# Probabilités TD 7
# Lois usuelles - loi à densité

**Exercice 1 : Calcul d'intégrales à l'aide de V.A.R. à densité**

1. Montrer que
$$\Gamma(\frac{1}{2}) \ = \ \sqrt{\pi}$$
On utilisera la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2. $a > 0, \quad b \in \mathbb{R}$. Calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ x \ \exp\Big( -\frac{1}{2}a^2(x+b)^2\Big) \ dx$$
3. Calculer (à $10^{-2}$ près)
$$\int_{2}^{2+\sqrt{2}} \ e^{-x^2+4x-2} \ dx$$

**Exercice 2 : Loi du "Khi-deux"**
Soit $X$ une V.A.R. de loi normale $\mathcal{N}(0,\ 1)$.
1. Déterminer la loi de $Y \ = \ X^2$.
2. Calculer $E(X)$ et $V(Y)$.
3. Soit $k$ un entier non nul et $X_1,\ X_2,\ ...\ X_k$ des variables indépendantes gaussiennes centrées réduites.
   (a) Reconnaître la loi de $X_1^2$. (On admet $\Gamma(\frac{1}{2}) \ = \ \sqrt{\pi}$)
   (b) En déduire la loi de $S \ = \ X_1^2 + X_2^2 + ... + X_k^2$. (On admettra que les variables $X_1,\ X_2,\ ...\ X_k$ sont indépendantes)
   (c) Déterminer $E(S)$ et $V(S)$ de deux manières différentes.

**Exercice 3**
Dans une usine qui produit des céréales pour le petit déjeuner, le processus mécanique de remplissage des boîtes a été ajusté de façon qu'en moyenne chaque boîte contienne 13 grammes de céréales.
Naturellement, il peut y avoir une certaine variabilité et l'on sait que l'écart-type est de $\sigma = 0,1$ gramme et que le processus suit une loi normale.
1. Calculer la probabilité que le contenu d'une boîte choisie au hasard soit compris entre 13 et $13,2$ grammes.
2. Quelle est la probabilité pour que le contenu d'une boîte dépasse $13,25$ grammes. Représenter l'aire sous la courbe normale qui correspond à cette hypothèse.
3. Quelle est la probabibilité que la masse soit comprise entre 12.9 et 13.1 grammes.
4. Quelle est la probabilité pour que le contenu d'une boîte soit compris entre 12.8 et $13,1$ grammes.
5. Quelle est la probabibilité que la masse soit comprise entre 13.1 et 13.2 grammes.

**Exercice 4**
Un fabricant de pièces de machine prétend qu'au plus 10 % de ses pièces sont défectueuses. Un acheteur a besoin de 120 pièces. Pour disposer d'un nombre suffisant de bonnes pièces, il en commande 140. Si l'affirmation du fabricant est valable, quelle est la probabilité que l'acheteur reçoive au moins 120 bonnes pièces.

**Exercice 5**
On suppose que les notes obtenues à un examen sont distribuées normalement avec une moyenne de 76 et un écart-type de 15. Les 15 % des étudiants ayant eu les meilleures notes reçoivent la mention $TB$ et 10 % en queue de classement obtiennent la mention $P$.
1. Quelle est la note minimale nécessaire pour obtenir la mention $TB$ ?
2. Quelle est la note minimale pour avoir mieux que la mention $P$ ?

**Exercice 6** A l'entrée d'une station de métro, un marchand de journaux remarque qu'en moyenne, entre 8h et 9h, une personne sur 10 achète un journal.

1. Sachant qu'il passe 400 personnes entre 8h et 9h, indiquer la loi de probabilité de X, nombre de journaux vendus pendant cette période (préciser les hypothèses).
2. Donner l'espérance mathématique et la variance de X.
3. Par quelle loi de probabilité peut-on approximer la loi de X ? Utiliser cette approximation pour calculer les probabilités des évènements :

$$X=42\,; \qquad X\geq 45\,; \qquad 35 \leq X < 45\,; \qquad 29 \leq X < 52.$$

**Exercice 7**

Par laminage de lingots on obtient des barres d'acier dont la longueur est une variable aléatoire $X$ de densité $f$. Pour obtenir des barres dont la longueur soit égale à la longueur désirée $l$, on tronçonne celles qui sont trop longues et on rebute celles qui sont trop courtes ; la longueur perdue est une variable aléatoire $Y$ définie par :

$$Y = \begin{cases} X & si \quad X < l \\ X - l & si \quad X \geq l \end{cases}$$

1. Montrer que :

$$E(Y) \; = \; E(X) - l \int_l^{\infty} f(x)\; dx.$$

2. On suppose que $X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\sigma$ et $l$ étant connus. Déterminer la valeur $m_0$ de $m$ qui rend minimum $E(Y)$.
   Application numérique : $l = 200$ cm et $\sigma = 2$ cm.

**Exercice 8**

On dit qu'une variable aléatoire réelle $X$ suit une loi gamma de paramètre $(a, b)$ $\quad (a > 0,\; b > 0)$ notée $\gamma(a, b)$ si la densité de la loi de $X$ est définie par

$$f_X(x) \; = \; \frac{b^a}{\Gamma(a)}\, e^{-\,b\,x}\, x^{a-1}\, \mathbb{1}_{]0,\,\infty[}(x).$$

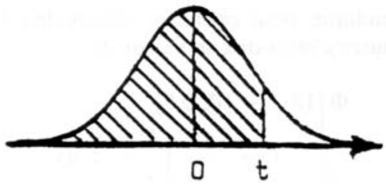
où $\Gamma$ désigne la fonction Gamma.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $E[X^k]$ en fonction de $\Gamma$. En déduire $E[X]$ et $Var[X]$
2. Déterminer $\varphi(x)$ la fonction caractéristique de $X$.
3. Pour $\alpha > 0$, déterminer la loi $T_1 = \alpha X$.
4. Déterminer la loi $T_2 = \frac{1}{X}$.
5. Pour quelles valeurs de $a$, $E[T_2]$ et $Var[T_2]$ existent ?

# LOI NORMALE CENTREE REDUITE

Cette table indique, pour certaines valeurs de t, la valeur de la surface hachurée, c'est-à-dire la valeur de :

$$F \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to [0.5;\ 1] \\ t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \end{array} \right.$$




| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |
| 3,6 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,7 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,8 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 | 0,9999 |
| 3,9 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |