TD1 Mathématiques Financières

Exercice 1
Donner et tracer les payoffs à maturité des stratégies suivantes.

1. Straddle : achat d'un call et d'un put de même strike K et de même maturité T.
2. Strangle : achat d'un call et d'un put de même maturité T mais de strike différent.
3. Strip : achat d'un call et de deux put de même strike K et de même maturité T.
4. Strap : achat d'e deux call et d'un put de même strike K et de même maturité T.
5. Bull spread : achat d'un call de strike K_1 et vente d'un call de strike $K_2 > K_1$ de même maturité T.
6. Bear spread : achat d'un put de strike K_1 et vente d'un put de strike $K_2 > K_1$ de même maturité T.
7. Butterfly : achat de deux call de strikes $K + \delta$ et $K - \delta$ et vente de deux call de strike K.
8. Condor : achat de deux call de strikes K_1 et $K_4 > K_1$, vente de deux call de strikes $K_2 = K_1 + \delta$ et $K_3 = K_4 - \delta$ avec $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$.

Exercice 2
On suppose qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché. On note B_0 le prix en 0 de l'actif sans risque rapportant 1 à la date T. On note de même C_0 et P_0 les prix en 0 d'un call et d'un put sur le sous jacent S de maturité T et de strike K.

1. Montrer par un raisonnement d'arbitrage que :
$$(S_0 - KB_0)^+ \leq C_0 \leq S_0.$$
2. En déduire :
$$(KB_0 - S_0)^+ \leq P_0 \leq KB_0.$$
3. Montrer que le prix du call est décroissant par rapport au strike mais croissant par rapport à la maturité.
4. Qu'en est-t-il du prix du put ?

Exercice 3
On étudie sur l'intervalle de temps $[0, T]$ le marché de devises entre l'euro et le dollar américain. Ce marché peut être schématisé de la manière suivante :

1. Dans l'économie européenne, il existe un actif sans risque domestique de taux d'intérêt continu r_d. Son prix est normalisé en T et vaut donc $B_t^d = e^{-r_d(T-t)}$ euro pour tout $t \in [0, T]$.
2. Dans l'économie américaine, il existe aussi un actif sans risque, de taux d'intérêt continu r_f. Son prix, exprimé en dollars, est normalisé en T et vaut donc $B_t^f = e^{-r_f(T-t)}$ euro pour tout $t \in [0, T]$.
3. Pour obtenir 1 dollar, il faut débourser S_t euros à la date t.

4. Enfin, sur le marché il existe des contrats forwards pour toute date $t \in [0, T]$. Un contrat forward contracté à la date t est déterminé par l'échange de flux suivant :
   - Aucun échange de flux à la date d'entrée t dans le contrat.
   - A l'échéance T, on reçoit 1 dollar contre F_t euro, montant fixé à la date d'entrée t du contrat.

1. Soit $t \in [0, T]$. Donner le pay-off à la date T, en euros, en fonction de la valeur du taux de change S_T, des portefeuilles suivants, constitué à la date t
   - Achat de B_t^f dollars. Ce montant est alors placé dans l'actif sans risque de l'économie américaine. Et emprunt de $F_t B_t^d$ euros (grâce à l'actif sans risque domestique).
   - Contrat forward contracté à l'instant t.

   En déduire, par un raisonnement d'arbitrage, le prix F_t en fonction de la valeur du taux de change S_t à l'instant t.
2. Donner le pay-off en euros à la date T du portefeuille constitué à partir d'un contrat de prix forward F_0 et de la vente à découvert à la date t du contrat de prix forward F_t.