Lois usuelles - Lois discrètes

Exercice 1

Dans un lot de condensateurs électriques identiques pour équipement électronique, il y a 15 % de condensateurs hors tolérance.
Quelle est la probabilité de trouver :

1. 0 condensateur hors tolérance dans un échantillon de 10 ?
2. 0 condensateur hors tolérance dans un échantillon de 20 ?
3. 2 condensateurs hors tolérance dans un échantillon de 10 ?

Exercice 2

1. Un fabricant de pièces de rechange d'un appareil électronique garantit qu'une boîte de ses pièces contient au plus deux pièces défectueuses. Chaque boîte renferme 20 pièces et on sait par expérience que le procédé de fabrication fournit 2% de pièces défectueuses. Quelle est la probabilité qu'une boîte de pièces soit conforme à la garantie ?
2. On sait par expérience que 2% de fusibles sont défectueux. Quelle est la probabilité d'avoir au plus 5 fusibles défectueux dans une boîte de 200 fusibles.

Exercice 3

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geq 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartennant à $]0, 1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q.

1. Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels. Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. Après ces n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'elles n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   (b) Calculer : $p_0 = P(Z = 0)$ et $p_1 = P(Z = 1)$.
   Montrer que $p_1 = npq^{2n-2}(1 + q)$.
   (c) Calculer $P_{(X=k)}(Y = h)$ pour $k \in [0,\ n]$ et $h \in [0,\ n - k]$.
   (d) Démontrer $P(Z = s) = \sum_{k=0}^{s} P[(X = k) \cap\ (Y = s - k)]$
   (e) Calculer $P(Z = s)$, vérifier que $C_n^k\ C_{n-k}^{s-k} = C_n^s\ C_s^k$.
   En déduire que $P(Z = s) = C_n^s\ [p(1 + q)]^s\ (q^2)^{n-s}$
   (f) Montrer que $p(1 + q) = 1 - q^2$ et reconnaître la loi suivie par Z.

Exercice 4

1. Le nombre moyen d'appels téléphoniques qui parvient à un standard pendant une minute est égal à 5. Le standard peut traiter un maximum de 8 appels par minute. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas en mesure de traiter tous les appels qui parviendront sur une période d'une minute.

Exercice 5

1. Construire l'histogramme de la distribution binomiale avec n=12 et p=1/3 et ajuster par une courbe normale.
2. Etablir la formule de récurrence permettant un calcul à la main.

Exercice 6

Sur un espace probabilisé sont définies 2 variables aléatoires X et Y qui sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ et si la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètre (n, p), quelle est la loi de Y ? En déduire la loi conditionnelle de $X - Y$ sachant $Y = y$.

Exercice 7

1. Le directeur d'un service du personnel dans une grosse entreprise veut choisir 3 employés parmi les 10 d'un de ses bureaux, afin de leur confier une étude de salaires particulière. Or il se trouve que 4 d'entre eux ont déjà eu l'occasion d'être assignés à ce genre d'étude. On demande d'établir un diagramme en arbre pour schématiser cette opération de sélection en tenant compte du fait que chaque individu peut, soit avoir de l'expérience (E), soit ne pas en avoir (E'), dans le type de travail prévu. On demande d'inscrire les probabilités correspondantes sur les branches de ce cheminement et de calculer la probabilité de chaque suite envisagée.
2. Calculer la probabilité pour qu'exactement deux des employés choisis soient de la catégorie (E).
3. Répondre à la question précédente en utilisant la distribution hypergéométrique.

Exercice 8

On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie qui amène pile avec la probabilité p ($p \in]0,\, 1[$) et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On dit que la première série est de longueur n (≥ 1) si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)^e$ l'autre. On note L_1 la longueur de cette série. On définit de même L_2 la longueur de la $2^{ième}$ série.

1. Déterminer la loi de L_1 et son espérance.
2. Déterminer la loi conjointe de L_1 et L_2.
3. L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ? (on discutera suivant les valeurs de p et q.)
4. En admettant que $cov(L_1,\, L_2)$ existe, calculer $cov(L_1,\, L_2)$