TD2 Mathématiques Financières

Exercice 1
On considère un marché financier composé d'un actif sans risque S^0 et de d actifs risqués. Soit $(\phi_n)_{0\leq n\leq N}$ un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit $V_0 \in \mathbb{R}$. Construire un processus prévisible $(\phi^0_n)_{0\leq n\leq N}$ à valeurs réelles tel que (V_0, ϕ^0, ϕ) soit un portefeuille autofinancé.

Exercice 2
On se place dans un modèle de marché à deux dates, composé d'un actif S^0 sans risque dont le taux composé est r et d'un actif risqué dont la valeur initiale est 100\$ et la valeur de cet actif en 1 est 80\$ ou 120\$ avec la même probabilité pour les deux valeurs. Sur le marché un broker propose un call de strike $K = 105\$$ de maturité 1 au prix C. Quel est le prix C que doit fixer le vendeur du call pour ne pas avoir d'arbitrage quand $r = 5\%$ et sachant qu'il ne souhaite pas perdre d'argent dans tous les cas.

Exercice 3
On se place dans un modèle de marché à deux dates, composé d'un actif S^0 sans risque dont le taux composé est $r = 25\%$ et d'un actif risqué dont la valeur initiale est 1\$ et vaut $\{0,5; 1; 1,5; 2\}$ de manière équiprobable. On peut aussi acheter un call de strike 1 au prix de $0,2\$$. Est-ce que ce marché est viable ?

Exercice 4
On se place dans un modèle de marché à trois dates, composé d'un actif S^0 sans risque de valeur initiale égale à 1, rémunéré au taux r et d'un actif risqué dont la valeur S peut suivre quatre trajectoires :

trajectoires	S_0	S_1	S_2
ω_1	100	110	120
ω_2	100	110	105
ω_3	100	95	100
ω_4	100	95	90

a) Montrer que si $r = 0.1$ le marché n'est pas viable et construire une stratégie d'arbitrage.
b) Pour quelles valeurs de r, le marché est-il viable ?
c) Montrer que si $r = 3\%$, le marché est complet et calculer, pour $i \in \{1, ..., 4\}, \mathbb{P}^*(\omega_i)$. où $\mathbb{P}^*$ est la probabilité risque neutre du marché.
d) En déduire le prix à l'instant initial d'un call européen de strike 100 sur l'actif S si $r = 3\%$.

Exercice 5

On se place dans un marché où l'on peut acheter et vendre des calls de tous strikes et de toutes maturités. On peut aussi placer et emprunter de l'argent à taux nul.

1. Montrer que s'il existe un call de prix d'exercice K, de maturité T et de prix C tel que $C > S_0$ (S_0 représente le prix du sous-jacent à $t = 0$), alors on peut gagner de l'argent sans investissement initial.

2. Monter de même que $C < (S_0 - K)^+$ implique une opportunité d'arbitrage.

3. Montrer que le prix du call est croissant par rapport à la maturité et décroissant par rapport au strike si on suppose AOA.

Exercice 6

On note $B(t,T)$ le prix à la date t d'un ZC d'échéance T (càd la valeur en t de 1 euro en T). Soit l'instrument financier de flux final

$$\min(\max(S_T, K_1), K_2) \quad \text{avec } K_1 < K_2.$$

Tracer le profil de cet instrument à la date T. Décomposer son prix à la date t à l'aide de ZC et de call bien choisis.