Exercice 1

Un sac contient deux boules blanches et 3 boules noires. Quatre personnes A,B,C,D tirent dans l'ordre indiqué une boule et ne la remettent pas dans le sac. La première qui tire une boule blanche reçoit 10 €. Calculer l' espérance mathématique des gains des 4 personnes.

Exercice 2

Une célèbre entreprise de porcelaine E dispose de 10 conteneurs d'assiettes. Ces 10 conteneurs sont absolument identiques et contiennent les mêmes assiettes dans la même quantité.
L'entreprise E décide d'exporter via le transporteur T, ces 10 conteneurs à sa filiale F. Malheureusement, lors du transport, trois des conteneurs se heurtent et de nombreuses assiettes sont abimées dans chacun de ces trois conteneurs (au moins 5 % des assiettes par conteneur). Par contre, les 7 autres conteneurs sont intacts.
Le transporteur, qui a connaissance de ces dégats , décide de ne pas prévenir l'entreprise E, ni sa filiale F et il dépose les conteneurs à la filiale F.
Un commercant C arrive le lendemain à la filiale F et souhaite acheter, pour son magasin, 6 de ces conteneurs. La filiale F accepte de vendre chaque conteneur 100 000 euros mais elle refuse catégoriquement toute ristourne. Le commercant C obtient néanmoins qu'en contrepartie d'un paiement immédiat et au comptant de ces 6 conteneurs, il sera remboursé du prix de chaque conteneur contenant plus de 5 % d'assiettes endommagées et, en outre, il obtiendra un dédommagement de 30 000 euros pour chaque conteneur endommagé.
Le commercant choisi alors 6 conteneurs au hasard (il ne peut en aucun cas ouvrir les conteneurs ni voir ce qu'ils contiennent).
On note X le nombre de conteneurs endommagés et Z le coût total pour le commercant après vérification des conteneurs.

1. Donner la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.
2. Exprimer Z en fonction de X et en déduire son espérance et sa variance.
3. Sachant que chaque conteneur contient 10 000 assiettes et que chaque conteneur endommagé contient entre 500 et 1000 assiettes endommagées, à combien peut-on estimer le coût unitaire de chaque assiette non endommagée ?

Exercice 3

On reprend l'exercice 7 de la série 2

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules au hasard et sans remise jusqu'à ce que l'on ait tiré la dernière boule blanche. Soit K le nombre total de boules tirées.

1. Calculer l'espérance mathématique de K [1].
2. Calculer la variance de K.

Exercice 4

On reprend l'exercice 6 de la série 2

Soit n un entier non nul. Dans une urne contenant initialement n boules numérotées 1 à n, on effectue deux tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : Si on note k ($k \in [\![1, n]\!]$) le numéro de la boule tirée au premier tirage, celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k ; on effectue alors un second tirage. On appelle X_1 la variable égale au numéro de la boule tirée au premier tirage et X_2, celle égale au numéro de la boule tirée au second tirage.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1 (voir TD 2)

1. On rappelle la formule de Pascal :

$$\sum_{k=n}^{N} C_k^n = C_{N+1}^{n+1}$$

2. Déterminer la loi de probabilité de X_2 et vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} p(X_2 = k) = 1$$

(voir TD 2)

3. Calculer

$$j - n + \frac{n^2}{n+j}.$$

où $j \in \mathbb{N}$ et montrer que l'espérance de X_2 vaut :

$$E[X_2] = \frac{1-n}{2} + \frac{3n+1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

4. Déterminer un équivalent simple de $E[X_2]$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5

Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants, de même probabilité a $(0 < a < 1)$, par exemple $A_i = $ *{ obtenir 421 au $i^{\text{ème}}$ lancer de trois dés }* . Pour r entier ≥ 1, on note N_r la variable aléatoire réelle numéro du tirage où on obtient la r-ième réalisation d'un A_i, par exemple N_3 est le tirage où 421 sort pour la troisième fois.

1. Quelle est la loi de probabilité de N_1 ?
2. Quelle est la loi de probabilité de N_r ?
3. Calculer l'espérance [2] mathématique et la variance de N_r.

Exercice 6 : loi classique (Examen 2008)

Soit un ensemble E constitué de M éléments de type 1 et $N - M$ éléments de type 2.
On effectue n tirages sans remise dans E.
Soit X_k la variable aléatoire définie par :

$$\begin{cases} X_k & = & 1 & \text{si le } k^{ieme} \text{ tirage dans E donne un element de type 1} \\ X_k & = & 0 & \text{si le } k^{ieme} \text{ tirage dans E donne un element de type 2} \end{cases}$$

et soit

$$X \; = \; \sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer la loi de X_k, $E(X_k)$ et $V(X_k)$.
3. Pour tous i et j distincts dans $[1,\ n]$, déterminer $cov(X_i,\ X_j)$.
4. Retrouver $E(X)$ et $V(X)$.

2. on pose

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-a)^{k+r-1} = \frac{(1-a)^{r-1}}{a}$$