|\cdot|$. Motivés par le Théorème 2.1 les auteurs de cet article montrent comment cette relation entre le Laplacien Fractionnaire et le problème d'extension est généralisée au cadre des variétés n -dimensionnelles non compactes dotées d'une métrique Riemannienne, en commençant par un cas plus simple donné par l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n qui est défini ci-dessous.

L'objectif est de construire l'opérateur Laplacien Fractionnaire sur les variétés à travers d'un problème d'extension au demi-espace du même type que celui étudié tout au long de la Section 2 (voir Définition 2.1).

En suivant le travail réalisé dans [1] nous commencerons cette brève exposition où le Laplacien Fractionnaire est défini sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n (voir [1] Section 2). Cet espace est un exemple simple d'une variété non compacte avec une métrique Riemannienne et est défini comme la branche supérieure d'un hyperboloïde dans \mathbb{R}^{n+1} , plus précisément on a :

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 = 1 \text{ et } x_0 > 0\},$$

ou de façon équivalent on a

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (\cosh(r), \sinh(r)\theta), \text{ avec } r \geq 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

L'espace \mathbb{H}^n est doté de la métrique $d_{\mathbb{H}^n} = dr^2 + \sinh^2 r d\sigma^2$, où $d\sigma^2$ dénote la métrique sur la sphère dans \mathbb{R}^n de centre l'origine et rayon 1 \mathbb{S}^{n-1} . De plus $d_h x := \sinh^{n-1} r dr d\sigma$ dénote l'élément de volume dans \mathbb{H}^n .

Avec ces définitions l'opérateur Laplacien sur l'espace \mathbb{H}^n également nommé l'opérateur de Laplace-Beltrami dans la littérature est donné par la formule

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \partial_r^2 + (n-1) \frac{\cosh(r)}{\sinh(r)} \partial_r + \Delta_\theta,$$

où Δ_θ dénote l'opérateur Laplacien sur la sphère \mathbb{S}^{n-1} .

Le choix de l'espace \mathbb{H}^n comme une première approche de la généralisation du Théorème 2.1 aux variétés Riemanniennes est justifié par le fait que dans cet espace, doté du produit intérieur

$$[x, y] = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_n y_n, \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{H}^n,$$

des outils d'analyse harmonique comme la transformation de Fourier sont définis et par conséquent on peut trouver une première définition de l'opérateur Laplacien Fractionnaire sur \mathbb{H}^n , noté $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$, au niveau de Fourier de façon analogue à la définition de l'opérateur $(-\Delta)^s$ sur \mathbb{R}^n au niveau de Fourier donné par l'expression $\widehat{(-\Delta)^s \varphi}(\xi) = C |\xi|^{2s} \widehat{\varphi}(\xi)$. De cette façon, par analogie au espace euclidien \mathbb{R}^{n+1} , pour $f \in L^2(\mathbb{H}^n)$ et $\xi = (r, \theta) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, on définit la transformation de Fourier de la fonction f par :

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(r, \theta) = \int_{\mathbb{H}^n} f(x) e_{r, \theta}(x) d_h(x),$$

où pour tout $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ fixés, la fonction $e(r, \theta)(x) = [x, (1, \theta)]^{ir - \frac{n-1}{2}}$ vérifie au sens classique l'équation

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} e_{r, \theta} = - \left(r^2 + \frac{(n-1)^2}{4} \right) e_{r, \theta}.$$

Par le théorème d'intégration par parties on montre que

$$\widehat{-\Delta_{\mathbb{H}^n} f}(r, \theta) = \left(r^2 + \frac{(n-1)^2}{4} \right) \widehat{f}(r, \theta), \text{ pour tout } r \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in \mathbb{S}^{n-1}$$

et de cette façon en utilisant la transformation de Fourier sur l'espace \mathbb{H}^n on définit les puissances fractionnaires de l'opérateur $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ au niveau de Fourier de la façon suivante :

Définition 4.5 (Laplacien Fractionnaire sur \mathbb{H}^n au niveau de Fourier). Soit $0 < s < 1$. L'action de l'opérateur $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$ sur une fonction $f \in L^2(\mathbb{H}^n)$ au niveau de Fourier est donnée par la formule :

$$((-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s f)^\wedge(r, \theta) = \left(r^2 + \frac{(n-1)^2}{4} \right)^s \widehat{f}(r, \theta), \quad (67)$$

pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^{n+1}$, où $r \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Maintenant avec la métrique $d = d_{\mathbb{H}^n} + dt^2$ définie sur l'espace $[0, +\infty[\times \mathbb{H}^n$ pour $f \in H^s(\mathbb{H}^n)$ avec $0 < s < 1$ on considère le problème d'extension au demi-espace :

$$\partial_t^2 u(t, x) + \frac{1-2s}{t} \partial_t u(t, x) + \Delta_{\mathbb{H}^n} u(t, x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{H}^n \text{ et } t > 0 \quad (68)$$

$$u(0, x) = f(x). \quad (69)$$

De même façon que la Section 2.3, en prenant la transformation de Fourier par rapport à la variable $x \in \mathbb{H}^n$ on montre qu'il existe une unique solution classique $\widehat{u}(t, r, \theta)$ du problème :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \widehat{u}(t, r, \theta) + \frac{1-2s}{t} \partial_t \widehat{u}(t, r, \theta) - \left(r^2 + \frac{(n-1)^2}{4} \right) \widehat{u}(t, r, \theta) = 0, & t > 0 \\ \widehat{u}(0, r, \theta) = \widehat{f}(r, \theta), \end{cases}$$

pour chaque $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ fixé. De plus, la relation entre l'action de l'opérateur $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$ sur une fonction $f \in H^s(\mathbb{H}^n)$ et le problème d'extension au demi-espace pour f , (68)-(69), est montrée au niveau de Fourier dans le théorème suivant :

Théorème 4.5 ([1], Section 2.3). Soit $f \in H^s(\mathbb{H}^n)$ et $\widehat{u}(t, r, \theta)$ la solution classique du problème d'extension pour f au niveau de Fourier

$$\begin{cases} \partial_t^2 \widehat{u}(t, r, \theta) + \frac{1-2s}{t} \partial_t \widehat{u}(t, r, \theta) - \left(r^2 + \frac{(n-1)^2}{4} \right) \widehat{u}(t, r, \theta) = 0, & t > 0 \\ \widehat{u}(0, r, \theta) = \widehat{f}(r, \theta). \end{cases}$$

Alors on a l'identité

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-2s} \partial_t \widehat{u}(t, r, \theta) = -C_s \left(r^2 + \frac{(n-1)^2}{4} \right)^s \widehat{f}(r, \theta), \quad \text{pour tout } (r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}, \quad (70)$$

avec une constante C_s positive qui ne dépend que de s .

Pour l'instant on a deux définitions équivalents de l'opérateur $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$ avec $0 < s < 1$ au niveau de Fourier données par les expressions (67) et (70) et une définition de cet opérateur dans la variable réelle $x \in \mathbb{H}^n$ est désirable. Dans le cadre de la transformation de Fourier sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n , pour $f \in L^2(\mathbb{H}^n)$ la formule d'inversion suivante a lieu :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \bar{e}_{r, \theta}(x) \widehat{f}(r, \theta) d\theta \frac{dr}{|c(r)|^2},$$

avec $c(r)$ le coefficient de Harish-Chandra (voir [1] Section 2.2). De cette façon, à l'aide de la relation (70) une définition de l'opérateur $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$ dans la variable $x \in \mathbb{H}^n$ est déduite dans le théorème suivant :

Théorème 4.6 ([1], Section 2.2). Soit $0 < s < 1$. Pour $f \in L^1(\mathbb{H}^n) \cap C^\sigma(\mathbb{H}^n)$ avec $\sigma > 2s$ on a :

$$(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s f(x) = vp \int_{\mathbb{H}^n} (f(x) - f(y)) \mathcal{K}_s(d_{\mathbb{H}^n}(x, y)) d_h y, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{H}^n. \quad (71)$$

Dans ce théorème le noyau \mathcal{K}_s est une fonction positive définie sur $]0, +\infty[$ qui a le comportement asymptotique suivant (voir [1], équation 2.3 et Théorème 2.4) :

$$\begin{aligned} \text{lorsque } z \rightarrow 0^+, \quad \mathcal{K}_s(z) &\sim \frac{1}{z^{n+2s}} \\ \text{lorsque } z \rightarrow +\infty, \quad \mathcal{K}_s(z) &\sim \frac{e^{-(n-1)s}}{z^{1+s}}. \end{aligned}$$

Remarque 4.4. *Il est important de remarquer que la définition de l'opérateur $(-\Delta_{\mathbb{H}^n})^s$, dans la variable $x \in \mathbb{H}^n$, donnée par l'expression (71) est une conséquence de la relation qui existe entre cet opérateur et le problème d'extension exprimée par la formule (70). En revanche, pour l'opérateur Laplacien Fractionnaire sur l'espace \mathbb{R}^n $(-\Delta)^s$ nous avons vu comment la définition, déjà connue, de cet opérateur à travers d'une intégrale singulière (voir la formule (??)) peut être récupérée à travers du problème au demi-espace.*

5 Annexe

Dans cet annexe nous donnons les preuves de quelques résultats connus utilisés tout au long du mémoire.

5.1 Des résultats utilisés pour étudier l'opérateur Laplacien Fractionnaire

Preuve de la Proposition ??. Pour $z \in \mathbb{C}$ nous avons au sens des distributions l'identité

$$\widehat{\Phi}_z = \Phi_{-(n+z)}.$$

Nous donnerons la preuve pour le cas $Re(z) > -n$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nous allons montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = C(n, z) \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-(n+z)} \varphi(x) dx,$$

avec une constante $C(n, z)$ que l'on donnera après. En changeant à des coordonnées polaires dans la variable de fréquence $\xi = \rho \sigma$ où $\rho \in [0, +\infty[$ et $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_0^\infty \rho^{z+n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \widehat{\varphi}(\rho\sigma) d\sigma d\rho = \int_0^\infty \rho^{z+n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \rho \sigma \cdot x} \widehat{\varphi}(x) dx d\sigma d\rho,$$

maintenant, par le changement à des coordonnées polaires dans la variable réelle $x = r \theta$ ($r \in [0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$) et par le Théorème de Fubini on obtient dans la dernière intégrale de la formule précédente que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = \int_0^\infty \rho^{z+n-1} r^{n-1} \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\theta) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i \rho \sigma \cdot r\theta} d\sigma \right) d\theta dr d\rho. \quad (72)$$

Notons $\omega(t) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i t(\sigma \cdot \theta)} d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i t \sigma_1} d\sigma$, donc, on trouve que $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i \rho \sigma \cdot r\theta} d\sigma = \omega(\rho r)$ est indépendant de θ , alors, dans la formule (72) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^z \widehat{\varphi}(\xi) d\xi &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \rho^{z+n-1} \omega(\rho r) d\rho \right) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\theta) d\theta r^{n-1} \right) dr \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty r^{-(z+n)+1} (r\rho)^{z+n-1} \omega(\rho r) d\rho \right) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\theta) d\theta r^{n-1} \right) dr \\ &= \int_0^\infty r^{-(z+n)} \left(\int_0^\infty (r\rho)^{z+n-1} \omega(\rho r) d(r\rho) \right) \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(r\theta) d\theta r^{n-1} \right) dr \\ &= C(n, z) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x)}{|x|^{z+n}} dx, \end{aligned}$$

avec

$$C(n, z) = \int_0^\infty t^{z+n-1} \omega(t) dt. \quad \blacksquare$$

Lemme 5.1 (Formule de quotient différentiel [6], Section 3). *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < s < 1$. Alors*

$$(-\Delta)^s \varphi(x) = C_2(n, s) \text{vp} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = -\frac{1}{2} C_2(n, s) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x)}{|y|^{n+2s}} dy, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{avec la constante } C_2(n, s) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(y_1)}{|y|^{n+2s}} dy \right)^{-1}.$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé. Par la positivité et la symétrie du poids $|\cdot|^{-(n+2s)}$ on a

$$C_2(n, s)vp \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x - y|^{n+2s}} dy = -\frac{1}{2}C_2(n, s)vp \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x + y) + \varphi(x - y) - 2\varphi(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy.$$

Il s'agit maintenant de vérifier que dans l'intégrale précédente on peut se passer de la valeur principale.

On a donc

$$vp \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x + y) + \varphi(x - y) - 2\varphi(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |y| < M} \frac{\varphi(x + y) + \varphi(x - y) - 2\varphi(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy + \int_{|y| > M} \frac{\varphi(x + y) + \varphi(x - y) - 2\varphi(x)}{|x - y|^{n+2s}} dy. \quad (73)$$

Comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la deuxième intégrale ne pose aucun problème et il suffit d'étudier le premier terme ci-dessus. Pour cela on utilise un développement de Taylor de deuxième ordre :

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + \nabla\varphi(x) \cdot h + \frac{1}{2}h \cdot D^2\varphi(x)h + o(|h|^3), \quad \text{pour } h \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi en prenant $h = y$ et $h = -y$ on obtient l'identité $\varphi(x + y) + \varphi(x - y) - 2\varphi(x) = y \cdot D^2\varphi(x)y + 2o(|y|^3)$ et donc pour un $M > 0$ assez petit on peut écrire :

$$\left| \int_{|y| < M} \frac{\varphi(x + y) + \varphi(x - y) - 2\varphi(x)}{|y|^{n+2s}} dy \right| \leq \int_{|y| < M} \frac{|y \cdot D^2\varphi(x)y|}{|y|^{n+2s}} dy \leq \int_{|y| < M} \frac{\|D^2\varphi\|_\infty |y|^2}{|y|^{n+2s}} dy \leq \|D^2\varphi\|_\infty \int_{|y| < M} \frac{1}{|y|^{n+2s-2}} dy.$$

Mais comme $0 < s < 1$ on a

$$\int_{|y| < M} \frac{1}{|y|^{n+2s-2}} dy \leq C \int_0^M \rho^{1-2s} d\rho < +\infty.$$

On observe alors que la première intégrale de (73) peut être contrôlée uniformément par rapport à ε . Par le théorème de convergence dominée on en déduit qu'il n'est pas nécessaire de considérer une valeur principale dans cette première intégrale de la formule (73). ■

Une fois qu'on a montré ce lemme on passe à la preuve de l'équivalence de la définition de l'opérateur $(-\Delta)^s$, avec $0 < s < 1$, comment la transformation de Fourier inverse de la fonction $|\cdot|^{2s}\widehat{\varphi}$ et comment un opérateur d'intégrale singulière.

Preuve de la Proposition ??. Tout d'abord remarquons que, comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, par le Lemme 5.1 la fonction de variable $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\frac{\varphi(x + y) + \varphi(x - y) - 2\varphi(x)}{|y|^{n+2s}},$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Définissons donc la fonction $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$ par :

$$T\varphi(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x + y) + \varphi(x - y) - 2\varphi(x)}{|y|^{n+2s}} dy, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (74)$$

Ensuite, par la définition de la transformation de Fourier on a pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\widehat{T\varphi}(\xi) &= -\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} T\varphi(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-2\pi i x \cdot \xi} (\varphi(x+y) + \varphi(x-y) - 2\varphi(x))}{|y|^{n+2s}} dy \right) dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x+y) \cdot \xi + 2\pi i y \cdot \xi} \varphi(x+y) dx + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x-y) \cdot \xi - 2\pi i y \cdot \xi} \varphi(x-y) dx - 2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x) dx \right) \frac{1}{|y|^{n+2s}} dy \\ &= -\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i y \cdot \xi} + e^{-2\pi i y \cdot \xi} - 2}{|y|^{n+2s}} dy \right) \widehat{\varphi}(\xi).\end{aligned}$$

Étudions maintenant l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i y \cdot \xi} + e^{-2\pi i y \cdot \xi} - 2}{|y|^{n+2s}} dy$. Plus précisément, l'objectif est de montrer que

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i y \cdot \xi} + e^{-2\pi i y \cdot \xi} - 2}{|y|^{n+2s}} dy = C |\xi|^{2s}.$$

D'abord, grâce à l'identité $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, on trouve que

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i y \cdot \xi} + e^{-2\pi i y \cdot \xi} - 2}{|y|^{n+2s}} dy = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(y \cdot \xi)}{|y|^{n+2s}} dy.$$

Ensuite, en prenant la rotation $\Theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\Theta(|x|e_1) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ et en écrivant $\xi = \Theta(|\xi|e_1)$ on obtient :

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\xi \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(\Theta(|\xi|e_1) \cdot y)}{|y|^{n+2s}} dy = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(|\xi|e_1 \cdot \Theta^t y)}{|y|^{n+2s}} dy = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(|\xi|w_1)}{|w|^{n+2s}} dw,$$

où on a posé $w = \Theta^t y$. Alors,

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i y \cdot \xi} + e^{-2\pi i y \cdot \xi} - 2}{|y|^{n+2s}} dy = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(|\xi|w_1)}{\frac{|\xi|w_1}{|\xi|} |w|^{n+2s}} dw = |\xi|^{2s} \left(2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} dw \right).$$

Soit $C := 2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} dw = 2C_3(n, s)^{-1}$. On vient de montrer que

$$\widehat{T\varphi}(\xi) = C |\xi|^{2s} \widehat{\varphi}(\xi), \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ on a que $|\cdot|^{2s} \widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors on peut prendre la transformation de Fourier inverse dans l'expression ci-dessus et de cette façon on obtient

$$\frac{1}{2} C_2(n, s) T\varphi = (|\cdot|^{2s} \widehat{\varphi})^\vee.$$

Finalement, par la définition de la fonction $T\varphi$, formule (74), et le Lemme 5.1 on obtient que

$$(-\Delta)^s \varphi = (|\cdot|^{2s} \widehat{\varphi})^\vee.$$

Pour finir la preuve il reste de montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} dw < +\infty$. Pour cela, il suffit de remarquer que pour $|w| < M$, avec $M > 0$ assez petit on a, $\frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} \leq \frac{|w_1|^2}{|w|^{n+2s}} \leq \frac{1}{|w|^{n+2s-2}}$. Alors

$$0 < \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - \cos(w_1)}{|w|^{n+2s}} dw \leq \int_0^M \rho^{1-2s} d\rho + \int_M^{+\infty} \rho^{-1-2s} d\rho < +\infty.$$

■

5.2 La méthode de Perron

Avant de passer à la preuve du Théorème 2.3 nous monterons le lemme suivant qui sera utilisé plus tard.

Lemme 5.2 (Problème de Dirichlet sur les sous-intervalles compacts). *Soient a_1, a_2, b_1 et b_2 nombres réels. Alors il existe une unique solution classique du problème*

$$\begin{cases} -f''(z) + w(z)f(z) = 0, & z \in]a_1, b_1[\\ f(a_1) = a_2 \\ f(b_1) = b_2. \end{cases} \quad (75)$$

Preuve. Tout d'abord on va montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (75) en utilisant le théorème de Lax-Milgram (voir [2], Chapitres 5 et 8). Pour cela, d'abord, on va transformer le problème (75) dans un problème de Dirichlet homogène. Soit alors f_0 une fonction fixée de classe \mathcal{C}^2 telle que $f_0(a_1) = a_2$ et $f_0(b_1) = b_2$, notons que si f est une solution classique du problème (75) alors la fonction $F = f - f_0$ est une solution classique du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -F''(z) + w(z)F(z) = F_0(z), & z \in]a_1, b_1[\\ F(a_1) = F(b_1) = 0, \end{cases} \quad (76)$$

avec la fonction $F_0 = f_0'' - wf_0$. De cette façon, on commence par montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (76). En prenant $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(]a_1, b_1[)$ et en multipliant l'équation du problème antérieur par ϕ , par une intégration par parties on trouve l'équation

$$\int_{a_1}^{b_1} F'(z)\phi'(z)dz + \int_{a_1}^{b_1} w(z)F(z)\phi(z)dz = \int_{a_1}^{b_1} F_0(z)\phi(z)dz. \quad (77)$$

Par le théorème de Lax-Milgram il suffit de montrer que

$$a(u, v) = \int_{a_1}^{b_1} u'(z)v'(z)dz + \int_{a_1}^{b_1} w(z)u(z)v(z)dz$$

est une forme bi-linéaire, continue et coercive dans $H_0^1(]a_1, b_1[)$. Ensuite, comme $b(u) = \int_{a_1}^{b_1} F_0(z)u(z)dz$ pour tout $u \in H_0^1(]a_1, b_1[)$ est toujours une fonctionnelle linéaire et continue dans $H_0^1(]a_1, b_1[)$ il existe une unique fonction $F \in H_0^1(]a_1, b_1[)$ solution faible du problème (76). De cette façon, $f = F + f_0$ est bien une solution faible du problème (75).

Montrons alors que $a(\cdot, \cdot)$ vérifie les conditions mentionnées antérieurement. D'abord, il est évident que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bi-linéaire. Ensuite, comme la fonction continue et positive $w(z)$ est toujours bornée sur le compact $[a_1, b_1]$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient, pour tout $u, v \in H_0^1(]a_1, b_1[)$ que $|a(u, v)| \leq C\|u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1}$. Finalement, $a(\cdot, \cdot)$ est coercive par l'inégalité de Poincaré. En effet, comme $w \geq 0$ on a bien pour tout $u \in H_0^1(]a_1, b_1[)$ que

$$a(u, u) = \int_{a_1}^{b_1} |u'(z)|^2 dz + \int_{a_1}^{b_1} w(z)|u(z)|^2 dz \geq \int_{a_1}^{b_1} |u'(z)|^2 dz \geq C\|u\|_{H_0^1}^2.$$

Montrons maintenant la régularité de la fonction f , solution faible du problème (75). D'abord, par une intégration par parties, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(]a_1, b_1[)$ on a que $\int_{a_1}^{b_1} F'(z)\phi(z)dz = -\int_{a_1}^{b_1} F''(z)\phi(z)dz$, alors dans l'équation (77) on obtient que

$$\int_{a_1}^{b_1} F''(z)\phi(z)dz = -\int_{a_1}^{b_1} (f_0''(z) - w(z)f_0(z) - w(z)F(z))\phi(z)dz,$$

d'où, comme $F_0 - wF \in L^2(]a_1, b_1[)$ et $F \in H_0^1(]a_1, a_2[)$ est une solution faible du problème de Dirichlet (76) on a que $F'' \in L^2(]a_1, b_1[)$ et par conséquent $F \in H^2(]a_1, b_1[)$. En particulier on obtient que $F' \in H^1([a_1, a_2])$ et alors on

conclut que $F' \in \mathcal{C}([a_1, a_2])$.

D'autre part, comme $f \in H^1(]a_1, b_1[)$ on a que $f \in \mathcal{C}([a_1, b_1])$ d'où on obtient que $f_0'' - wf = f_0'' - wf_0 - wF \in \mathcal{C}([a_1, a_2])$, donc, $F'' = f_0'' - wf_0 - wF \in \mathcal{C}([a_1, b_1])$. On conclut alors que F est de classe \mathcal{C}^2 et par conséquent f est aussi une fonction de classe \mathcal{C}^2 . ■

Démonstration du Théorème 2.3. Tout d'abord supposons qu'il existe $z_0 \in I$ tel que $A(z_0) > B(z_0)$. On voit que $A \in S^-$ est une fonction continue car $A \in H_{loc}^1(I)$ et elle est convexe par la condition $A'' - wA \in \mathcal{D}^+$. De même, $B \in S^+$ est une fonction continue et concave par la condition $-(B'' - wB) \in \mathcal{D}^+$. Alors, comme $A(z_0) > B(z_0)$ on a que l'ensemble $J = \{z \in I : A(z) > B(z)\} \neq \emptyset$ et de plus, par la continuité de la fonction $A - B$, il existe un intervalle $]a_0, b_0[$ tel que $z_0 \in]a_0, b_0[\subset J$ et tel que, par la convexité de A et la concavité de B , on a que : $\lim_{z \rightarrow a_0^+} A(z) - B(z) = \lim_{z \rightarrow b_0^-} A(z) - B(z) = 0$. De cette façon, on peut trouver $z_1, z_2 \in]a_0, b_0[$ tels que : $z_1 < z_0 < z_2$ où $A(z_1) - B(z_1) \leq A(z_0) - B(z_0)$ et $A(z_2) - B(z_2) \leq A(z_0) - B(z_0)$. Ce fait nous montre que la fonction $A - B$ doit être concave sur l'intervalle $]a_0, b_0[$.

D'autre part, sur le même intervalle, $]a_0, b_0[$, on a que $A'' - B'' \in \mathcal{D}^+$, en effet, on voit que

$$A'' - B'' = A'' - wA + wB - B'' + w(A - B) \in \mathcal{D}^+,$$

car la fonction $w(A - B) \geq 0$ sur $]a_0, b_0[$. De cette façon on obtient que la fonction $A - B$ est convexe sur l'intervalle $]a_0, b_0[$ et alors on a une contradiction. Ainsi, on la montré la partie (i).

Prenons maintenant la fonction

$$\phi(z) = \sup_{A \in S^-} A(z), \quad \text{pour tout } z \in I.$$

Nous allons montrer que ϕ est bien une solution classique du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\phi''(z) + w(z)\phi(z) = 0 \quad \text{sur } I, \\ \lim_{z \rightarrow a^+} \phi(z) = a_1, \\ \lim_{z \rightarrow b^-} \phi(z) = b_1. \end{array} \right.$$

Tout d'abord, comme $A \in S^-$ et $B \in S^+$ alors par la définition de la fonction ϕ on a que

$$A(z) \leq \phi(z) \leq B(z), \quad \text{pour tout } z \in I.$$

En particulier, cela montre que l'on a : $\lim_{z \rightarrow a^+} \phi(z) = a_1$ et $\lim_{z \rightarrow b^-} \phi(z) = b_1$. Il reste à montrer que $-\phi''(z) + w(z)\phi(z) = 0$ au sens classique pour tout $z \in I =]a, b[$. Prenons $z_1, z_2 \in I$ et notons l'intervalle $I_1 := [z_1, z_2] \subset I$. De même, notons par $f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}$ la solution classique du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -f''(z) + w(z)f(z) = 0, \quad z \in [z_1, z_2] \\ f(a_1) = \phi(z_1) \\ f(b_1) = \phi(z_2), \end{array} \right.$$

donnée par le Lemme 5.2. L'objectif est de montrer que $\phi = f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}$ sur l'intervalle $[z_1, z_2]$, de cette façon, comme nous avons pris n'importe quels $z_1, z_2 \in I$ on obtient que ϕ vérifie l'équation $-\phi''(z) + w(z)\phi(z) = 0$ sur l'intervalle $I =]a, b[$. En appliquant la partie (i) de ce théorème à l'intervalle $I_1 = [z_1, z_2]$ au lieu de l'intervalle I , pour n'importe quelle $A \in S^-$ on voit que $A \leq f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}$ sur l'intervalle I_1 , car $f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)} \in S^+$ sur cet intervalle I_1 . Ensuite, par la définition de ϕ on conclut alors que

$$\phi(z) \leq f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}(z),$$

pour tout $z \in I_1$.

D'autre part, comme $\phi(z) = \sup_{A \in S^-} A(z)$ pour tout $z \in I$, pour $\varepsilon > 0$ on peut trouver $A_1, A_2 \in S^-$ telles que $\phi(z_1) - \varepsilon \leq A_1(z_1) \leq \phi(z_1)$ et $\phi(z_2) - \varepsilon \leq A_2(z_2) \leq \phi(z_2)$, on peut aussi supposer, sans perte de généralité, que $A_2(z_1) \leq A_1(z_1)$ et $A_1(z_2) \leq A_2(z_2)$. Définissons alors la fonction $A_0(z)$ par :

$$A_0(z) = \begin{cases} A_1(z), & a < z < z_1 \\ f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}(z), & z_1 \leq z \leq z_2 \\ A_2(z), & z_2 < z < b \end{cases}$$

On veut montrer que $A_0 \in S^-$, de cette façon on a que $\phi(z) \geq f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}(z)$ sur I_1 et par conséquent on obtient l'égalité $\phi = f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}$ sur $I_1 = [z_1, z_2]$. Pour simplifier les notations on va noter $f = f_{I_1, \phi(z_1), \phi(z_2)}$. Alors par la formule des sauts on a au sens des distributions que :

$$A_0'' - wA_0 = (A_1'' - wA_1)\mathbb{1}_{]a, z_1[} + (f'(z_1^+) - A_1'(z_1^-))\delta_{z_1} + (A_2'' - wA_2)\mathbb{1}_{]z_2, b[} + (A_2'(z_2^+) - f'(z_2^-))\delta_{z_2}.$$

Comme $A_1, A_2 \in S^-$ pour montrer que $A_0 \in S^-$ il suffit de vérifier que $f'(z_1^+) - A_1'(z_1^-) \geq 0$ et $A_2'(z_2^+) - f'(z_2^-) \geq 0$. On a vu antérieurement que pour n'importe quelle $A \in S^-$ on a que $A \leq f$ sur l'intervalle I_1 . En particulier, pour les fonctions A_1, A_2 on a que $A_1 \leq f$ et $A_2 \leq f$ sur $I_1 = [z_1, z_2]$. De plus on a que $A_1'(z_1^+) - A_1'(z_1^-) > 0$ et $A_2'(z_2^+) - A_2'(z_2^-) > 0$, de cette façon on obtient que $f'(z_1^+) - A_1'(z_1^-) \geq A_1'(z_1^+) - A_1'(z_1^-) \geq 0$ et par le même raisonnement $A_2'(z_2^+) - f'(z_2^-) \geq 0$.

Pour finir la preuve de ce théorème montrons l'unicité de la solution ϕ . Clairement on a que $\phi \in S^- \cap S^+$, nous allons montrer que l'ensemble $S^- \cap S^+$ a un seul élément. En effet, si on peut trouver $\phi_1, \phi_2 \in S^- \cap S^+$ alors pour la partie (i) on a que, puisque $\phi_1 \in S^-$ et $\phi_2 \in S^+$ donc $\phi_1 \leq \phi_2$, ensuite, par le même raisonnement on obtient que $\phi_2 \leq \phi_1$ et alors on obtient que $\phi_1 = \phi_2$. ■

Références

- [1] V. Banica, M.d.M. Gonzales et M. Sáez. Some Constructions for the Fractional Laplacian on Noncompact Manifolds. arxiv.org > math > arXiv :1212.3109, 2014.
- [2] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle. Dunod, Paris, 1995.
- [3] L. Caffarelli et E. Gutiérrez. Properties of the Solutions of the Linearized Monge-Ampère Equation. American Journal of Mathematics. Vol 19, No. 2 : 423-465, 1997.
- [4] L. Caffarelli et L. Silvestre. An Extension Problem Related to the Fractional Laplacian. Communications in Partial Differential Equations. Vol 32 : 1245-1260, 2007.
- [5] D. Chamorro et O. Jarrín. Fractional Laplacians and Nilpotent Lie Groups. arxiv.org > arXiv :1409.5055, 2014.
- [6] E. Di Neiza, G. Palatucci et E. Valdinoci. Guide to the fractional Sobolev spaces. Bull. Sci math, Vol 136, No. 5 : 521-573, 2012.
- [7] L. Evans. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, American Mathematical Society.
- [8] D. Gilbarg et N. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, New York, 1997.
- [9] L. Grafakos. Classical Fourier Analysis. Springer, New York, 2008
- [10] D. Maldonado. Notes on F.J. Almgren's Frequency Formule. Topics in Analysis, Kansas State University, Department of Mathematics, 2009.
- [11] W. Rudin. Functional Analysis. McGraw-Hill, Wisconsin New York, 1991.
- [12] E.M. Stein. Singular Integrals and Differentiability Properties of Fonctions. Princeton University Press, New Jersey, 1970.
- [13] E.M Stein. Harmonic Analysis, Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals. Princeton University Press, New Jersey, 1993.
- [14] R. Stinga et L. Torrea. Extension Problem and Harnack's Inequality for some Fractional Operators. Communications in Partial Differential Equations. Vol 35 : 2092-2122, 2010.